Studentenprojecten in de getaltheorie

De wiskundestudenten aan de UvA worden geacht ieder studiejaar, behalve het eerste, een project te doen. In het tweede jaar is dat met een groepje van twee of drie mensen, in de latere jaren individueel. Het meest arbeidsintensief is natuurlijk het afstudeerproject. Ik heb de laatste tijd veel getaltheoretische projectjes begeleid en wil hier iets over mijn ervaringen vertellen.

Wat betreft de tweedejaarsprojecten: de deelnemende docenten doen een aantal voorstellen voor mogelijke projectjes en de studenten kunnen dan daaruit kiezen. Ze werken in een groepje van liefst twee personen. Het is de bedoeling dat ze zich in een klein onderwerpje verdiepen en daar een voordracht over geven en er een verslag over schrijven. De voordrachten van de verschillende groepjes vinden plaats op dezelfde dag, dat zorgt natuurlijk voor een groot gehoor van studenten. Het is de bedoeling dat de studenten de docenten regelmatig op de hoogte houden van de voortgang van hun project.

Voor studenten is het tweedejaarsproject vaak de eerste kennismaking met hoe het is om, meer of minder, zelfstandig 'onderzoek' te doen. Nieuwe resultaten kunnen in dat stadium natuurlijk niet verwacht worden. Mijn vakgebied is de getaltheorie en elementaire getaltheorie leent zich bij uitstek voor tweedejaarsprojecten. Zo is er in de negentiende eeuw heel veel concrete elementaire, maar vaak originele en ingenieuze getaltheorie gedaan en is het erg leuk om dat als student eens te bekijken en te zien of je die bewijzen allereerst kunt begrijpen en vervolgens in meer hedendaagse terminologie kunt herformuleren. In dit kader ben ik er bijvoorbeeld achter gekomen dat de zogenaamde Ramanujansommen eigenlijk Daublebsky von Sternecksommen zouden moeten heten, dit naar R. Daublebsky von Sterneck (1871-1928), een Oostenrijks wiskundige. De zogeheten Hölderidentiteit voor Ramanujansommen blijkt al bij J.C. Kluyver (1860-1932) voor te komen, een Nederlands wiskundige (één van mijn wiskundige voorvaderen).

Recentere getaltheorie biedt natuurlijk ook voldoende mogelijkheden voor projectjes. Zo hebben Charles Mathy en Vincent van der Noort gekeken naar getaltheoretische constantes van de vorm $C = \prod_p h(p)$ met h een rationale functie en waarbij p over alle priemgetallen loopt. Deze constantes komen erg vaak voor in de getaltheorie. Een voorbeeld is de zogenaamde priemtweelingconstante T, deze is gedefinieerd door

$$T = \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Die priemtweelingconstante treedt op in een vermoeden van Hardy en Littlewood (1922), het aantal priemtweelingparen (paren getallen van de vorm $(p, p+2)$ met zowel p als $p+2$ priem) en $p \leq x$, groeit als $2Tx/(\log x)^2$. I.h.b. zouden er dus oneindig veel priemtweelingen moeten zijn. Het was een bekend idee dat dergelijke constantes geschreven kunnen worden als

$$C = \prod_p h(p) = \prod_{k \geq 2} \zeta(k)^{-e_k},$$

waarbij de e_k geheel zijn en $\zeta(s) = \sum_{n=1} n^{-s}$ de beroemde Riemannzetafunctie is. Ik heb dit als eerste (naar mijn beste weten) verder uitgewerkt en systematisch opgeschreven [1]. Bovenstaande identiteit blijkt heel handig om C met grote numerieke precisie te evalueren. Links hebben we namelijk te maken met priemgetallen en die zijn niet zo snel te genereren en rechts met de zetafunctie waar priemgetallen niet meer expliciet in voorkomen. Die zetawaardes rechts kunnen zeer snel en met hoge precisie worden uitgerekend. Mijn opdracht aan Charles en Vincent was nu om een programma te schrijven om die zogenaamde Eulerproducten van de vorm $\prod_p h(p)$ snel numeriek te evalueren. Ze vonden echter de theoretische kant van dit project zo leuk dat ze niet meer uitgebreid aan het programmeren zijn toegekomen (niettemin was hun verslag zo mooi en hun praatje over hun werk zo goed dat ik ze een 10 als cijfer gegeven heb). Met deze methode is het niet moeilijk om dit soort constantes met zeg duizend decimalen precisie te berekenen. Voor een collectie van dergelijke constantes zie [3]. Voor de constante T blijkt trouwens dat e_k gelijk is aan het aantal monische irreducibele polynomen van graad k over het eindige lichaam met twee elementen!

Bij het derdejaarsproject gaat het erom een paar artikelen zelfstandig te bestuderen en daarover te rapporteren. Jessica Duin wilde graag iets over het Catalanvermoeden doen. Dat is een oud vermoeden dat zegt dat er in de verzameling van kwadraten, derde machten en zo verder van natuurlijke getallen, er maar twee opeenvolgend zijn: 8 en 9, m.a.w. de vergelijking $x^n - y^m = 1$ heeft precies één oplossing in positieve gehele getallen x, y, n, m met $n, m \geq 2$. Dit vermoeden is onlangs bewezen door Mihailescu, een Roemeen die ooit naar Zwitersland kwam en daar eerst als bordenwasser werkte. Iets van acht keer claimde hij het Catalanvermoeden bewezen te hebben, zeven keer bleek zijn 'bewijs' echter foutief. Het komt relatief zelden voor in de wiskunde dat iemand een dergelijke imprecisie paart aan anderzijds wiskundige doorbraken. Fascinerend vind ik het echter wel. Een van de deelresultaten die Mihailescu bereikte is een versterkte versie van een eerder resultaat van de Fin Inkeri. Dat laatste resultaat is voor een derdejaarsstudent met wat algebra-achtergrond nog wel te volgen, vandaar dat ik Jessica vroeg dat te bestuderen. Prof. Tijdeman (bij wie ik gepromoveerd ben) bewees overigens in 1976 dat de Catalanvergelijking maar eindig veel oplossingen heeft.

Ik vind het een goed idee om al vrij vroeg in de studie een projectje te doen. Zelf studeerde ik in de tweede helft van de tachtiger jaren scheikunde en wiskunde in Leiden. Het doen van een project was toen (helaas) nog niet zo gebruikelijk. De afstand tussen docenten en studenten blijkt vaak nogal groot en bij zo'n project met begeleiding wordt dat natuurlijk minder. De studenten komen bijvoorbeeld na afloop van hun project nog wel eens langs als ze een vraag over getaltheorie hebben. Het werkt voor veel studenten ook natuurlijker om een doel in het achterhoofd te hebben, anders dan 'bestudeer dit boek', of 'volg dit college' waar een rode draad toch vaak minder aanwezig is. Het in een vroeg stadium leren te rapporteren over zaken is een vaardigheid die tegenwoordig natuurlijk nog belangrijker is dan vroeger. De - helaas - geringe studentenaantallen maken het ook relatief minder arbeidsintensief om meer studenten aan projecten te laten werken. Zelf vind ik het begeleiden van studenten leuker dan lesgeven, omdat het een wat diepgaander contact geeft en de persoonlijkheid en vaardigheden van de studenten duidelijker naar voren komen. Soms zijn de studenten erg enthousiast over hun project en dat geeft mij dan ook weer veel plezier. Het idee om zelf eventueel iets nieuws te kunnen vinden blijkt heel motiverend te werken.

Voor voorbeelden van verslagen van deze studentenprojectjes verwijs ik naar mijn homepage [2].

Pieter Moree
moree@science.uva.nl

[1] P. Moree, Approximation of singular series and automata, *Manuscripta Math.* **101** (2000), 385-399.
[2] P. Moree, http://staff.science.uva.nl/~moree/teaching.html
[3] G. Niklasch, http://www.gn-50uma.de/alula/essays/Moree/Moree.en.shtml