De ontwikkeling van het functiebegrip

inleiding door Tom Koornwinder, `thk@science.uva.nl`*, versie 21 februari 2006*

onderdeel van het vak Wiskunde als Wetenschap voor 2ejaars wiskunde, UvA

1. Algemeenheden

De moderne definitie van een functie zegt: Laten X en Y deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$. Een *functie* f van X naar Y is een toevoeging aan elke x in X van een unieke $y = f(x)$ in Y. Hoe kan f nu zoal nader gespecificeerd worden?

1. Helemaal geen specificatie van f. We nemen gewoon aan dat we een functie f hebben.

2. We hebben een f behorend tot een bepaalde functieklasse, bijvoorbeeld (met X een interval en $Y=\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$) de klasse van continue functies op X.

3. Door een formule, dus door $f(x)$ te schrijven als een uitdrukking in termen van x, verdere expliciete getallen, elementaire bewerkingen zoals optellen, vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen, transcendente bewerkingen zoals limiet, oneindige som, afgeleide, integraal, en in termen van andere bekende functies.

4. We hebben een expliciet voorschrift, mogelijk heel gecompliceerd, dat gegarandeerd bij elke x in X een unieke y in Y levert. Dit voorschrift kan eindig of oneindig veel stappen bevatten en al of niet constructief zijn. Bijvoorbeeld f kan gedefinieerd zijn als oplossing van een differentiaalvergelijking met beginvoorwaarden, zodat de theorie een unieke functie als oplossing garandeert, zonder dat we die functie kunnen uitrekenen. Een ander voorbeeld is f gedefinieerd op $X = \{1, 2, \ldots\}$ als volgt: $f(k)$ is het cijfer in de k-de decimaal in de decimaalontwikkeling voor π. Zie vraag 1.

5. Door een tabel die voor elke $x \in X$ een $y \in Y$ geeft. Dit kan uiteraard slechts voor een eindige verzameling X, maar je zou voor een x liggend tussen twee x-waarden uit de tabel een geïnterpoleerde y-waarde kunnen uitrekenen. Vroeger, zeker tot in de jaren zestig van de twintigste eeuw, werden zulke tabellen veel gebruikt: van de logaritmetafel op school tot tabellen voor hogere speciale funties (zie bijv. [1]).

6. Door een grafiek van de functie. Uiteraard geeft dit voor elke x-waarde slechts een benaderende y-waarde.

7. Door een procedure in een computerprogramma welke bij input x output y geeft. Zie vraag 2.

Wat miste de 17e of 18e eeuwse wiskundige aan bagage om ons hedendaags functiebegrip al te hebben? Hij miste erg veel:

1. Het verzamelingsbegrip bestond nog niet.

2. Het afbeeldingsbegrip (van de ene naar de andere verzameling) bestond nog niet.

3. Er was geen precieze definitie van de reële getallen.

4. Er was geen goede notatie om een functie weer te geven.

5. Men werkte op een naïeve manier met oneindig grote en oneindig kleine getallen.

6. Er was geen precieze definitie van limiet, afgeleide en integraal, en ons hedendaagse continuïteitsbegrip kende men nog niet.

7. Er werden geen rigoreuze bewijzen in dit gedeelte van de wiskunde gegeven (anders dan in de vlakke meetkunde, waar Euclides al in de oudheid een standaard had gezet).

8. Men dacht in dit deel van de wiskunde meer meetkundig dan algebraïsch of aritmetisch, terwijl die laatste denkwijzen juist nodig zijn voor een rigoreuze aanpak van functies.

9. Men werkte alleen met functies die door mooie uitdrukkingen werden gegeven, bijv. door oneindige reeksen.

Geen wonder dat het eeuwen duurde, met kleinere of grotere stappen, totdat men het "juiste" functiebegrip had. Trouwens, soms keert men ook weer bewust terug naar een eerdere visie, bijv. door alleen constructief gedefinieerde functies (Brouwer) of alleen berekenbare functies toe te laten.

Bij een bestudering van de ontwikkeling van het functiebegrip kun je verschillende soorten vragen stellen:

1. Wie publiceerde in ongeveer welk jaar welke significante nieuwe bijdrage aan het functiebegrip? Hoe ontwikkelde het functiebegrip zich in grote lijnen in de loop van de tijd?

2. In hoeverre reageerden auteurs op elkaar?

3. Waarom werd een nieuwe stap gedaan? Geeft de auteur daar zelf motivatie voor of moeten we de motivatie op indirecte manier afleiden?
   Werd de nieuwe stap ingegeven door toepassingen zoals natuurkunde, sterrenkunde en hemelmechanica? Bedenk dat er in 17e en 18e eeuw geen strikte scheiding was tussen wiskunde, natuurkunde en sterrenkunde, en dat er geen "zuivere" wiskundigen waren zoals we die vanaf de 19e eeuw kennen.
   Of werd de nieuwe stap meer om intern wiskundige redenen gezet, zoals wiskundig-technische verbetering, elegantie, consistentie, verwerking van hinderlijke tegenvoorbeelden (zoals trillende snaar, nergens differentieerbare continue functie).

4. Wat was de invloed van de grote mannen in het vak? Speelden de mindere goden toch ook nog een niet verwaarloosbare rol in de ontwikkeling?

5. Was er sprake van richtingenstrijd? Waren de kampen vooral nationaal bepaald, bijv. Frankrijk, Duitsland en Engeland?

6. Was er een wisselwerking tussen de ontwikkelingen in de wiskunde en in de cultuur (literatuur, beeldende kunst, muziek) en in het wereldbeeld (filosofie, theologie)? Zie vraag 3.

De zeventiende eeuw

Nu geef ik zeer summier overzicht van de ontwikkeling. In de 17e eeuw werkte men niet met functies, maar met krommen in het vlak, die gedefinieerd werden door relaties tussen de x- en de y-variabele, bijv. $x^2 - x + y = 0$. Andere grootheden van meetkundige aard liet men afhangen van het punt op de kromme, bijv. abscis, ordinaat, booglengte, tangent, subtangent, normaal, subnormaal. Zie [2, p.469] voor een verhelderende tekening.

Newton (1642–1727) veronderstelde dat het punt de kromme doorliep in de tijd. Daarmee hingen alle met het punt op de kromme geassocieerde grootheden ook van de tijd af.

Leibniz (1646–1716) gebruikt voor het eerst het woord *functie* in zijn manuscript *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus.* Het Latijnse woord *functio* is afgeleid van het Latijnse werkwoord *fungor* (ik voer een taak uit). Leibniz ziet een *functio* als een grootheid verbonden met de kromme die t.o.v. de kromme een bepaalde taak uitvoert. Zie verdere details hierover in [5, p.56].

Differentiatie en integratie werden ingevoerd door Newton en Leibniz. Zijdelings verband houdend met de ontwikkeling van het functiebegrip zijn de volgende vragen (zie vraag 4):

1. Hoe verschilden Newton's en Leibniz' begrip van differentiatie en integratie van elkaar?
2. Hoe konden zij deze begrippen invoeren als ze werkten met krommen i.p.v. functies?
3. Is het een grote stap om hun definities van differentiatie en integratie om te schrijven in termen van functies? Wie heeft dit voor het eerst gedaan?
4. Wat behelsde de polemiek tussen Newton en Leibniz over de prioriteit bij de invoering van differentiatie en integratie?

Een eerste notatie voor functies werd ingevoerd door Johann Bernoulli (1667–1748): hij schrijft X voor een grootheid die van x afhangt. Hij schrijft boven de X nog een nummer 1,2, etc. als er sprake is van meer grootheden die van x afhangen. De notatie $f(x)$ zoals wij die kennen, werd ingevoerd door Euler (1707–1783).

De achttiende eeuw

Johann Bernoulli definieerde in 1718:
"On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes."

De definitie van Euler uit 1748 (zie in de reader de Engelse vertaling) verschilt hier slechts weinig van:
"Eine Function einer veränderlichen Zahlgrösse ist ein **analytischer Ausdruck**, der auf irgend eine Weise aus der veränderlichen Zahlgrösse und aus eigentlichen Zahlen oder aus constanten Zahlgrössen zusammengestellt ist."

Belangrijk is de vermelding van *analytische uitdrukking*, impliciet bedoelde Johann Bernoulli het ook zo. Lees in dit verband ook in de reader over het toenmalige, van de hedendaagse praktijk afwijkende gebruik van het woord *continuïteit*.

Dramatisch anders is de definitie van Euler in 1755 van een functie (zie [5, p.70] voor Latijns origineel):

"If some quantities so depend on other quantities that if the latter are changed the former undergo change, then the former quantities are called *functions* of the latter. This denomination is of broadest nature and comprises every method by means of which one quantity could be determined by others. If therefore, x denotes a variable quantity, then all quantities which depend upon x in any way or are determined by it are called functions of it."

Een grote rol in de ontwikkeling van het functiebegrip speelde de discussie over de beweging van een trillende snaar. Dit betreft de oplossing $y(x,t)$ van de golfvergelijking $y_{xx} = y_{tt}$ voor $0 \le x \le L$ en $t \ge 0$ met randvoorwaarden $y(0,t) = 0 = y(L,t)$ en met $y(x,0)$ en $y_t(x,0)$ gegeven door zekere beginfuncties (bijv. $y_t(x,0) = 0$ als je de snaar hebt uitgerekt in een zekere stand $y(x,0)$ en dan loslaat). D'Alembert (1717–1783) gaf in 1743 de algemene oplossing van de golfvergelijking in de vorm $y(x,t) = \phi(x+t) + \psi(x-t)$ met ϕ en ψ willekeurig; vraag was hoe willekeurig. Bij genoemde randvoorwaarden en bij beginvoorwaarde $y_t(x,0) = 0$ wordt dit $y(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t))$, $y(x,0) = f(x)$, met f een oneven en $2L$-periodieke functie.

Vanuit de natuurkundige interpretatie gezien zou men hier een beginfunctie f mogen toelaten met een discontinuïteit in de 1e afgeleide. Maar hoe kan de oplossing dan aan een 2e orde differentiaalvergelijking voldoen? Ook het feit dat voor een probleem op $[0,L]$ sprake was van een $2L$-periodieke functie (dus een periode op een groter interval) was in die tijd verwarrend. Hierover ontstond een dispuut tussen Euler en d'Alembert.

Daniel Bernoulli (1700–1782) ging in 1750 verder door $y_{xx} = y_{tt}$ op te lossen door separatie van variabelen, wat (met de rand- en beginvoorwaarden) leidde tot speciale oplossingen $\sin(\pi kx/L)\cos(\pi kt/L)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, waarvan eindige (of misschien ook oneindige) lineaire combinaties ook oplossingen van die vergelijking zijn. Ook i.v.m. deze methode ontstond er een dispuut met Euler: hoe algemene functies konden als oneindige lineaire combinaties van deze oplossingen geschreven worden?

Zie meer details over deze controversen in [4]. Zie vraag 5.

De negentiende eeuw

In de 19e eeuw kreeg de ontwikkeling van het functiebegrip grote stimulans door de theorie van de Fourier-reeksen (gestart door Fourier, 1768–1830). Zie hierover ook het artikel van Riemann, in het Duits in de reader, in Engelse vertaling later uitgedeeld. Fourier beantwoordde in 1822 (in mondelinge presentatie al in 1807) de vraag of een gegeven functie $f(x)$ op het interval $[0,\pi]$ met $f(0) = f(\pi) = 0$ geschreven kan worden in de vorm

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \tag{1}$$

door de coëfficiënten b_n in termen van f uit te drukken door

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\sin(nx)\,dx. \tag{2}$$

Uiteraard werd er eerst met een "mooie" analytische f begonnen, maar het bleek dat de integralen in (2) konden worden uitgevoerd voor algemenere functies, en dat dan (1) bleef gelden. Men beschouwde het rechter lid van (1) als een analytische uitdrukking voor $f(x)$, maar het bleek dat op deze manier functies met discontinuïteiten in de eerste afgeleide of in de functie zelf ook "analytisch" konden worden uitgedrukt. Dit was zeer onthutsend en verwarrend. Het stimuleerde zowel de ontwikkeling van het functiebegrip als van het integraalbegrip. Dirichlet (1805–1859) was een belangrijke schakel in de verdere ontwikkeling. Tenslotte was dit mede aanleiding voor Riemann (1826–1866) om de Riemann-integraal in te voeren. Zie vraag 6.

In de 19e eeuw waren Bolzano (1782–1848) en Cauchy (1789–1857) zeer belangrijk in het rigoureuzer maken van de analyse, maar de tragiek van Bolzano was dat zijn werk lange tijd niet werd opgemerkt. Pikant is dat Cauchy soms ernstige fouten maakte, die een hedendaags 2ejaars-student bij analyse zwaar zouden worden aangerekend. Met name beweerde en "bewees" hij dat een oneindige puntsgewijs convergente som van continue functies weer een conitnue functie levert (zie [2, p.715]). Zie vraag 7.

Geleidelijk kwamen er in de 19e eeuw steeds meer voorbeelden van "pathologische" functies die tegen de gangbare intuïtie ingingen. Bekroning hiervan was het voorbeeld van Weierstrass (1815–1897) van een continue en nergens differentieerbare functie. Zulke voorbeelden hielpen de theorievorming verder. Zie [3, pp. 954–956].

Weierstrass was ook degene die definitief het bouwwerk van de analyse rigoreus maakte en die de epsilon-delta definities en bewijzen invoerde,

De twintigste eeuw

In 1902 voerde Lebesgue (1875–1941) de *Lebesgue-integraal* in, een belangrijke uitbreiding van het integraalbegrip, waarmee ook de functieklasse die men met fatsoen nog wilde bekijken, enorm werd uitgebreid.

In de eerste decennia van de 20e eeuw werd de *functionaalanalyse* ontwikkeld. Men bewees in abstracto stellingen over oneindig-dimensionale ruimtes met verdere structuur, zoals Hilbert- en Banach-ruimtes, en paste dat dan toe op concrete functieruimtes die de structuur van zo'n abstracte ruimte hadden. Dit was een verdere stap van het speciale naar het algemene, met minder aandacht voor de individuele functie.

In 1944 voerde Laurent Schwartz (1915–2002) de theorie van de *distributies* of *gegeneraliseerde functies* in. Een voorbeeld van een distributie vormen de afgeleiden van de Heaviside-functie $H(x) := 1$ als $x \geq 0$ en $:= 0$ als $x < 0$. Dan is $H'(x) = \delta(x)$, de *delta-functie* (die eigenlijk geen functie meer is), terwijl we ons de verdere afgeleiden helemaal niet meer als functies kunnen voorstellen. De distributies vormen een uitbreiding van de continue (en van de lokaal integreerbare) functies zo dat we een continue functie willekeurig vaak kunnen differentiëren en binnen de klasse van distributies blijven.

Laat-negentiende eeuwse kritiek

De analyse aan het eind van de 19e eeuw was een solide bouwwerk, maar niet iedereen was er gelukkig mee, en dit waren niet de minsten. Zie vraag 8. Hier volgt een lang citaat uit [3, p.973]:

Like all new movements in mathematics, the rigorization of analysis did not go unopposed. There was much controversy as to wether the rigorization of analysis should be pursued. The peculiar functions that were introduced were attacked as curiosities, nonsensical functions, funny functions and as mathematical toys perhaps more intricate but of no more consequence than magic squares. They were also regarded as diseases or part of the morbid pathology of functions and as having no bearing on the important problems of pure and applied mathematics. These new functions, violating laws deemed perfect, were looked upon as signs of anarchy and chaos which mocked the order and harmony previous generations had sought. The many hypotheses which now had to be made in order to state a precise theorem were regarded as pedantic and destructive of tlie elegance of the eighteenth-century classical analysis, "as it was in paradise," to use Du Bois-Reymond's (1831–1889) phrasing. The new details were resented as obscuring the main ideas.

Poincaré (1854–1912), in particular, distrusted this new research. He said:

Logic sometimes makes monsters. For half a century we have seen a mass of bizarre functions which appear to be forced to resemble as little as possible honest functions which serve some purpose. More of continuity, or less of continuity, more derivatives, and so forth. Indeed from the point of view of logic, these strange functions are the most general; on the other hand those which one meets without searching for them, and which follow simple laws appear as a particular case which does not amount to more than a small corner. In former times when one invented a new function it was for a practical purpose; today one invents them purposely to show up defects in the reasoning of our fathers and one will deduce from them only that.

Charles Hermite (1822–1901) said in a letter to Stieltjes, "I turn away with fright and horror from this lamentable evil of functions which do not have derivatives."

Another kind of objection was voiced by Du Bois-Reymond. His concern was that the arithmetization of analysis separated analysis from geometry and consequently from intuition and physical thinking. It reduced analysis "to a simple game of symbols where the written signs take on the arbitrary significance of the pieces in a chess or card game."

Vragen voor onderzoek of discussie

1. Geef meer voorbeelden van functies gedefinieerd door gecompliceerde voorschriften. Is hier nog verder onderscheid in te maken, bijv. berekenbaar, in principe berekenbaar als je lang genoeg tijd zou hebben, alleen gegarandeerd door de theorie?

2. Is het bevredigend om een functie te definiëren d.m.v. een procedure in een computerprogramma?

3. Kun je voorbeelden geven van wisselwerkingen tussen de ontwikkelingen in het functiebegrip en in de cultuur en in het wereldbeeld?

4. Beantwoord de vier in de tekst gestelde vragen over de invoering van differentiatie en integratie door Newton en Leibniz.

5. Wat waren de standpunten van d'Alembert, Daniel Bernoulli en Euler in de controverse over de oplossing van het probleem van de trillende snaar? Wat voor relatie hadden die standpunten met de ontwikkeling van het functiebegrip? Was er in Euler's standpunt al iets te merken van zijn tweede definitie uit 1755 van een functie?

6. In hoeverre werd Fourier ook beïnvloed door de discussie (zie boven) van de beweging van een trillende snaar, waar eigenlijk ook Fourier-reeksen een rol spelen? Was Fourier echt de eerste met formule (2) of had Euler ook al iets in die richting gevonden? Belangrijke motivatie voor Fourier bij invoering van de theorie van Fourier-reeksen was de oplossing met separatie van variabelen van $u_{xx}+u_{yy}=0$, welke de stationaire temperatuurverdeling op een gebied in $\mathbb{R}^2$ beschrijft (dit is het geval $u_t=0$ van de algemenere warmtevergelijking $u_{xx}+u_{yy}=u_t$). Heeft Fourier ook de niet-stationaire warmtevergelijking met zijn Fourier-theorie opgelost?

7. Bekijk Cauchy's bewijs voor de onjuiste stelling dat een puntsgewijs convergente oneindige som van continue functies een continue functie levert. Wat zag hij over het hoofd? Abel merkte in 1826 de fout van Cauchy voor het eerst op. In welke termen was Abel's artikel met de correctie gesteld?

8. Wat vind je van de kritiek van Poincaré, Du Bois-Reymond en Hermite op de ontwikkelingen in de analyse? Is deze kritiek nog actueel? Ga eens na bij hedendaagse theoretische en mathematische fysici wat thans de ideeën zijn over de relatie tussen natuurkunde, intuïtie, meetkundige en aritmetische aanpak.

Referenties

[1] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, National Bureau of Standards, 1964; reprinted by Dover.

[2] V. J. Katz, *A history of mathematics, an introduction*, Addison-Wesley, 1998, second edition.

[3] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, 1972.

[4] C. Truesdell, *The rational mechanics of flexible or elastic bodies. 1638–1788*, in: *Leonhardi Euleri Opera omnia, ser. II, vol. II-2*, Turici, 1960.

[5] A. P. Youschkevitch, *The concept of function up to the middle of the 19th century*, Arch. History Exact Sciences 16 (1976), 37–85.