De Korteweg-de Vries vergelijking in wezen en verschijning

De onthulling van de portretten van de wiskundigen Korteweg en de Vries in het K.d.V.-Instituut van de Universiteit van Amsterdam is mede aanleiding tot deze historische verhandeling, een uitgewerkte versie van de lezing, die de auteur ter gelegenheid van bovengenoemd evenement heeft gegeven.

Eduard de Jager (em. Universiteit van Amsterdam)

Korteweg en de Vries hebben internationale bekendheid verworven wegens de naar hen genoemde "Korteweg-de Vries vergelijking" met behulp waarvan lange golven op ondiep water beschreven worden. Deze bekendheid ontstond echter pas zeventig jaar na de publicaties van Korteweg en de Vries; dit was het gevolg van de herontdekking van de K.d.V.-vergelijking door Zabusky en Kruskal [14] en van vele toepassingen [21].

In de mathematische literatuur wordt meestal naar een vereenvoudigde vorm van deze vergelijking gerefereerd, die echter in wezen niet verschilt van de formulering zoals gegeven in het proefschrift van de Vries uit 1894 [1] of het befaamde artikel van Korteweg en de Vries in de *Philosophical Magazine* uit 1895, [2]. Voor de ontstaansgeschiedenis van de K.d.V.-vergelijking moet men echter verder naar het verleden teruggaan, te beginnen met de experimenten van Scott Russell uit 1834, [3] en de daarna volgende theoretische onderzoekingen van voornamelijk Boussinesq, 1871–1877, [4]–[7], Rayleigh (Strutt, J.W.), 1876, [8] en St. Venant, 1885, [9]. Verschillende aspecten van het onderzoek van enerzijds Boussinesq en van anderzijds Korteweg-de Vries worden nader belicht, waarbij in het bijzonder aandacht wordt gegeven aan het meest toegankelijke artikel van Boussinesq [6] en het artikel uit de *Philosophical Magazine* van Korteweg en de Vries, [2]. Het zal blijken dat Boussinesq de eer toekomt als eerste een bevredigende wiskundige beschrijving van lange golven te hebben gegeven en daarmee ook eigenlijk de ontdekker te zijn van de K.d.V.-vergelijking, zij het in enigszins verhulde vorm; zie ook R. Pego, [10]. Voor vele historische details, latere ontwikkelingen inbegrepen, wordt de lezer verwezen naar A.C. Newell [11], R.K. Bullough [12], J.W. Miles [13], O. Darrigol [22] en KdV'95 [21].

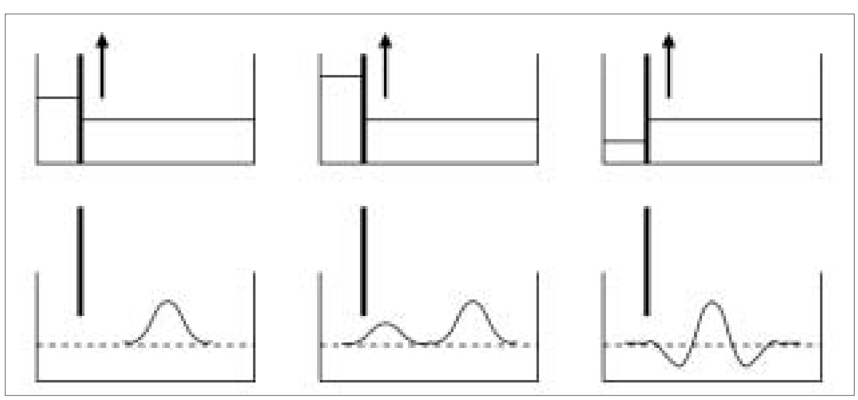
De probleemstelling

In 1834 reed de Schotse scheepsbouwkundige ingenieur John Scott Russell te paard langs het Union Canal dat Edinburgh met Glasgow verbindt. Hij volgde een trekschuit, door een span paarden met grote snelheid voortgetrokken; de schuit werd echter plotseling in zijn vaart gestuit, vermoedelijk door een of ander obstakel. Op dat moment ontwaarde de ingenieur een bijzonder verschijnsel: een mooie ronde stabiele golf, een *well defined heap of water*, maakte zich los van de boeg en verwijderde zich naar voren zonder van vorm te veranderen met een snelheid van ongeveer acht mijl per uur, ongeveer dertig voet lang en één à twee voet hoog. Hij volgde de golf op z'n paard en na een jacht van één à twee mijl verloor hij de *heap of water* in de windingen van het kanaal, [3].

Menig fysicus zou het verschijnsel niet geanalyseerd hebben en het laten voor wat het was. Zo niet Scott Russell, die in het schijnbaar "gewone" het bijzondere ontdekte. Hij ontwierp experimenten door lange golven op te wekken in lange ondiepe bakken gevuld met water en hij bestudeerde aldus het door hem waargenomen verschijnsel, in het bijzonder de vorm en de voortplantingssnelheid van de door hem ontdekte solitaire stabiele golf, die hij de *Wave of Translation* noemde; zie Figuur 1. Voor een uitgebreide historische studie van het werk van Scott Russell wordt de lezer verwezen naar het overzichtsartikel door R.K. Bullough [12].

In de negentiende eeuw bestond er in Engeland en Frankrijk reeds een rijke traditie in de mathematische beschrijving van hydrodynamische verschijnselen, met name van golfbewegingen in onsamendrukbare vloeistoffen zonder wrijving; bekende namen zijn o.a. Airy, Stokes, Rayleigh, Lamb, Lagrange, St Venant, Boussinesq.

De uitdaging van Scott Russell aan de wiskundigen het bestaan van een solitaire golf theoretisch te bevestigen "*to give an a priori demonstration a posteriori*", miste zijn uit-



Figuur 1. Ontleend aan M. Remoissenet [23]

werking niet. De mathematisch-fysische vraagstelling betreft, kort samengevat, het onderzoek naar de existentie van een stabiele golf, die zich zonder vormverandering voortplant.

In tegenstelling met de experimentele resultaten van Scott Russell was Airy van mening dat dit onmogelijk is: de golf zou gedurende zijn voortplanting noodzakelijkerwijze aan de voorkant steiler en aan de achterkant vlakker worden; hij werd daarbij ondersteund door Lamb (1879), Bassett (1888) en McCowan (1892), zie [1], [2]. Stokes had aanvankelijk wel een bezwaar omdat naar zijn inzicht de enige stabiele golf sinusoïdaal zou moeten zijn en dat de *well defined heap of water* derhalve onmogelijk is; later bekende Stokes dat hij zich hierin vergist had.

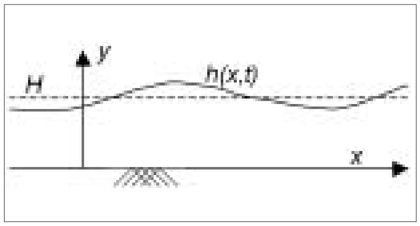
De door Scott Russell gevraagde *"a priori demonstration a posteriori"* werd inmiddels wel geleverd, eerst door Boussinesq [4]–[7] in 1871–1877, iets later door Rayleigh [8] in 1876 en tenslotte, om aan alle bovengenoemde controversen een einde te maken door Korteweg en de Vries in 1894, [1], [2]. Rayleigh gebruikte in zijn wiskundige analyse in wezen dezelfde methode als gebruikt door Boussinesq en later door Korteweg-de Vries, maar zijn verhandeling is minder uitgebreid en wordt daarom hier buiten beschouwing gelaten.

De vergelijkingen van Boussinesq en Korteweg-de Vries

De afleiding van enerzijds de vergelijking van Boussinesq en anderzijds die van Korteweg-de Vries hebben veel overeenkomsten. De auteurs beschouwen lange golven in een ondiep kanaal met rechthoekige doorsnede; de vloeistof wordt incompressibel en rotatievrij verondersteld, terwijl de wrijving, ook die langs de wand, verwaarloosd wordt.

Boussinesq

De coördinaten (x,y) geven de plaats van een vloeistofdeeltje ten tijde t, p is de druk in de vloeistof, ϱ de dichtheid en (u,v) de snelheidsvector. De hoogte van de vloeistof in rust wordt aangegeven door $y \quad H$ en het golfoppervlak door de functie $y \quad H \quad h(x,t)$ met $h(x,t)$ klein ten opzichte van H; tenslotte wordt aangenomen dat de golflengte groot is in vergelijking met H.



Figuur 2

Wegens de rotatievrijheid is de snelheidsvector de gradiënt van een scalarveld, de zogenaamde snelheidspotentiaal (x,y,t). Deze laatste voldoet wegens incompressibiliteit aan de vergelijking van Laplace en daarom kunnen de volgende ontwikkelingen opgeschreven worden:

$$\phi = \int f\,dx - \frac{1}{2}y^2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{24}y^4\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \dots \tag{1}$$

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = f - \frac{1}{2}y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{24}y^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \dots \tag{2}$$

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{6}y^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \frac{1}{120}y^5\frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + \dots \tag{3}$$

waarin f een nader te bepalen functie van x en t is, die langzaam met x verandert (de golven zijn lang in vergelijking met H). De randvoorwaarde $v \quad 0$ voor $y \quad 0$ is vervuld en de randvoorwaarden aan het golfoppervlak worden afgeleid uit de bewegingsvergelijkingen en de kinematische vergelijking.

Integratie van de eerstgenoemde geeft de vergelijking van Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} = -gy - \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \chi(t) \tag{4}$$

waarin g de versnelling van de zwaartekracht is en χ een nog willekeurige functie is, alleen afhankelijk van t. Als de constante atmosferische druk gelijk is aan p_0 dan geldt tevens

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + g(H + h - y) \tag{5}$$

en eliminatie van $p/$ geeft

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + gh = \chi(t) - gH - \frac{p_0}{\rho} =: \tilde{\chi}(t) \tag{6}$$

Tenslotte geldt onder de aanname dat de vloeistof in rust is voor x (of x) de volgende randvoorwaarde op het vloeistofoppervlak

$$\frac{\partial\phi_s}{\partial t} + \frac{1}{2}(u_s^2 + v_s^2) + gh = 0 \tag{7}$$

waar de suffix s aangeeft dat voor y de waarde $y \quad H \quad h(x,t)$ genomen is. Een tweede randvoorwaarde volgt uit de kinematische vergelijking

$$v_s = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_s\frac{\partial h}{\partial x} \tag{8}$$

Boussinesq weet vervolgens $_s$, u_s en v_s uit (7) en (8) te elimineren en komt aldus tot de naar hem genoemde vergelijking voor het golfoppervlak:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = gH\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + gH\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{3h^2}{2H} + \frac{H^2}{3}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right). \tag{9}$$

Deze vergelijking geeft reeds een betere benadering dan die gegeven door Lagrange in 1786, namelijk de "golfvergelijking",

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = gH\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \tag{10}$$

met algemene oplossing $h(x,t) \quad h_1(x \quad \sqrt{gH}\,t) \quad h_2(x \quad \sqrt{gH}\,t)$.

Boussinesq beperkt zich vervolgens tot golven die zich in de richting van de positieve x-as bewegen, d.w.z. in de Lagrange-benadering: $h(x,t) \quad h_1(x \quad \sqrt{gH}\,t)$, met voortplantingssnelheid $_1 \quad \sqrt{gH}$.

Een andere vorm voor de differentiaalvergelijking (9) wordt nu verkregen door gebruik te maken van de behoudswet

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\omega h) = \frac{\partial h}{\partial t} + \omega\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial\omega}{\partial x} = 0. \tag{11}$$

waarin de voortplantingssnelheid van de golf voorstelt. Na substitutie in (9) en integratie naar x onder de conditie dat h en zijn afgeleiden naar x tot nul naderen voor x ontstaat de vergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega h) + gH\,\frac{\partial}{\partial x}\left(h + \frac{3}{2}\frac{h^2}{H} + \frac{H^2}{3}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right) = 0. \qquad (12)$$

Deze uitdrukking kan met behulp van (11) geschreven worden als

$$\frac{\partial}{\partial t}(h\omega - \sqrt{gH}\,h) - \sqrt{gH}\,\frac{\partial}{\partial x}(h\omega - \sqrt{gH}\,h) + gH\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{3h^2}{2H} + \frac{H^2}{3}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right] = 0 \qquad (13)$$

Zonder de orde van de benadering te verstoren mag $/ t$ door $\sqrt{gH}$ $/ x$ vervangen worden en na integratie met betrekking tot x wordt de volgende belangrijke uitdrukking voor de voortplantingssnelheid verkregen:

$$\omega = \sqrt{gH} + \sqrt{gH}\left(\frac{3h}{4H} + \frac{H^2}{6h}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right). \qquad (14)$$

Deze betrekking voor levert na substitutie in de relatie

$$h\frac{dh}{dt} = h\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \omega\frac{\partial h}{\partial x}\right) = -h^2\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(h^2\omega) + 2\omega h\frac{\partial h}{\partial x} \qquad (15)$$

een alternatief voor (12), namelijk

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{H}}\,\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}\left[h^3\left\{1 + \frac{2}{3}H^3\frac{1}{h}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x}\right)\right\}\right]. \qquad (16)$$

ofwel na overgang op de nieuwe variabele door definitie van $h\,dx$ d :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{H}}\,\frac{\partial}{\partial \sigma}\left[h^3\left\{1 + \frac{2}{3}H^3\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial h}{\partial \sigma}\right)\right\}\right] \qquad (17)$$

waarin dh/dt $h/$ t $h/$ x de totale afgeleide is naar t.

Boussinesq substitueert (14) niet direct in (11); had hij dit wel gedaan dan was het resultaat

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sqrt{\frac{g}{H}}\,\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}Hh + \frac{1}{2}h^2 + \frac{H^3}{9}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right) = 0. \qquad (18)$$

Deze vergelijking is de KdV-vergelijking "avant la lettre" en verschilt slechts van de bekende KdV-vergelijking doordat de coördinaten *(x,t)* betrekking hebben op een vast coördinatenstelsel, terwijl de vergelijking, opgesteld door Korteweg en de Vries, beschreven wordt met behulp van een met de golf meebewegend coördinatenstelsel.

Boussinesq heeft in een voetnoot op p. 360 van zijn 680 pagina's dikke *Mémoire "Essai sur la théorie des eaux courantes"* [7] een nog andere afleiding van (18) gegeven zonder gebruik te maken van de voortplantingssnelheid . Deze laatste volgt dan echter ook eenvoudig uit (18) met behulp van (11); zie ook R. Pego [10].

Uit (14) blijkt tenslotte dat de voortplantingssnelheid van de golf, behorende bij onderscheiden punten van het golfoppervlak, verschillend is, hetgeen tot gevolg heeft dat het in de verwachting ligt dat de golf gedurende zijn voortplanting van vorm zou moeten veranderen, onderwerp van de discussie naar aanleiding van de ontdekking van de stationaire golf door Scott Russell.

Korteweg-de Vries

Korteweg en de Vries gaan via dezelfde theoretische overwegingen als die van Boussinesq uit van hetzelfde randwaardeprobleem zoals in de vorige paragraaf geformuleerd. Een verschil in behandeling bestaat onder meer hierin dat deze auteurs de oppervlaktespanning in rekening brengen, zodat de vergelijking van Bernoulli (6), na toepassing op het golfoppervlak, overgaat in

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial t} + \frac{1}{2}(u_s^2 + v_s^2) + gh - T\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \tilde{\chi}(t). \qquad (19)$$

Een tweede meer wezenlijk verschil bestaat hierin dat Korteweg en de Vries deze randvoorwaarde naar x differentiëren, waardoor de willekeurig te kiezen functie ˜(t) niet meer optreedt en de theorie ook toegepast kan worden op periodieke golfbewegingen, die niet uitsterven voor x ; zie de paragraaf betreffende de stationaire periodieke golf.

Een derde verschil in de afleiding van de differentiaalvergelijking betreft de voortplantingssnelheid als functie van $h(x,t)$. Een naar rechts lopende golf wordt bij benadering tot stilstand gebracht door aan de vloeistof een tegengestelde snelheid te geven of, wat op hetzelfde neerkomt, door een bewegend coördinatenstelsel in te voeren dat zich naar rechts verplaatst met een in eerste instantie uniforme snelheid $\sqrt{gH}$ en in een betere benadering met een snelheid $\sqrt{gH}$ $\sqrt{g/H}$, waarin een nog nader te bepalen constante is van dezelfde orde van grootte als $h(x,t)$. In dit bewegende assenstelsel

$$\xi = x - \left(\sqrt{gH} - \alpha\sqrt{\frac{g}{H}}\right)t, \quad \tau = -t \qquad (20)$$

wordt de differentiaalvergelijking voor het golfoppervlak door Korteweg en de Vries gegeven door

$$\frac{dh}{d\tau} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{H}}\,\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{2}h^2 + \frac{2}{3}\alpha h + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2}\right), \qquad (21)$$

waarin de parameter gedefinieerd is door

$$\sigma = \frac{1}{3}H^3 - \frac{TH}{\rho g} \qquad (22)$$

met T de oppervlaktespanning in het golfoppervlak, die door Boussinesq niet in acht werd genomen. De vergelijking (21) is de oorspronkelijke KdV-vergelijking, zoals deze voor het eerst in het proefschrift van de Vries verschenen is. Deze vergelijking met T 0 is gelijkwaardig met (18) en kan hieruit worden afgeleid door de transformatie (20) hierin te substitueren.

De solitaire lange golf

Onder de veronderstelling dat een solitaire golf bestaat is het wegens de equivalentie van de vergelijkingen (18) en (21) vanzelfsprekend dat de beide theorieën eenzelfde uitdrukking geven voor het golfoppervlak in stationaire toestand. Voor een dergelijke golf bezitten alle punten van het oppervlak dezelfde constante voortplantingssnelheid en derhalve moet constant zijn.

Uit (14) volgt dan met behulp van $\sqrt{gH}$ const :$\sqrt{gH}$ $\frac{1}{2}\sqrt{g/H}\,h_1$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{3h}{2H^3}(2h_1 - 3h). \tag{23}$$

Integratie onder de expliciete veronderstelling dat h 0 en $h/\ x$ 0 voor x geeft

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 = \frac{3}{H^3} h^2(h_1 - h) \tag{24}$$

en de positieve oplossing wordt

$$h(x,t) = h_1 \operatorname{sech}^2\{\sqrt{\frac{3h_1}{4H^3}}(x-\omega t)\} \tag{25}$$

met

$$\omega = \sqrt{gH} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{H}}\, h_1. \tag{26}$$

Uit (24) volgt h_1 $h(x,t)$ en h_1 is de hoogte van de golf; verder concludeert men uit (26) dat de golfsnelheid groter is naarmate de golf hoger is. Dit betekent dat bij het optreden van verscheidene separate solitaire stationaire golven van de gedaante (25) de hogere golven de lagere golven zullen inhalen, indien bij een begintoestand de hogere golven achter de lagere gelegen zijn. Dit geschiedt zonder vormverandering zodat een rij separate golven te vergelijken is met een rij rollende knikkers, waarbij de snellere hun impuls na botsing overdragen aan de langzamere. Dit is de reden waarom de ontdekkers Zabusky en Kruskal dit soort solitaire golven "solitonen" genoemd hebben; [14]. Voor een expliciete berekening zie [15], II, 3.5. Het resultaat (25)–(26) werd ook door Rayleigh [8] afgeleid; de prioriteit schrijft hij echter toe aan Boussinesq [12].

Korteweg en de Vries beschikken niet over een expliciete formule voor de golfsnelheid die van $h(x,t)$ afhangt. Voor een stationaire golf in het meebewegende coördinatenstelsel (20) geldt echter $h/$ 0 en dus volgens (21):

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{2}h^2 + \frac{2}{3}\alpha h + \frac{1}{3}\sigma\frac{d^2h}{d\xi^2}\right) = 0, \tag{27}$$

waarin de nog onbekende correctie van de voortplantingssnelheid $\sqrt{gH}$ voorstelt. Integratie onder de voorwaarden $h, dh/d\ , d^2h/d\ ^2$ 0 voor geeft

$$\frac{dh}{d\xi} = \pm\sqrt{-\frac{h^2(h+2\alpha)}{\sigma}}. \tag{28}$$

Korteweg en de Vries onderscheiden de twee gevallen 0 en 0; wij beperken ons hier tot het geval 0 en dan geldt 2 negatief. Bij de keuze 2 h_2 en met h_2 de golfhoogte, krijgen we

$$h(\xi) = h_2 \operatorname{sech}^2(\sqrt{\frac{h_2}{4\sigma}}\,\xi). \tag{29}$$

In het geval T 0 wordt $\frac{1}{3}H^3$ en (29) gaat over in

$$h(\xi) = h_2 \operatorname{sech}^2(\sqrt{\frac{3h_2}{4H^3}}\,\xi), \tag{30}$$

hetgeen overeenkomt met het resultaat (25) van Boussinesq. Ook de golfsnelheid komt overeen met (26), immers volgens (20) is

$$\omega = \sqrt{gH} - \alpha\sqrt{\frac{g}{H}} = \sqrt{gH} + \frac{1}{2}h_2\sqrt{\frac{g}{H}}. \tag{31}$$

Deze benadering van de golfsnelheid, waarin de formule van Lagrange verbeterd wordt, werd reeds in 1844 door Scott Russell experimenteel geverifieerd. Korteweg en de Vries beschouwen ook solitaire golven met negatieve amplitudo en tonen eenvoudig aan dat deze mogelijk zijn voor H $\sqrt{3T/(\ g)}$, d.w.z. voor water van ongeveer H $1/2$ cm.

De periodieke stationaire golf

Het stationaire golfoppervlak voldoet volgens (27) aan de vergelijking

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{2}h^2 + \frac{2}{3}\alpha h + \frac{1}{3}\sigma\frac{d^2h}{d\xi^2}\right) = 0. \tag{32}$$

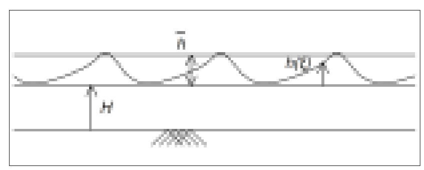
In de theorie van Korteweg en de Vries is voor de geldigheid van deze vergelijking niet noodzakelijk dat $h, dh/d\ , d^2h/d\ ^2$ 0 voor . Zij laten deze aanname dan ook vallen. Tweemaal integreren van (32) geeft achtereenvolgens

$$c_1 + \frac{1}{2}h^2 + \frac{2}{3}\alpha h + \frac{1}{3}\sigma\frac{d^2h}{d\xi^2} = 0 \tag{33}$$

en

$$c_2 + 6c_1 h + h^3 + 2\alpha h^2 + \sigma\left(\frac{dh}{d\xi}\right)^2 = 0, \tag{34}$$

met c_1 en c_2 integratieconstanten. Onder de aanname dat de y-coördinaat van het laagste punt van het golfoppervlak de positieve waarde H heeft, geldt voor het stationaire golfoppervlak y H $h(\ )$ met dh/d 0 en $d^2h/d\ ^2$ 0 voor h 0 en dus c_2 0 en c_1 0 als we verder aannemen 0.



Figuur 3

Derhalve bezit de vergelijking ^{2} 2 $6c_1$ 0 een positieve wortel $\bar{h}$ en een negatieve wortel k en (34) wordt

$$\frac{dh}{d\xi} = \pm\sqrt{\frac{1}{\sigma}h(\bar{h}-h)(h+k)},\quad \bar{h}>0,\quad k>0. \tag{35}$$

Met behulp van de substitutie h $\bar{h}\cos^2$ krijgen we de periodieke oplossing

$$h(\xi) = \bar{h}\,\mathrm{cn}^2(\sqrt{\frac{\bar{h}+k}{4\sigma}}\,\xi) \tag{36}$$

waarin cn de elliptische functie van Jacobi voorstelt met modulus M $\bar{h}/(\bar{h}$ $k)$ en periode

$$4K \quad 4\int_0^1 (1\quad t^2)^{1/2}(1\quad M^2t^2)^{1/2}\,dt.$$

Korteweg en de Vries noemden dit soort door hen ontdekte golven "cnoïdale golven" en het golfoppervlak is een trein periodieke golven met golflengte $4K\sqrt{\ /(\bar{h}\ \ k)}$. Voor k 0 en M 1 wordt de golflengte oneindig en men krijgt de solitaire stationaire golf (29); voor k en M 0 resulteert bij benadering de sinusoïdale golf

$$h(\ )\quad \bar{h}\cos^2$$

$$\bar{h}\cos^2\ \sqrt{(\bar{h}\ \ k)/(4\ )}$$

met afnemende golflengte bij toenemende k, overeenkomend met een resultaat van Stokes, zie [13]. In dit geval kan $h(\ )$ ontwikkeld worden in een snel convergerende Fourierreeks. Dit was dan ook de reden waarom gedacht werd dat de enige permanente stabiele golf van sinusoïdaal type zou moeten zijn, waarin de niet-lineaire termen een modificatie van de golfvorm geven; Stokes heeft zijn vergissing later gemerkt en een rectificatie gegeven. Ook Boussinesq heeft in zijn *Mémoire* [7, pp 390-396] het algemene geval van de periodieke stationaire golf behandeld, waar hij echter uitgaat van een ander stel vergelijkingen; zie ook [9]. Het resultaat is in wezen (35) maar een expliciete oplossing wordt niet gegeven.

De stabiliteit van de solitaire stationaire golf

Het doel van het onderzoek van Boussinesq en Korteweg-de Vries was de bestudering van het gedrag van lange golven op het oppervlak van een vloeistof in een ondiep kanaal. In het algemeen vindt gedurende de voortplanting van de golf vormverandering plaats, maar in het geval van een stationaire golf treedt per definitie geen vormverandering op en dus is de vraag gewettigd waarom de solitaire stationaire golf een uitzondering op de regel is. Voor de existentie van deze golf is een nader onderzoek vereist naar de "parameters", die het stabiele gedrag nader bepalen. Gemakshalve noemen we dit het stabiliteitsonderzoek en dit is door Boussinesq en door Korteweg-de Vries op geheel verschillende wijze verricht. Het optreden in (12) en (21) van de niet-lineaire term $h\,dh/d$ en de dispersieterm $\frac{1}{3}\ \ {}^3h/\ \ {}^3$ wijst reeds op een mogelijke balans die de stabiliteit van de golf bevordert.

Stabiliteit volgens Korteweg en de Vries

Korteweg en de Vries beschouwen een golf van de gedaante

$$h(\xi,0)=\bar{h}\,\mathrm{sech}^2(p\xi)\,, \tag{37}$$

waarin $\bar{h}$ en p vooralsnog willekeurige constanten zijn. De evolutie van $h(\ ,\ )$ wordt bepaald door de vergelijking (21) en substitutie van (37) geeft een vergelijking voor het golfoppervlak $h(\ ,\ )$ als functie van en . Het resultaat is

$$\frac{\ \ h}{\ }\quad 3\sqrt{\frac{g}{H}}\,\bar{h}p(4\ \ p^2\ \ \bar{h})$$

$$\mathrm{sech}^2(p\ )\ \ \frac{2}{3}\frac{2\ \ p^2}{4\ \ p^2\ \ \bar{h}}$$

$$\mathrm{sech}^2(p\ )\tanh(p\ ). \tag{38}$$

Bij de keuze van en p zodanig dat $2(\ \ \ 2\ \ p^2\ )\ \ 3(4\ \ p^2\ \ \bar{h})$ ofwel $4\ \ p^2\ \ \frac{3}{2}\bar{h}$, gaat (38) over in

$$\frac{\partial h}{\partial\tau}=-3\sqrt{\frac{g}{H}}\,p\bar{h}\,(4\sigma p^2-\bar{h})\,\mathrm{sech}^2(p\xi)\tanh^3(p\xi)\,. \tag{39}$$

De combinatie $p\ \ \sqrt{\bar{h}/(4\ \ )}$ en dus $\frac{1}{2}\bar{h}$ maakt $h/\ \ \ 0$ en we krijgen de stationaire golf (29).

Een nadere numerieke analyse van (39) met behulp van Tabel IX uit de *Traité des fonctions elliptiques (II)* van Legendre [16], levert dat de golf gedurende zijn beweging naar rechts aan de voorzijde steiler en aan de achterzijde vlakker wordt als $\bar{h}\ \ 4\ \ p^2$ en omgekeerd aan de achterzijde steiler en aan de voorkant vlakker als $\bar{h}\ \ 4\ \ p^2$. Dit resultaat ontkracht de bewering van o.a. Airy, dat de golf gedurende zijn voortplanting altijd aan de voorzijde steiler en aan de achterkant vlakker wordt. Deze opvatting is begrijpelijk als men bedenkt dat de KdV-vergelijking bij verwaarlozing van de dispersieterm $\frac{1}{3}\ \ {}^3h/\ \ {}^3$ gereduceerd kan worden tot $h/\ \ \ h\ h/\ \ \ 0$, waaruit volgt dat punten op het golfoppervlak zich sneller naar rechts bewegen naarmate zij hoger gelegen zijn. De dispersieterm $\frac{1}{3}\ \ {}^3h/\ \ {}^3$ en de niet-lineaire term $h\,dh/d$ compenseren elkaar in een stationaire golf.

Stabiliteit volgens Boussinesq

Om de stabiliteit van de solitaire stationaire golf te onderzoeken beschouwt Boussinesq alle golven, zowel stationaire als niet-stationaire met dezelfde energie, waarvoor geldt

$$gE\quad \frac{1}{2}\ g\ \ h^2dx$$

$$\frac{1}{2}\ \ dx\int_0^{H\ \ h}(u^2\ \ \ v^2)\,dy$$

$$g\ \ h^2dx. \tag{40}$$

Hiernaast voert hij in de functionaal

$$M=\int_{-\infty}^{\infty}\{\,(\frac{\partial h}{\partial x})^2-\frac{3}{H^3}h^3\,\}\,dx\,, \tag{41}$$

het *moment de stabilité* genoemd. Uit een eenvoudige berekening volgt dat M een behouden grootheid is, d.w.z. $dM/dt\ \ \ 0$ voor elke golf die aan (12) en (14) voldoet. Met behulp van de transformatie

$$\varepsilon=\int_x^{\infty}h^2dx$$

gaat (41) over in

$$M=\int_0^E\{(\frac{1}{4}\frac{\partial h^2}{\partial\varepsilon})^2-3\frac{h}{H^3}\}\,d\varepsilon\,.$$

Zonder zich op de formule van Euler-Lagrange te beroepen, maar door voor dit speciale geval de bekende afleiding te geven, bepaalt Boussinesq vervolgens de vergelijking voor $h(\ ,t)$ zodanig dat M een extreme waarde bereikt. Dit extremum wordt gevonden indien $h(\ ,t)$ voldoet aan de vergelijking

$$1+\frac{2H^3}{3}h\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(h\frac{\partial h}{\partial\varepsilon})=0.$$

Met $d \quad h^2 dx \quad h\,d$ volgt (17) met $dh/dt \quad 0$; derhalve geeft alleen de stationaire solitaire golf bij gegeven totale energie E een extreme waarde aan M. Variatie van h met $\quad h$ resulteert in $\quad M \quad 0$ voor alle $h(x,t)$ en dus is M onder alle golven met gegeven energie een minimum indien de corresponderende golf $h(x,t)$ stationair is. Omdat met M ook $\quad M$ onafhankelijk is van t volgt onmiddellijk de stabiliteit.

Dit fraaie resultaat verdient commentaar in het bijzonder omdat M een aantal eigenschappen bezit van de Hamiltonfunctionaal, die optreedt in de beschrijving van de Korteweg-de Vries vergelijking als een Hamiltonsysteem. De theorie van continue Hamiltonsystemen is van vrij recente datum en de eerste fundamentele resultaten zijn pas in de zestiger jaren gegeven, onder anderen door P. Lax in 1968 [17], Zacharov in 1968 [18] en L.J.F. Broer in 1974 [19]. Verder wordt de lezer verwezen naar P.J. Olver [20] en naar E. van Groesen en E.M. de Jager [15, part I, Ch.1,2, part II, Ch.5], waar de theorie van oneindig-dimensionale continue dynamische systemen uitgebreid behandeld wordt.

In het bijzonder kan de Korteweg-de Vries vergelijking als Hamiltonsysteem gerepresenteerd worden door de vergelijking

$$\frac{\quad h}{\quad t} \quad \sqrt{gH}\frac{\quad}{\quad x}\;{}_h\mathcal{H} \text{ met}$$

$$\mathcal{H}(h) \quad \tfrac{1}{2}h^2 \quad \frac{H^2}{12}\left(\frac{\quad h}{\quad x}\right)^2 \quad \frac{1}{4}\frac{h^3}{H} \quad dx \tag{42}$$

waarin ${}_h\mathcal{H}$ de variationele afgeleide is van de functionaal $\mathcal{H}$, en een schaalparameter. De eerste term in $\mathcal{H}$ is de Hamiltonfunctionaal voor golven in de Lagrangebenadering en de tweede term is de Boussinesqcorrectie, overeenkomend met het *moment de stabilité* M. Hamiltons theorie voor eindige discrete systemen dateert van plusminus 1835 en het was pas een eeuw na Boussinesq dat deze theorie gegeneraliseerd werd voor continue systemen. Boussinesq heeft, waarschijnlijk onbewust, door het gebruik van functionalen een eerste stap in de richting van deze generalisatie gezet.

Andere bijzondere onderwerpen

In de voorafgaande paragrafen zijn alleen de belangrijkste aspecten van het onderzoek van enerzijds Boussinesq en anderzijds Korteweg en de Vries besproken. De auteurs behandelen verder vrij gedetailleerd het snelheidsveld in de vloeistof, de banen van vloeistofdeeltjes, de beweging van het zwaartepunt van een solitaire golf en een aantal karakteristieke grootheden zoals de potentiële en de kinetische energie van een golf. Boussinesq eindigt zijn artikel [6] met een kwalitatieve beschouwing van de vormverandering van lange niet stationaire golven. Hierbij is vanzelfsprekend de voortplantingssnelheid (14), van belang. De tekens van h en h_{xx} bepalen de relatieve snelheid van een punt op het golfoppervlak ten opzichte van de basissnelheid $\sqrt{gH}$. Er wordt plausibel gemaakt dat één solitaire positieve golf zich kan opsplitsen in verscheidene solitaire positieve golven en dat een negatieve solitaire golf niet kan optreden (N.B. $T \quad 0$).

Een belangrijk item voor Korteweg en de Vries was te bewijzen dat de benadering voor het golfoppervlak van een stationaire golf onbeperkt verscherpt kan worden via een convergente reeks. Hun uitgangspunt is de eerste benadering, zoals gegeven in (36) en verder de relaties

$$\left(\frac{dh}{d\xi}\right)^2 = ah(\bar{h}-h)(h+k)(1+bh+ch^2+\dots)$$

en

$$f(\xi) = q + rh + sh^2 + \dots ,$$

met f zoals gedefinieerd in (1); vergelijk (35).

De coëfficiënten a, b, c, … en q, r, s, … dienen uit de randvoorwaarden op het golfoppervlak bepaald te worden, namelijk

$$v_s(h) = u_s(h)\frac{dh}{d\xi}$$

en

$$u_s(h)^2 + v_s(h)^2 + 2gh = \text{constant}.$$

Het resultaat wordt een reeksontwikkeling met algemene term $O(\bar{h}^n)$. De berekeningen zijn, hoewel elementair, dermate moeizaam en gecompliceerd dat men mag verwachten dat andere onderzoekers hieraan niet veel aandacht hebben geschonken. Zelfs de eerste benadering volgend op (36) vraagt reeds zoveel inspanning dat het verstandig is met het resultaat (36) genoegen te nemen.

Slotopmerking

Het is in onze tegenwoordige tijd wellicht bevreemdend dat Korteweg en de Vries alleen de korte uiteenzetting van Boussinesq uit de *Comptes Rendus* [4] citeren en niet de uitgebreide verhandelingen in het *J. M.P.A.* [6] en de *Mémoire* [7] uit respectievelijk 1872 en 1877.

B. Willink heeft aan de auteur uit de nalatenschap van de Vries een kopie van een door de Vries geschreven uittreksel van het artikel van St. Venant [9] uit 1885 ter hand gesteld en daaruit blijkt dat de Vries stellig op de hoogte was van het bestaan van de *"Essai sur la théorie des eaux courantes"*. Dit brengt ons tot de vraag waarom Korteweg en de Vries het onderzoek door Boussinesq pas in 1894 opnieuw bewerkt hebben. Het antwoord wordt duidelijk uit de *"Introduction"* van hun artikel in de *Philosophical Magazine* [2]. Zij schrijven dat Lamb en Basset nog steeds van mening zijn dat golven gedurende hun voortplanting noodzakelijkerwijze van vorm veranderen, steiler aan de voorzijde en minder steil aan de achterzijde, en verder dat de onderzoekingen van Boussinesq, Lord Rayleigh en St. Venant aanleiding geven hieraan te twijfelen, maar dat het desalniettemin moeilijk is in te zien, waarom de solitaire golf een uitzondering op de regel zou zijn. Alle reden om het onderzoek nog eens te entameren. Misschien was het in de negentiende eeuw niet, zoals tegenwoordig, algemeen gebruikelijk het relevante werk van andere auteurs naar best vermogen uitgebreid te citeren; bovendien was de communicatie niet altijd zo gemakkelijk als heden ten dage. Een verschil in het onderzoek aangaande de stationaire golf door Boussinesq enerzijds en door Korteweg en de Vries anderzijds bestaat o.m. hierin dat Boussinesq de behoudswet (11) en de voortplantingssnelheid (14) als uitgangspunt van zijn theorie neemt en dat Korteweg en de Vries de ons bekende KdV-vergelijking beschouwen als *"This very important equation, to which we shall have frequently to revert in the course of this paper"*. De redactionele stijl van beide onderzoekers verschilt aanzienlijk: Boussinesq is nogal wijdlopig terwijl Korteweg en de Vries kort en zakelijk zijn.

De prioriteit van de mathematische beschrijving van de stationaire solitaire golf en daarmee de KdV-vergelijking komt ongetwijfeld toe aan Boussinesq. Korteweg en de Vries hebben echter in hun studie een aantal aspecten aan de theorie toegevoegd en hebben tevens bijgedragen tot het wegnemen van de twijfel betreffende het bestaan van de stationaire solitaire golf.

De auteur betuigt zijn erkentelijkheid aan dr. B. Willink (Erasmus Universiteit) voor discussie aangaande de prioriteit van de KdV-vergelijking en voor een aantal kopieën uit het werk van Boussinesq en St. Venant. Ook dankt hij dr. F. van Beckum (Universiteit Twente) voor een programma ter illustratie van de interactie van solitonen en voor zijn hulp bij de voorbereiding van dit artikel.

Literatuur

[1] de Vries, G.: *Bijdrage tot de Kennis der Lange Golven;* Academisch Proefschrift, Universiteit van Amsterdam, 1894.

[2] Korteweg, D.J., de Vries, G.: *On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves;* Phil.Mag., **39**, pp 422-443, 1895.

[3] Scott Russell, J.: *Report on Waves;* Rept. Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science; J. Murray, London, 1844, pp 311-390.

[4] Boussinesq, J.: *Théorie de l'intumescence liquide appelée "onde solitaire" ou "de translation", se propageant dans un canal rectangulaire;* C.R., Ac des Sc., **72**, pp 755-759, 1871.

[5] Boussinesq, J.: *Théorie générale des mouvements qui sont propagés dans un canal rectangulaire horizontal;* C.R. Acad. Sci. Paris, vol. **73**, pp 256–260, 1871.

[6] Boussinesq, J.: *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiguant au liquide continu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond;* J.Math.Pures et Appl., **17**, pp 55-108, 1872.

[7] Boussinesq, J.: *Essai sur la théorie des eaux courantes;* Mémoires présentés par divers savants à l'Ac. des Sci. Inst. Nat. France, Vol. **XXIII**, pp 1–680, 1877.

[8] Rayleigh (Strutt, J.W.): *On Waves;* Phil.Mag., **1**, p. 257, 1876.

[9] de Saint-Venant: *Mouvements des molécules de l'onde dite solitaire, propagée à la surface de l'eau d'un canal;* C.R. Acad. Sci. Paris, vol. **101**, pp 1101–1105, pp 1215–1218, pp 1445–1447, 1885.

[10] Pego, R.: *Origin of the KdV Equation;* Notices of the A.M.S., vol. **45**, No 3, p. 358, 1997.

[11] Newell, A.C.: *Solitons in Mathematics and Physics;* SIAM, Soc. for Ind. and Appl. Math., pp 1–244, 1985.

[12] Bullough, R.K.: *"The Wave", "Par Excellence", the Solitary Progressive Great Wave of Equilibrium of the Fluid: An Early History of the Solitary Wave; Solitons;* Springer Series in Nonlinear Dynamics, Proceedings, pp 7–42, 1988. (M. Lakshmanan, editor)

[13] Miles, J.W.: *The Korteweg-de Vries equation: a historical essay;* J.Fluid Mech. Vol. **106**, pp 131–147, 1981.

[14] Zabusky, N.J., Kruskal, M.D.: *Interaction of "Solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states;* Phys.Rev.Letters, **15**, pp 240-243, 1965.

[15] van Groesen, E., de Jager, E.M.: *Mathematical Structures in Continuous Dynamical Systems;* Studies in Mathematical Physics, North Holl. Publ. Co., **6**, pp 1–617, 1994.

[16] Legendre, A.M.: *Traité des Fonctions Elliptiques;* Paris, 1825–1828.

[17] Lax, P.: *Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves;* C.P.A.M., **21**, pp 467–490, 1968.

[18] Zakharov, V.E., Faddeev, L.D.: *The Korteweg-de Vries equation: a completely integrable Hamiltonian system;* Funct.Anal.Appl. **5**, pp 280–287, 1971.

[19] Broer, L.J.F.: *On the Hamiltonian theory of surface waves;* Appl.Sci.Res., **30**, p. 430, 1974.

[20] Olver, P.J.: *Applications of Lie groups to differential equations;* Springer, pp 1–513, 1986.

[21] Hazewinkel, M., Capel, H.W., de Jager, E.M., editors: *KdV'95, Proceedings Symposium;* Kluwer Acad.Publ.; Reprinted Acta Applicandae Mathematicae **39**, pp 1–516, 1995.

[22] Darrigol, O.: *The Spirited Horse, the Engineer, and the Mathematician: Water Waves in the Nineteenth-Century Hydrodynamics;* Arch. Hist. Exact Sci. **58**, pp 21–95, 2003.

[23] Remoissenet, M.: *Waves Called Solitons, Concepts and Experiments.* Springer, pp 1–236, 1994.