
JFM 26.0881.02

Korteweg, D. J.; De Vries, G.

On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. (English)

Phil. Mag. (5) XXXIX. 422-443 (1895).

Der Hauptgegenstand dieser Abhandlung ist die Erforschung der Frage, ob lange Wellen in einem rechteckigen Kanale notwendig beim Vorrücken ihre Gestalt ändern, steiler nach vorn und minder steil nach hinten werden müssen. Die Rechnungen sind etwas mühsam, doch möge der folgende Umriss das Wesen der Arbeit andeuten. Zuerst wird die Gestaltswandlung eines Systems von Wellen willkürlicher Form untersucht, die sich jedoch nur nach einer Richtung bewegen; hierbei wird die Oberfläche des Systems in angenäherte Ruhe gebracht, indem zu der Bewegung der Flüssigkeit eine gleichförmige Bewegung mit einer der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen gleichen und entgegengesetzten Geschwindigkeit hinzugefügt wird. Wenn $l+\eta$ (wo η eine kleine Grösse ist, die Erhebung der Flüssigkeit über den Boden in einem horizontalen Abstande x vom Coordinatenanfange ist, so liefert die Herleitung die folgende Gleichung:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{2}{3}\alpha\eta + \frac{1}{3}\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)}{\partial x},$$

wo α eine kleine, sonst aber willkürliche Constante ist, die in engem Zusammenhange mit der genauen Geschwindigkeit der gleichmässigen, der Flüssigkeit erteilten Bewegung steht, und wo $\sigma = \frac{1}{3}l^3 - Tl/\varrho g$ von der Tiefe l der Flüssigkeit, von der capillaren Spannung T an ihrer Oberfläche und von ihrer Dichtigkeit ϱ abhängt. Für stationäre Wellen ist $\partial\eta/\partial t = 0$, und es wird gezeigt, dass aus dieser Gleichung für die Einzelwelle (solitary wave)

$$\eta = \operatorname{sech}^2\left(x\sqrt{\frac{h}{4\sigma}}\right)$$

folgt. In diesem letzteren Falle ist zu beachten, dass bei Berücksichtigung der Capillarität eine negative Welle zur stationären wird, wenn die Tiefe klein genug ist. Hiernach führt die Erforschung der allgemeinen Lösung zu der Entdeckung eines neuen Typus einer langen stationären Welle, bei der die Gestalt der Oberfläche durch die Gleichung

$$\eta = h\,\mathrm{cn}^2\left(x\sqrt{\frac{h+k}{4\sigma}}\right) \qquad \left(\mod M = \sqrt{\frac{h}{h+k}}\right)$$

bestimmt wird. Für diesen Wellentypus wird der Name "knoidale Wellen" vorgeschlagen. Für $k = 0$ sind sie identisch mit der Einzelwelle; für grosse Werte von k ähneln sie mehr und mehr den Sinuswellen, obgleich sie im allgemeinen dadurch abweichen, dass sie ihre Erhöhungen enger haben als ihre Aushöhlungen, ausser wenn die Flüssigkeit sehr seicht ist, in welchem Falle dieses Aussehen durch den Einfluss der Capillarität umgekehrt wird. Für sehr grosse Werte von k fallen diese knoidalen Wellen mit dem von Stokes entdeckten Zuge oscillirender Wellen unwandelbarer Gestalt zusammen, was also in der Theorie langer Wellen einen besonderen Fall der knoidalen Form giebt. Nach Erörterung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Bewegung der Flüssigkeitsteilchen unterhalb der Oberfläche der knoidalen Wellen schreiten die Verf. zu einer näheren Prüfung der Wandelung langer Wellen, indem sie die Gleichung für $\partial\eta/\partial t$ auf mannigfache Typen nicht stationärer Wellen anwenden. Hierbei tritt zu Tage, dass, obschon sinusförmige Wellen beim Vorrücken an der Stirn steiler werden, andere Wellentypen sich anders verhalten können. Bei Aufstellung der fundamentalen Gleichung für $\partial\eta/\partial t$ werden die horizontale und die verticale Geschwindigkeitscomponente u und v durch rasch convergirende Reihen:

$$u = f + yf_1 + y^2 f_2 + \cdots, \quad v = y\varphi_1 + y^2\varphi_2 + \cdots$$

ausdrückbar vorausgesetzt, wo f, f_1, ..., φ_1, φ_2, ... Functionen von x und t sind. Die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

gestatten es, dieselben in der Gestalt

$$u = f - \frac{1}{2}y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{4!}y^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \cdots,$$
$$v = -y\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{3!}y^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \cdots$$

zu geben, woraus das Geschwindigkeitspotential φ und die Stromfunction ψ erhalten werden können. Wenn ferner p_1 (eine Constante) den Luftdruck, p_1' den Druck an einem Punkte der Oberfläche bedeutet, wo der capillare Druck zu wirken aufhört, wenn weiter T die Oberflächenspannung ist und y_1 der Wert von y an der Oberfläche, so besteht die Bedingung

$$p_1' = p_1 - T\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2};$$

dies wird vermittelst der gewöhnlichen Gleichung

$$\frac{p_1'}{\varrho} = \chi(t) - \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} - \frac{1}{2}(u_1^2 + v_1^2) - gy_1$$

in eine Gleichung von der Gestalt

$$\frac{p_1'}{\varrho} = L - gy_1 + My_1^2 + Ny_1^4 + Py_1^6 + \cdots + \frac{P}{\varrho}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}$$

umgeformt, und letztere Gleichung wird nach x differentiirt. Ausserdem gilt an der Oberfläche die Gleichung:

$$-u_1\frac{\partial y_1}{\partial x} + v_1 - \frac{\partial y_1}{\partial t} = 0,$$

und diese beiden letzten Gleichungen werden angenähert aufgelöst: $y_1 = l+\eta$, $f = q_0+\beta$, wo l und q_0 Constanten, β und η kleine, von x und t abhängige Grössen sind. Die erste Annäherung giebt $\partial\eta/\partial t = \partial\beta/\partial t = 0$, $\beta = -(\eta+\alpha)q_0/l$, $q_0 = \sqrt{gl}$, wo α eine kleine willkürliche Constante ist. Für die zweite Annäherung gilt $f = q_0 - (\eta+\alpha+\gamma)/l$, wo γ im Verhältnis zu η und α klein ist, und diese Annäherung giebt die fundamentale Gleichung für $\partial\eta/\partial t$. Es würde zu viel Raum beanspruchen, wenn wir die mannigfachen Einzelergebnisse geben wollten, die allerdings ganz interessant sind.

Gibson, Prof. (Glasgow) (Lampe, Prof. (Berlin))