Quantum theorie voor Wiskundigen

door Peter Bongaarts (Rotterdam)

bij het afscheidssymposium

Velden en Wegen in de Wiskunde

voor Henk Pijls

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde

Universiteit van Amsterdam, 20 juni 2008

“De filosofie is geschreven in dit grote boek dat steeds voor onze ogen open ligt (Ik bedoel het universum). Maar het kan niet worden begrepen tenzij we eerst hebben geleerd de taal te begrijpen en de letters herkennen waarin het geschreven is. Het is geschreven in de taal van de wiskunde, en de letters zijn driehoeken, cirkels, en andere meetkundige figuren. Zonder zulke middelen is het voor ons mensen onmogelijk om er een woord van te begrijpen, en zonder deze zoeken we tevergeefs een weg in een duister labyrint.”

Galileo Galilei:
Il Saggiatore (De keurmeester), 1623

twee revoluties in de natuurkunde van de twintigste eeuw

• relativiteitstheorie
1905, 1915 Einstein

• quantumtheorie
1900 Planck, 1912 Bohr,
1924 Heisenberg, Schrödinger

beide theorien *achteraf* het beste te begrijpen vanuit hun wiskundige structuur,

respectievelijk:

- Riemannse variëteiten
- operatoren in Hilbertruimten

ontwikkeling quantumtheorie

1905 Plancks ‘energiequantum’
in stralingstheorie

1912 atoommodel van Bohr:
discrete banen van electronen rond kern
spontane sprongen tussen banen

succesvolle ad-hoc aannamen !

vanaf 1924 **echte theorie:**
quantummechanica
Heisenberg, Schrödinger, e.a.

aard van die ontwikkeling

geen afleiding uit eerdere theorie
ad-hoc sprongen
nieuwe slecht begrepen wiskunde

maar fysisch zeer succesvol !!

wiskundigen brachten inzicht
in structuur van de theorie

John von Neumann

Hermann Weyl

B.L. van der Waerden

David Hilbert

grondbegrippen quantumtheorie

- I. toestand
- II. observabele
- III. tijdsevolutie
- IV. symmetrie

• **axioma I**
toestanden fysisch systeem op bepaald tijdstip
= *eenheidsvectoren in complexe Hilbertruimte*

• **axioma II**
te meten grootheden (observabelen)
= *zelf-geadjungeerde operatoren in die Hilbert-ruimte*

• **axioma III** (interpretatie van I en II)
voorspelling resultaten van meting van observabele A in toestandsvector ψ
= *kansverdeling beschreven door cumulatieve distributiefunctie*

$$F(\alpha) = (\psi, E_\alpha \psi),$$

met $\{E_\alpha\}_\alpha$ *de* spectraalresolutie *van* A

- **axioma IV**
evolutie in de tijd
= *continue* 1-*parameter groep*
van unitaire operatoren
(of
= 2-*parameter stelsel, een groupoide,*
als interactie niet tijdstranslatie-invariant is)

- **axioma V**
symmetrieën
= *(groepen van) unitaire operatoren*

toelichting bij axioma I:
toestand fysisch systeem op bepaald tijdstip: eenheidsvector in complexe Hilbert-ruimte

elementair voorbeeld: puntdeeltje
met massa m in potentiaal $V(x_1, x_2, x_3)$

toestand beschreven door:

klassiek: plaatscoordinaten x_1, x_2, x_3
en impulswaarden p_1, p_1, p_3, dus punt in R^6

quantum: complexe functie ψ in $L^2(R^3, d\vec{x})$,
golffunctie $\psi(x_1, x_2, x_3)$, dus vector in oneindig dimensionale vectorruimte

toelichting bij axioma II:
te meten grootheden (observabelen) : zelf-geadjungeerde operatoren in die Hilbertruimte

voorbeeld: puntdeeltje

klassiek: plaats $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$,
impuls $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, energie $E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$

quantumtheorie: operatoren in $L^2(R^3, d\vec{x})$

$$Q_j : \psi(\vec{x}) \mapsto x_j \psi(\vec{x})$$

$$P_j : \psi(\vec{x}) \mapsto \frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi(\vec{x}),$$

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{Q})$$

toelichting bij axioma III
(interpretatie van I en II) :
voorspelling resultaten van meting van observabele A *in toestandsvector* ψ *: kansverdeling met cumulatieve distributiefunctie*

$$F(\alpha) = (\psi, E_\alpha \psi),$$

met $\{E_\alpha\}_\alpha$ *de spectraalresolutie van* A

wiskundig fundament :

spectraalstelling voor zelfgeadjungeerde operatoren in de Hilbert ruimte !

eindig dimensionale Hilbertruimte

zelfgeadjungeerde operator A
te diagonaliseren op orthonormaal basis
van eigenvectoren

A eenduidig te schrijven als

$$A = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j P_j$$

reële eigenwaarden $\alpha_1 < \ldots < \alpha_p$

P_j projecties op eigenruimten

oneindig dimensionale Hilbertruimte !!

zelfgeadjungeerde operatoren, soms

onbegrensd
continu spectrum
geen eigenwaarden of eigenvectoren

???

generalisatie van $A = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j P_j$
tot willekeurige dimensie

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \, dE_\alpha$$

of

$$(\psi, A\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \, d(\psi, E_\alpha \psi)$$

voor alle ψ in $\mathcal{H}$

discrete som is nu Riemann-Stieltjes integraal over 'infinitesimale verschillen' van projecties

algemene spectraalstelling voor zelfgeadjungeerde operatoren

basis: *spectraalresolutie* $\{E_\alpha\}_{\alpha \in R^1}$

spectraalresolutie

systeem $\{E_\alpha\}_{\alpha \in R^1}$ van commuterende projecties met

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \implies E_{\alpha_1} \leq E_{\alpha_2}$$

$$\lim_{\alpha \to -\infty} E_\alpha = 0$$
$$\lim_{\alpha \to +\infty} E_\alpha = 1$$

continuïteit van rechts

ook goed gedefiniëerd in oneindige dimensie in de spectraalstelling heeft, voor iedere eenheidsvector ψ, de monotoon stijgende functie

$$F_\psi(\alpha) = (\psi, E_\alpha \psi)$$

de wiskundige eigenschappen van een *cumulatieve distributiefunctie* voor de kansverdeling van een stochastische grootheid in de kanstheorie.

dit wordt toegepast in de quantumtheorie:

$F_\psi(\alpha)$ *geeft de kans om de waarde* α
te meten voor A *in de toestand* ψ

deze kan discreet, continu of beide zijn *systemen van observabelen 1*

grootheden a en b **commensurabel**

$$\Updownarrow$$

operatoren A en B commuteren

er is een 2-parameter spectraalresolutie

$$\{E_{\alpha,\beta}\}_{(\alpha,\beta)\in R^2}$$

met daarbij

gegeneraliseerde spectraalstelling en
gemeenschappelijke distributiefuncties
in 2 variabelen, $\forall\psi \in \mathcal{H}$ met $||\psi|| = 1$,

$$F_\psi(\alpha,\beta) = (\psi, E_{\alpha,\beta}\psi)$$

we zijn nog steeds

binnen de klassieke kanstheorie !!

systemen van observabelen 2

a en b **niet** commensurabel

$$\Updownarrow$$

A en B commuteren **niet**

geen gegeneraliseerde spectraalstelling

geen gemeenschappelijke distributiefuncties

daarmee zijn we

buiten de klassieke kanstheorie !!

geen gemeenschappelijke kansruimte !

wel
relaties tussen afzonderlijke kansverdelingen

echter
beperkingen op meetnauwkeurigheid
voorbeeld: plaats en impuls

$$\Delta p_j \, \Delta x_j \; \geq \; \frac{\hbar}{2}$$

ongelijkheid van Heisenberg

gevolg: electron heeft geen baan !

bij Axioma IV

tijdsevolutie puntdeeltje met massa m
onder invloed van een potentiaal $V(\vec{x})$

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta + V(\vec{x}))\psi(\vec{x},t)$$

Schrödinger vergelijking

Een interessant idee:

quantumtheorie

$$=$$

nietcommutatieve
kanstheorie

voorbeeld 1: topologie

Gelfand-Naimark: 1-1 correspondentie compacte topologische ruimten $\Longleftrightarrow$ complexe commutatieve C^*-algebras.

doe alsof een nietcommutatieve C^*-algebra ook de algebra van functies op een ‘ruimte’ is.

zo’n ruimte bestaat niet

maar er zijn allerlei generalisaties van algebraïsch geformuleerde topologische begrippen naar de nietcommutatieve situatie

resultaat:

‘nietcommutatieve topologie’

voorbeeld 2: meetkunde

Alain Connes: C^∞ variëteit $\mathcal{M}$ wordt gekarakteriseerd door de commutatieve algebra $C^\infty(\mathcal{M})$ van gladde functies op $\mathcal{M}$

beschouw $C^\infty(\mathcal{M}))$ als abstracte algebra en bestudeer nietcommutatieve versie

resultaat

‘nietcommutatieve meetkunde’

voorbeeld 3 : kanstheorie

kansruimte: $(X, \mathcal{F}, P)$
begrensde stochastische variabelen
(= meetbare functies op X) vormen een
commutatieve von Neumann algebra $\mathcal{C}$

de verwachting van al die variabelen is een
genormeerde positieve functionaal ω op $\mathcal{C}$

bestudeer nietcommutatieve von Neumann
algebras, met daarop een ω

resultaat:

'nietcommutatieve kanstheorie'

= quantum theorie

slotopmerkingen

• generalisaties :
- quantum statistische fysica (veel deeltjes)
- quantum veldentheorie (elementaire deeltjes-fysica, succesvol in praktijk; nog geen bevredigende wiskundige basis)

• actueel, recent :
- quantum computers, quantum informatie.
- zwarte gaten in astronomie.

• uitdaging voor de toekomst :
- unificatie van quantumtheorie en relativiteitstheorie