Differentieerbare funcies zonder afgeleiden

Voordracht ter gelegenheid van het afscheid van Henk Pijls

Gijs Tuynman
Université de Lille I

20 juni 2008

Een eenvoudige stelling

Stelling. *Zij* $U \subset \mathbf{R}^n$ *een convexe open verzameling en* $f : U \to \mathbf{R}^p$ *een* C^1*-functie. Definieer* $g : U \times U \to M(p \times n, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{np}$ *door*

$$g(x, y) = \int_0^1 f'(sx + (1-s)y)\,\mathrm{d}s\ .$$

Dan is g *een continue funcie en*

$$\forall x, y \in U\ :\qquad f(x) - f(y) = \int_0^1 f'(sx + (1-s)y) \cdot (x - y)\,\mathrm{d}s$$

$$= g(x, y) \cdot (x - y)\ .$$

En zijn omkering

Stelling. *Zij* $U \subset \mathbf{R}^n$ *een convexe open verzameling en* $f : U \to \mathbf{R}^p$ *een willekeurige functie. Stel dat er een continue functie* $g : U \times U \to M(p \times n, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{np}$ *bestaat zodanig dat*

$$\forall x, y \in U \ : \qquad f(x) - f(y) = g(x,y) \cdot (x-y) \ .$$

Dan is f *een* C^1 *functie en* $f'(x) = g(x,x)$.

En zijn omkering

Stelling. *Zij* $U \subset \mathbf{R}^n$ *een convexe open verzameling en* $f : U \to \mathbf{R}^p$ *een willekeurige functie. Stel dat er een continue functie* $g : U \times U \to M(p \times n, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{np}$ *bestaat zodanig dat*

$$\forall x, y \in U \quad : \qquad f(x) - f(y) = g(x,y) \cdot (x - y) \ .$$

Dan is f *een* C^1 *functie en* $f'(x) = g(x,x)$*.*

Bewijs.

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - g(x,x) \cdot h\|}{\|h\|} = \frac{\|(\, g(x+h,x) - g(x,x)\,) \cdot h\|}{\|h\|}$$

$$\leq \frac{\|g(x+h,x) - g(x,x)\| \cdot \|h\|}{\|h\|} \xrightarrow{\|h\| \to 0} 0 \ .$$

Een alternatieve definitie

Definitie. Zij $U \subset \mathbf{R}^n$ een open verzameling en $f : U \to \mathbf{R}^p$ een willekeurige functie. f is een C^1 functie als er een continue functie $g : U \times U \to M(p \times n, \mathbf{R})$ bestaat zodanig dat

$$\forall x, y \in U : \qquad f(x) - f(y) = g(x, y) \cdot (x - y) \ .$$

Nota Bene. De functie g is in het algemeen niet eenduidig bepaald door de functie f, maar de diagonaalwaarden $g(x, x)$ zijn wel eenduidig door f bepaald: $g(x, x) = f'(x)$.

We gaan complex

(Alternatieve) Definitie. Zij $U \subset \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ een open convexe verzameling en zij $f : U \to \mathbf{C}$ een willekeurige functie. f is $\mathbf{C}$-C^1 als er een continue functie $g : U \times U \to M(1 \times 1, \mathbf{C}) = \mathbf{C}$ bestaat zodanig dat

$$(\star) \qquad \forall z, w \in U : \qquad f(z) - f(w) = g(z,w) \cdot (z - w) \ .$$

Als we alles uitsplitsen in reëel en complex deel: $z = x + iy$, $w = u + iv$, $f = h + ik$ en $g = p + iq$ en de matrix functie $\hat{g} : U \to M(2 \times 2, \mathbf{R})$ définieren door

$$\hat{g}(z,w) = \begin{pmatrix} p(z,w) & -q(z,w) \\ q(z,w) & p(z,w) \end{pmatrix} \ ,$$

dan kunnen we de vergelijking $(\star)$ schrijven als

$$\forall z, w \in U : \qquad \begin{pmatrix} h(z) \\ k(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h(w) \\ k(w) \end{pmatrix} = \hat{g}(z,w) \cdot (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}) \ .$$

We gaan complex

Definitie. Een (reële) 2×2 matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M(2 \times 2, \mathbf{R})$ is matrix-complex als $a = d$ en $b = -c$.

Stelling. *Een functie $f : U \to \mathbf{C}$ is $\mathbf{C}$-C^1 dan en slechts dan als f $\mathbf{R}$-C^1 is en er een (matrix) functie $\hat{g}$ bestaat die matrix-complex is.*

Dit is het geval dan en slechts dan als er een (matrix) functie $\hat{g}$ bestaat zodanig dat de diagonaalwaarden $\hat{g}(z, z)$ matrix-complex zijn.

Isometrieën

Zij $so(3) \subset M(3 \times 3, \mathbf{R})$ de verzameling van alle (3 bij 3) anti-symmetrische matrices. Dan is de afbeelding $j : \mathbf{R}^3 \to so(3)$ gedefinieerd door

$$j\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

een bijectie.

Stelling. *De afbeelding j heeft de volgende eigenschappen:*

$$\forall X, V \in \mathbf{R}^3 : \qquad j(X) \cdot V = X \wedge V \qquad \textit{en}$$

$$[\, j(X), j(V)\,] \equiv j(X) \cdot j(V) - j(V) \cdot j(X) = j(X \wedge V)$$

met $X \wedge V$ het uitwendig product (vector product) van de vectoren X en V.

Isometrieën

De groep $E(3)$ van euclidische transformaties in $\mathbf{R}^3$ is het semi-direct product van $SO(3)$ en $\mathbf{R}^3$, dat we kunnen zien als een ondergroep van $GL(4 \times 4, \mathbf{R})$:

$$(A, V) \in SO(3) \times \mathbf{R}^3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

De Lie algebra van $E(3)$ is het semi-direct product van $so(3)$ en $\mathbf{R}^3$, gezien als deelalgebra van $M(4 \times 4, \mathbf{R})$ met commutator

$$\left[\begin{pmatrix} j(X) & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j(\hat{X}) & \hat{V} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} j(X \wedge \hat{X}) & j(X) \cdot \hat{V} - j(\hat{X}) \cdot V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} j(X \wedge \hat{X}) & X \wedge \hat{V} + V \wedge \hat{X} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Duale getallen

Definitie. De verzameling $\mathbf{D}$ van duale getallen is de vectorruimte $\mathbf{R}^2 \cong \mathbf{R} \oplus \epsilon \mathbf{R}$ met de vermenigvuldiging gedefinieerd door $\epsilon^2 = 0$:

$$(a + \epsilon b) \cdot (x + \epsilon y) = ax + \epsilon(ay + bx) \ .$$

Stelling. *Als we de Lie algebra van $E(3)$ identificeren met $\mathbf{D}^3 \cong \mathbf{R}^6$ volgens*

$$\begin{pmatrix} j(X) & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow X + \epsilon V \ ,$$

dan hebben we de volgende correspondentie voor de commutator:

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{pmatrix} j(X) & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j(\hat{X}) & \hat{V} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] & = & \begin{pmatrix} j(X \wedge \hat{X}) & X \wedge \hat{V} + V \wedge \hat{X} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \left[X + \epsilon V, \hat{X} + \epsilon \hat{V}\right] & = & (X + \epsilon V) \wedge (\hat{X} + \epsilon \hat{V}) \end{array} .$$

Duale getallen

De gebruikelijke definitie van C^1 functies op D. Zij $U \subset \mathbf{D}$ een convexe open verzameling. Een functie $f : U \to \mathbf{D}$ is $\mathbf{D}$-C^1 als f, gezien als functie $U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, een $\mathbf{R}$-C^1 functie is die voldoet aan de vergelijkingen

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z) = \frac{\partial \operatorname{Du} f}{\partial y}(z) \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(z) = 0\ .$$

Nota Bene. De klassieke definitie van een afgeleide

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

kan niet gebruikt worden voor duale getallen want $\mathbf{D}$ bevat nuldelers en dus het differentie quotient is niet (altijd) goed gedefinieerd.

Duale getallen

Als we aannemen dat f duaal-differentieerbaar is in $z = x + \epsilon y \in U$ met afgeleide $f'(z) = a + \epsilon b$ en dat we voor C^1-functies het equivalent van een Taylor polynoom van graad 1 hebben, dan vinden we

$$\begin{aligned} f(z+w) = f(z) + f'(z)\cdot w + \cdots &= f(z) + (a+\epsilon b)\cdot(u+\epsilon v) + \cdots \\ &= f(z) + au + \epsilon(bu + av) + \cdots \ . \end{aligned}$$

Als we ook f splitsen in reëel en duaal deel $f = h + \epsilon k$ en het Taylor polynoom van graad 1 van een functie $U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ uitschrijven, dan vinden we

$$f(z+w) = f(z) + \frac{\partial h}{\partial x}(z)\cdot u + \frac{\partial h}{\partial y}(z)\cdot v + \epsilon \cdot \left(\frac{\partial k}{\partial x}(z)\cdot u + \frac{\partial k}{\partial y}(z)\cdot v\right) + \cdots$$

Vergelijken leert ons dat $\dfrac{\partial h}{\partial y} = 0$ en $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial k}{\partial y}$.

Duale getallen

Definitie. Zij $U \subset \mathbf{D} \cong \mathbf{R}^2$ een open convexe verzameling en zij $f : U \to \mathbf{D}$ een functie. f is $\mathbf{D}$-C^1 als er een continue functie $g : U \times U \to M(1 \times 1, \mathbf{D}) = \mathbf{D}$ bestaat zodanig dat

$$(\star) \qquad \forall z, w \in U : \qquad f(z) - f(w) = g(z,w) \cdot (z - w) \ .$$

Als we alles uitsplitsen in reëel en duaal deel: $z = x + \epsilon y$, $w = u + \epsilon v$, $f = h + \epsilon k$ en $g = p + \epsilon q$ en de matrix functie $\hat{g} : U \to M(2 \times 2, \mathbf{R})$ définieren door

$$\hat{g}(z,w) = \begin{pmatrix} p(z,w) & 0 \\ q(z,w) & p(z,w) \end{pmatrix} \ ,$$

dan kunnen we de vergelijking $(\star)$ schrijven als

$$\forall z, w \in U : \qquad \begin{pmatrix} h(z) \\ k(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h(w) \\ k(w) \end{pmatrix} = \hat{g}(z,w) \cdot (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}) \ .$$

Duale getallen

Definitie. Een (reële) 2×2 matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M(2 \times 2, \mathbf{R})$ is matrix-duaal als $a = d$ en $b = 0$.

Stelling. *Een functie $f : U \to \mathbf{D}$ is $\mathbf{D}$-C^1 dan en slechts dan als f $\mathbf{R}$-C^1 is en er een (matrix) functie $\hat{g}$ bestaat die matrix-duaal is.*

Dit is het geval dan en slechts dan als er een (matrix) functie $\hat{g}$ bestaat zodanig dat de diagonaalwaarden $\hat{g}(z, z)$ matrix-duaal zijn.

Super getallen

Zij V een reële vectorruimte, zij $\mathcal{A} = \bigwedge V = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^k V$ de uitwendige algebra van V en zij $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ de splitsing in even en oneven delen:

$$\mathcal{A}_0 = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^{2k} V \qquad \text{en} \qquad \mathcal{A}_1 = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^{2k+1} V\ .$$

Elementen van $\mathcal{A}_0$ heten even super getallen, die van $\mathcal{A}_1$ oneven super getallen.

De "natuurlijke" topologie op $\mathcal{A}$ is de grofste topologie waarvoor de projectie $\mathbf{B} : \mathcal{A} \to \bigwedge^0 V = \mathbf{R}$ continue is. Dat wil zeggen dat $U \subset \mathcal{A}$ open is dan en slechts dan als $U = \mathbf{B}^{-1}(O)$ voor een open verzameling $O \subset \mathbf{R}$.

Super getallen

Definitie. Een functie $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}$ is super-C^1 als er een continue functie $g : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}$ bestaat zodanig dat

$$\forall \xi, \eta \in \mathcal{A}_1 : \qquad f(\xi) - f(\eta) = g(\xi, \eta) \cdot (\xi - \eta) \ .$$

Nota Bene. De klassieke definitie van een afgeleide kan hier om twee redenen niet toegepast worden. In de eerste plaats omdat geen enkel element van $\mathcal{A}_1$ inverteerbaar is en dus het differentie quotient niet bestaat. En in de tweede plaats omdat de topologie niet Hausdorffs is zodat een unieke limiet niet bestaat.

Een super-C^1 functie die geen afgeleide heeft.

Stel dat V een eindig dimensionale vectorruimte is, dat $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}$ een super-C^1 functie is en dat $g : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}$ een continue functie is zodanig dat

$$\forall \xi, \eta \in \mathcal{A}_1 : \qquad f(\xi) - f(\eta) = g(\xi, \eta) \cdot (\xi - \eta) \ .$$

Dan zijn de diagonaalwaarden $g(\xi, \xi)$ niet eenduidig bepaald door f, want als $\omega \in \bigwedge^{\dim V} V \subset \mathcal{A}$ willekeurig is, dan voldoet $\hat{g}(\xi, \eta) = g(\xi, \eta) + \omega$ aan dezelfde conditie.

Differentiable functions without derivatives

Talk on the occasion of the retirement of Henk Pijls

Gijs Tuynman
Université de Lille I

june 20, 2008

An elementary proposition

Proposition. *Let* $U \subset \mathbf{R}^n$ *be a convex open set and let* $f : U \to \mathbf{R}^p$ *be a* C^1*-function. We define the function* $g : U \times U \to M(p \times n, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{np}$ *by*

$$g(x, y) = \int_0^1 f'(sx + (1-s)y)\,\mathrm{d}s \ .$$

Then g *is continuous and*

$$\forall x, y \in U \ : \qquad f(x) - f(y) = \int_0^1 f'(sx + (1-s)y) \cdot (x - y)\,\mathrm{d}s$$

$$= g(x, y) \cdot (x - y) \ .$$

And its reverse

Proposition. *Let* $U \subset \mathbf{R}^n$ *be a convex open set and let* $f : U \to \mathbf{R}^p$ *be an arbitrary function. Suppose there exists a continuous function* $g : U \times U \to M(p \times n, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{np}$ *such that*

$$\forall x, y \in U \ : \qquad f(x) - f(y) = g(x,y) \cdot (x - y) \ .$$

Then f *is a* C^1 *function and* $f'(x) = g(x,x)$.

And its reverse

Proposition. *Let* $U \subset \mathbf{R}^n$ *be a convex open set and let* $f : U \to \mathbf{R}^p$ *be an arbitrary function. Suppose there exists a continuous function* $g : U \times U \to M(p \times n, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{np}$ *such that*

$$\forall x, y \in U \ : \qquad f(x) - f(y) = g(x,y) \cdot (x - y) \ .$$

Then f *is a* C^1 *function and* $f'(x) = g(x,x)$.

Proof.

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - g(x,x) \cdot h\|}{\|h\|} = \frac{\|(\, g(x+h,x) - g(x,x)\,) \cdot h\|}{\|h\|}$$

$$\leq \frac{\|g(x+h,x) - g(x,x)\| \cdot \|h\|}{\|h\|} \quad \xrightarrow{\|h\| \to 0} \quad 0 \ .$$

An alternative definition

Definition. Let $U \subset \mathbf{R}^n$ be an open set and let $f : U \to \mathbf{R}^p$ be an arbitrary function. f is a C^1 function if there exists a continuous function $g : U \times U \to M(p \times n, \mathbf{R})$ such that

$$\forall x, y \in U : \qquad f(x) - f(y) = g(x, y) \cdot (x - y) \ .$$

Nota Bene. The function g is in general not uniquely determined by f, but the diagonal values $g(x, x)$ are uniquely determined by f: $g(x, x) = f'(x)$.

Going complex

(Alternative) Definition. Let $U \subset \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ be an open convex set and let $f : U \to \mathbf{C}$ be an arbitrary function. f is $\mathbf{C}$-C^1 if there exists a continuous function $g : U \times U \to M(1 \times 1, \mathbf{C}) = \mathbf{C}$ such that

$$(\star) \qquad \forall z, w \in U : \qquad f(z) - f(w) = g(z,w) \cdot (z - w) \ .$$

If we split all terms in their real and imaginary parts: $z = x + iy$, $w = u + iv$, $f = h + ik$ en $g = p + iq$ and if we define the matrix valued function $\hat{g} : U \to M(2 \times 2, \mathbf{R})$ by

$$\hat{g}(z,w) = \begin{pmatrix} p(z,w) & -q(z,w) \\ q(z,w) & p(z,w) \end{pmatrix} \ ,$$

then the equation $(\star)$ becomes

$$\forall z, w \in U : \qquad \begin{pmatrix} h(z) \\ k(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h(w) \\ k(w) \end{pmatrix} = \hat{g}(z,w) \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) \ .$$

Going complex

Definition. A (real) 2×2 matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbf{R})$ is matrix-complex if $a = d$ en $b = -c$.

Proposition. *A function $f : U \to \mathbf{C}$ is $\mathbf{C}$-C^1 if and only if f is $\mathbf{R}$-C^1 and if there exists a (matrix valued) function $\hat{g}$ which is matrix-complex*

This is the case if and only if there exists a (matrix valued) function $\hat{g}$ such that the diagonal values $\hat{g}(z, z)$ are matrix-complex.

Isometries

Let $so(3) \subset M(3 \times 3, \mathbf{R})$ be the set of all (3 times 3) anti-symmetric matrices. Then the map $j : \mathbf{R}^3 \longrightarrow so(3)$ defined by

$$j(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

is a bijection.

Proposition. *The map j has the following properties:*

$$\forall X, V \in \mathbf{R}^3 : \qquad j(X) \cdot V = X \wedge V \qquad \textit{en}$$

$$[\, j(X), j(V)\,] \equiv j(X) \cdot j(V) - j(V) \cdot j(X) = j(X \wedge V)$$

where $X \wedge V$ denotes the exterior product (vector product) of X and V.

Isometries

The group $E(3)$ of euclidean transformations of $\mathbf{R}^3$ is the semi-direct product of $SO(3)$ and $\mathbf{R}^3$, which can be seen as a subgroup of $GL(4 \times 4, \mathbf{R})$:

$$(A, V) \in SO(3) \times \mathbf{R}^3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

The Lie algebra of $E(3)$ is the semi-direct product of $so(3)$ and $\mathbf{R}^3$, which can be seen as a subalgebra of $M(4 \times 4, \mathbf{R})$ with commutator

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} j(X) & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j(\hat{X}) & \hat{V} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} j(X \wedge \hat{X}) & j(X) \cdot \hat{V} - j(\hat{X}) \cdot V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} j(X \wedge \hat{X}) & X \wedge \hat{V} + V \wedge \hat{X} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Dual numbers

Definition. The set $\mathbf{D}$ of dual numbers is the vector space $\mathbf{R}^2 \cong \mathbf{R} \oplus \epsilon\mathbf{R}$ equipped with the multiplication defined by $\epsilon^2 = 0$:

$$(a + \epsilon b) \cdot (x + \epsilon y) = ax + \epsilon(ay + bx) \ .$$

Proposition. *If we identify the Lie algebra of $E(3)$ with $\mathbf{D}^3 \cong \mathbf{R}^6$ according to*

$$\begin{pmatrix} j(X) & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow X + \epsilon V \ ,$$

then we have the following correspondence for the commutator:

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{pmatrix} j(X) & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j(\hat{X}) & \hat{V} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] & = & \begin{pmatrix} j(X \wedge \hat{X}) & X \wedge \hat{V} + V \wedge \hat{X} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \left[X + \epsilon V, \hat{X} + \epsilon \hat{V} \right] & = & (X + \epsilon V) \wedge (\hat{X} + \epsilon \hat{V}) \end{array} .$$

Dual numbers

The usual definition of C^1 functions on $\mathbf{D}$. Let $U \subset \mathbf{D}$ be an open convex set. A function $f : U \to \mathbf{D}$ is $\mathbf{D}$-C^1 if f, seen as a function $U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, is a $\mathbf{R}$-C^1 function satisfying the equations

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z) = \frac{\partial \operatorname{Du} f}{\partial y}(z) \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(z) = 0 \ .$$

Nota Bene. The classical definition of a derivative

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

can not be used for dual numbers because $\mathbf{D}$ contains zero divisors and hence the difference quotient does not (always) exist.

Dual numbers

If we suppose that f is dual-differentiable at $z = x + \epsilon y \in U$ with derivative $f'(z) = a + \epsilon b$ and that we have the equivalent of the Taylor polynomial of degree 1, then we find

$$\begin{aligned} f(z+w) = f(z) + f'(z) \cdot w + \cdots &= f(z) + (a + \epsilon b) \cdot (u + \epsilon v) + \cdots \\ &= f(z) + au + \epsilon(bu + av) + \cdots \ . \end{aligned}$$

If we now split f in its real and dual part $f = h + \epsilon k$ and if we develop the Taylor polynomial of degree 1 of a function $U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, then we find

$$f(z+w) = f(z) + \frac{\partial h}{\partial x}(z) \cdot u + \frac{\partial h}{\partial y}(z) \cdot v + \epsilon \cdot \left(\frac{\partial k}{\partial x}(z) \cdot u + \frac{\partial k}{\partial y}(z) \cdot v \right) + \cdots$$

Comparison tells us that we have the equations $\dfrac{\partial h}{\partial y} = 0$ en $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial k}{\partial y}$.

Dual numbers

Definition. Let $U \subset \mathbf{D} \cong \mathbf{R}^2$ be a convex open set and let $f : U \to \mathbf{D}$ be a function. f is $\mathbf{D}$-C^1 if there exists a continuous function $g : U \times U \to M(1 \times 1, \mathbf{D}) = \mathbf{D}$ such that

$$(\star) \qquad \forall z, w \in U : \qquad f(z) - f(w) = g(z, w) \cdot (z - w) \; .$$

If we split all terms in their real and dual parts: $z = x + \epsilon y$, $w = u + \epsilon v$, $f = h + \epsilon k$ and $g = p + \epsilon q$, and if we define the matrix valued function $\hat{g} : U \to M(2 \times 2, \mathbf{R})$ by

$$\hat{g}(z, w) = \begin{pmatrix} p(z, w) & 0 \\ q(z, w) & p(z, w) \end{pmatrix} \; ,$$

then we can rewrite the equation $(\star)$ as

$$\forall z, w \in U : \qquad \begin{pmatrix} h(z) \\ k(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h(w) \\ k(w) \end{pmatrix} = \hat{g}(z, w) \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) \; .$$

Dual numbers

Definition. A (real) 2×2 matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M(2 \times 2, \mathbf{R})$ is matrix-dual if $a = d$ en $b = 0$.

Proposition. *A function $f : U \to \mathbf{D}$ is $\mathbf{D}$-C^1 if and only if f is $\mathbf{R}$-C^1 and if there exists a (matrix valued) function $\hat{g}$ which is matrix-dual.*

This is the case if and only if there exists a (matrix valued) function $\hat{g}$ such that the diagonal values $\hat{g}(z, z)$ are matrix-dual.

Super numbers

Let V be a vector space over $\mathbf{R}$, let $\mathcal{A} = \bigwedge V = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^k V$ be the exterior algebra of V and let $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ be the decomposition into even and odd parts:

$$\mathcal{A}_0 = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^{2k} V \qquad \text{and} \qquad \mathcal{A}_1 = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^{2k+1} V \ .$$

Elements of $\mathcal{A}_0$ are called even super numbers and those of $\mathcal{A}_1$ odd super numbers.

The "natural" topology on $\mathcal{A}$ is the coarsest topology for which the projection $\mathbf{B} : \mathcal{A} \to \bigwedge^0 V = \mathbf{R}$ is continuous, i.e., $U \subset \mathcal{A}$ is open if and only if $U = \mathbf{B}^{-1}(O)$ for some open set $O \subset \mathbf{R}$.

Super numbers

Definition. A function $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}$ is super-C^1 if there exists a continuous function $g : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}$ such that

$$\forall \xi, \eta \in \mathcal{A}_1 : \qquad f(\xi) - f(\eta) = g(\xi, \eta) \cdot (\xi - \eta) \ .$$

Nota Bene. The classical definition of a derivative can not be applied here for two reasons. In the first place because no element of $\mathcal{A}_1$ is invertible and thus the difference quotient does not exist. And secondly because the topology is not separable, so there does not exist a unique limit.

A super-C^1 function without a derivative.

Suppose V is a finite dimensional vector space, suppose $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}$ is super-C^1 and suppose that $g : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}$ is a continuous function such that

$$\forall \xi, \eta \in \mathcal{A}_1 : \qquad f(\xi) - f(\eta) = g(\xi, \eta) \cdot (\xi - \eta) \ .$$

Then the diagonal values $g(\xi, \xi)$ are not uniquely determined by f, because for an arbitrary $\omega \in \bigwedge^{\dim V} V \subset \mathcal{A}$ the function $\hat{g}(\xi, \eta) = g(\xi, \eta) + \omega$ satisfies the same conditions.

Fonctions dérivables sans dérivées

Exposé à l'occasion du départ à la retraite de Henk Pijls

Gijs Tuynman
Université de Lille I

20 juin 2008

Une proposition élémentaire

Proposition. *Soit* $U \subset \mathbf{R}^n$ *un ouvert convexe et soit* $f : U \to \mathbf{R}^p$ *une fonction de classe* C^1*. Si on définit la fonction* $g : U \times U \to M(p \times n, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{np}$ *par*

$$g(x,y) = \int_0^1 f'(sx + (1-s)y)\,\mathrm{d}s \ ,$$

alors g *est continue et*

$$\forall x, y \in U \ \ : \qquad f(x) - f(y) = \int_0^1 f'(sx + (1-s)y) \cdot (x-y)\,\mathrm{d}s$$

$$= g(x,y) \cdot (x-y) \ .$$

Et sa réciproque

Proposition. *Soit* $U \subset \mathbf{R}^n$ *un ouvert convexe et soit* $f : U \to \mathbf{R}^p$ *une fonction arbitraire. S'il existe une fonction continue* $g : U \times U \to M(p \times n, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{np}$ *telle que*

$$\forall x, y \in U \ \ : \qquad f(x) - f(y) = g(x,y) \cdot (x - y) \ ,$$

alors f *est de classe* C^1 *et* $f'(x) = g(x,x)$.

Et sa réciproque

Proposition. *Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert convexe et soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une fonction arbitraire. S'il existe une fonction continue $g : U \times U \to M(p \times n, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{np}$ telle que*

$$\forall x, y \in U \quad : \qquad f(x) - f(y) = g(x,y) \cdot (x - y) \ ,$$

alors f est de classe C^1 et $f'(x) = g(x,x)$.

Preuve.

$$\frac{\| f(x+h) - f(x) - g(x,x) \cdot h \|}{\|h\|} = \frac{\| (\, g(x+h,x) - g(x,x)\,) \cdot h \|}{\|h\|}$$

$$\leq \frac{\| g(x+h,x) - g(x,x) \| \cdot \|h\|}{\|h\|} \quad \xrightarrow{\|h\| \to 0} \quad 0 \ .$$

Une définition alternative

Définition. Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert et soit $f : U \to \mathbf{R}^p$ une fonction arbitraire. f est une fonction de classe C^1 s'il existe une fonction continue $g : U \times U \to M(p \times N, \mathbf{R})$ telle que

$$\forall x, y \in U : \qquad f(x) - f(y) = g(x, y) \cdot (x - y)\ .$$

Nota Bene. La fonction g n'est en général pas déterminé d'une façon unique par la fonction f. Par contre, les valeurs sur le diagonal $g(x, x)$ sont déterminées complètement par f : $g(x, x) = f'(x)$.

Et en complexe

Définition (alternative). Soit $U \subset \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ un ouvert convexe et soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction arbitraire. f est de classe $\mathbf{C}$-C^1 s'il existe une fonction continue $g : U \times U \to M(1 \times 1, \mathbf{C}) = \mathbf{C}$ telle que

$$(\star) \qquad \forall z, w \in U : \qquad f(z) - f(w) = g(z,w) \cdot (z - w) \ .$$

Si on sépare partout en partie réelle et partie complexe : $z = x + iy$, $w = u + iv$, $f = h + ik$ et $g = p + iq$ et si on définit la fonction (à valeurs matricielles) $\hat{g} : U \to M(2 \times 2, \mathbf{R})$ par

$$\hat{g}(z,w) = \begin{pmatrix} p(z,w) & -q(z,w) \\ q(z,w) & p(z,w) \end{pmatrix} \ ,$$

alors on peut réécrire l'équation $(\star)$ comme

$$\forall z, w \in U : \qquad \begin{pmatrix} h(z) \\ k(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h(w) \\ k(w) \end{pmatrix} = \hat{g}(z,w) \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) \ .$$

Et en complexe

Définition. Une matrice (réelle) 2×2 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M(2\times 2, \mathbf{R})$ est matrice-complexe si $a = d$ en $b = -c$.

Proposition. *Une fonction $f : U \to \mathbf{C}$ est de classe $\mathbf{C}$-C^1 si et seulement si f est de classe $\mathbf{R}$-C^1 et s'il existe une fonction (à valeurs matricielles) $\hat{g}$ qui est matrice-complexe.*

Ceci est le cas si et seulement s'il existe une fonction (à valeurs matricielles) $\hat{g}$ telle que les valeurs diagonales $\hat{g}(z, z)$ sont matrice-complexe.

Isométries

Soit $so(3) \subset M(3 \times 3, \mathbf{R})$ l'ensemble de tous les matrices anti-symétriques (3×3). Alors l'application $j : \mathbf{R}^3 \to so(3)$ définie par

$$j(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

est une bijection.

Proposition. *L'application j a les propriétés suivantes :*

$$\forall X, V \in \mathbf{R}^3 : \qquad j(X) \cdot V = X \wedge V \qquad \textit{et}$$

$$[\, j(X), j(V)\,] \equiv j(X) \cdot j(V) - j(V) \cdot j(X) = j(X \wedge V)$$

où $X \wedge V$ désigne le produit extérieur (produit vectoriel) des vecteurs X en V.

Isométries

Le groupe $E(3)$ des transformations euclidiens de $\mathbf{R}^3$ est le produit semi-direct de $SO(3)$ et $\mathbf{R}^3$; on peut le réaliser comme un sous-groupe de $GL(4 \times 4, \mathbf{R})$ par

$$(A, V) \in SO(3) \times \mathbf{R}^3 \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

L'algèbre de Lie de $E(3)$ est le produit semi-direct de $so(3)$ et $\mathbf{R}^3$; vu comme sous-algèbre de $M(4 \times 4, \mathbf{R})$ le commutateur s'écrit comme

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} j(X) & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j(\hat{X}) & \hat{V} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} j(X \wedge \hat{X}) & j(X) \cdot \hat{V} - j(\hat{X}) \cdot V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} j(X \wedge \hat{X}) & X \wedge \hat{V} + V \wedge \hat{X} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Les nombres duaux

Définition. L'ensemble $\mathbf{D}$ des nombres duaux est l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2 \cong \mathbf{R} \oplus \epsilon \mathbf{R}$ muni de la multiplication définie par $\epsilon^2 = 0$:

$$(a + \epsilon b) \cdot (x + \epsilon y) = ax + \epsilon(ay + bx) \ .$$

Proposition. *Si on identifie l'algèbre de Lie de* $E(3)$ *avec* $\mathbf{D}^3 \cong \mathbf{R}^6$ *par*

$$\begin{pmatrix} j(X) & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow X + \epsilon V \ ,$$

alors on obtient l'identification suivante pour le commutateur :

$$\begin{array}{ccc} \left[\begin{pmatrix} j(X) & V \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j(\hat{X}) & \hat{V} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] & = & \begin{pmatrix} j(X \wedge \hat{X}) & X \wedge \hat{V} + V \wedge \hat{X} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \left[X + \epsilon V, \hat{X} + \epsilon \hat{V} \right] & = & (X + \epsilon V) \wedge (\hat{X} + \epsilon \hat{V}) \end{array} .$$

Les nombres duaux

La définition usuelle d'une fonction de classe C^1 sur D. Soit $U \subset \mathbf{D}$ un ouvert convexe. Une fonction $f : U \to \mathbf{D}$ est de classe $\mathbf{D}$-C^1 si f, vu comme fonction $U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, est de classe $\mathbf{R}$-C^1 et satisfait aux équations

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(z) = \frac{\partial \operatorname{Du} f}{\partial y}(z) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(z) = 0 \ .$$

Nota Bene. La définition classique de la dérivée

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

ne peut pas être utilisé ici car $\mathbf{D}$ contient des diviseurs de zéro et donc le quotient n'est pas (toujours) bien défini.

Les nombres duaux

Si on suppose que f est dérivable au sens dual au point $z = x + \epsilon y \in U$ avec dérivée $f'(z) = a + \epsilon b$ et si on suppose qu'on dispose de l'équivalent du polynôme de Taylor de degré 1, alors on trouve

$$\begin{aligned} f(z+w) = f(z) + f'(z) \cdot w + \cdots &= f(z) + (a + \epsilon b) \cdot (u + \epsilon v) + \cdots \\ &= f(z) + au + \epsilon(bu + av) + \cdots \ . \end{aligned}$$

Si on sépare f en partie réelle et partie duale $f = h + \epsilon k$ et si on écrit le polynôme de Taylor de degré 1 pour une fonction $U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, alors on trouve

$$f(z+w) = f(z) + \frac{\partial h}{\partial x}(z) \cdot u + \frac{\partial h}{\partial y}(z) \cdot v + \epsilon \cdot \left(\frac{\partial k}{\partial x}(z) \cdot u + \frac{\partial k}{\partial y}(z) \cdot v \right) + \cdots$$

Comparaison nous dit qu'on a les égalités $\dfrac{\partial h}{\partial y} = 0$ en $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial k}{\partial y}$.

Les nombres duaux

Définition. Soit $U \subset \mathbf{D} \cong \mathbf{R}^2$ un ouvert convexe et soit $f : U \to \mathbf{D}$ une fonction. f est de classe $\mathbf{D}$-C^1 s'il existe une fonction continue $g : U \times U \to M(1\times 1, \mathbf{D}) = \mathbf{D}$ telle que

$$(\star) \qquad \forall z, w \in U : \qquad f(z) - f(w) = g(z,w) \cdot (z-w)\ .$$

Si on sépare partout en partie réelle et partie duale : $z = x + \epsilon y$, $w = u + \epsilon v$, $f = h + \epsilon k$ et $g = p + \epsilon q$ et si on définit la fonction (à valeurs matricielles) $\hat{g} : U \to M(2\times 2, \mathbf{R})$ par

$$\hat{g}(z,w) = \begin{pmatrix} p(z,w) & 0 \\ q(z,w) & p(z,w) \end{pmatrix}\ ,$$

alors on peut réécrire les équations $(\star)$ comme

$$\forall z, w \in U : \qquad \begin{pmatrix} h(z) \\ k(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h(w) \\ k(w) \end{pmatrix} = \hat{g}(z,w) \cdot (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix})\ .$$

Les nombres duaux

Definitie. Une matrice (réelle) 2×2 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M(2 \times 2, \mathbf{R})$ est matrice-duale si $a = d$ en $b = 0$.

Proposition. *Une fonction $f : U \to \mathbf{D}$ est de classe $\mathbf{D}$-C^1 si et seulement si f est de classe $\mathbf{R}$-C^1 et s'il existe une fonction (à valeurs matricielles) $\hat{g}$ qui est matrice-duale.*

Ceci est le cas si et seulement s'il existe une fonction (à valeurs matricielles) $\hat{g}$ telle que les valeurs diagonales $\hat{g}(z, z)$ sont matrice-duales.

Les super nombres

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, soit $\mathcal{A} = \bigwedge V = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^k V$ l'algèbre extérieure de V et soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ la décomposition en partie paire et impaire :

$$\mathcal{A}_0 = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^{2k} V \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A}_1 = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^{2k+1} V \ .$$

Les éléments de $\mathcal{A}_0$ sont appelés des super nombres pairs, ceux de $\mathcal{A}_1$ sont appelés des super nombres impairs.

La topologie "naturelle" sur $\mathcal{A}$ est la topologie la moins fine telle que la projection $\mathbf{B} : \mathcal{A} \to \bigwedge^0 V = \mathbf{R}$ est continue. Autrement dit, $U \subset \mathcal{A}$ est ouvert si et seulement si $U = \mathbf{B}^{-1}(O)$ pour un ouvert $O \subset \mathbf{R}$.

Les super nombres

Définition. Une fonction $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}$ est de classe super-C^1 s'il existe une fonction continue $g : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}$ telle que

$$\forall \xi, \eta \in \mathcal{A}_1 : \qquad f(\xi) - f(\eta) = g(\xi, \eta) \cdot (\xi - \eta) \ .$$

Nota Bene. La définition classique d'une dérivée ne peut pas être utilisé ici pour deux raisons. D'abord parce que aucun élément de $\mathcal{A}_1$ est inversible et donc le quotient n'existe pas. Et ensuite parce que la topologie n'est pas séparée, ce qui empêche l'existence d'une limite unique.

Une fonction de classe super-C^1 qui n'a pas de dérivée.

Supposons que V est de dimension finie, que $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}$ est de classe super-C^1 et que $g : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}$ est une fonction continue telle que

$$\forall \xi, \eta \in \mathcal{A}_1 : \qquad f(\xi) - f(\eta) = g(\xi, \eta) \cdot (\xi - \eta) \ .$$

Alors les valeurs diagonales $g(\xi, \xi)$ ne sont pas déterminées d'une façon unique par f, car si $\omega \in \bigwedge^{\dim V} V \subset \mathcal{A}$ est arbitraire, alors la fonction $\hat{g}(\xi, \eta) = g(\xi, \eta) + \omega$ satisfait les mêmes conditions.