FNWI, UvA, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam

Tentamen **Integratietheorie**, 19 januari 2007, 13.30–16.30 uur

Lebesgue-maat wordt aangeduid met λ. In som 3 mag je zonder bewijs aannemen dat $c\int_{(0,\infty)} f(cx)\,d\lambda(x) = \int_{(0,\infty)} f(x)\,d\lambda(x)$ als f integreerbaar is en $c > 0$.
Alle sommen tellen even zwaar.

1. Voor $\operatorname{Re}\alpha > 0$ en voor $n = 1, 2, \ldots$ is gegeven de functie $f_{n,\alpha}$ op $[1,\infty)$ door

$$f_{n,\alpha}(x) := \frac{\sin(n^{-\frac{1}{2}}x)}{x^\alpha(1+n^{-1}x)^n}\,.$$

Bewijs dat $f_{n,\alpha}$ integreerbaar is op $[1,\infty)$ t.o.v. de Lebesgue-maat en bepaal

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[1,\infty)} f_{n,\alpha}\,d\lambda.$$

2. Zij f een reëelwaardige functie op $\mathbb{R}$, integreerbaar t.o.v. de Lebesgue-maat. Bewijs dat voor bijna alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $\lim_{n\to\infty} f(x+n) = 0$ en $\lim_{n\to\infty} f(x-n) = 0$.

Aanwijzing Schrijf $\int_{\mathbb{R}} |f|\,d\lambda$ als een som van integralen over eenheidsintervallen.

3. Op $(0,\infty)$ is de maat μ gegeven door $d\mu(x) := x^{-1}\,d\lambda(x)$. Laten f en g complexwaardige Borel-functies op $(0,\infty)$ zijn. Definieer $h(x) := \int_{(0,\infty)} f(y)\,g(xy^{-1})\,d\mu(y)$ voor alle $x \in (0,\infty)$ waarvoor de functie $y \mapsto f(y)\,g(xy^{-1})$ integreerbaar is t.o.v. μ.

a) Veronderstel dat f en g integreerbaar zijn t.o.v. μ. Bewijs dat $h(x)$ μ-bijna overal bestaat en dat h (uitgebreid met waarden 0 in die punten waar hij nog niet goed gedefinieerd was) integreerbaar is t.o.v. μ.

b) Veronderstel dat f integreerbaar is t.o.v. μ en dat g een begrensde continue functie is. Bewijs dat h een overal gedefinieerde continue functie is.

4. Op $[0,1]$ is een eindige Borel-maat μ gegeven zo dat voor elke samenhangscomponent (a,b) van het complement in $[0,1]$ van de Cantor-verzameling geldt dat

$$\begin{aligned}
\mu\big((x,\tfrac{1}{2}(a+b))\big) &= \arcsin(\tfrac{1}{2}(a+b)) - \arcsin(x), \qquad && a \le x < \tfrac{1}{2}(a+b),\\
\mu\big((\tfrac{1}{2}(a+b),x)\big) &= \arcsin(x) - \arcsin(\tfrac{1}{2}(a+b)), \qquad && \tfrac{1}{2}(a+b) < x \le b.
\end{aligned}$$

Bepaal een absoluut continue maat ν t.o.v. λ op $[0,1]$ zo dat $\mu = \nu + \sigma$ met σ een maat op $[0,1]$ die singulier is t.o.v. λ. (De maat σ hoeft niet expliciet berekend te worden, maar er moet wel worden aangetoond dat hij singulier is t.o.v. λ.)

5. Zij $(X,\mathcal{A},\mu)$ een maatruimte. Zij (f_n) een rij integreerbare functies op X die Cauchy is t.o.v. de L^1-norm. Bewijs dat er een deelrij van (f_{n_k}) van (f_n) bestaat en een integreerbare functie f op X zo dat

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \text{ voor bijna alle } x \in X, \quad \text{en } \lim_{k\to\infty}\|f_{n_k} - f\|_1 = 0.$$

Succes!