Syllabus Abstracte Analyse

door T. H. Koornwinder, met medewerking van P. R. Beneker

Universiteit van Amsterdam, Faculteit der NWI, Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde

april–juni 1997, gewijzigd in maart 1998, introductie licht gewijzigd in januari 2000

Deze syllabus hoorde bij het programma-onderdeel Abstracte Analyse voor eerstejaarsstudenten wiskunde, statistiek, dubbele propedeuse met wiskunde, en beta-gamma met specialisatie wiskunde. Met ingang van het studiejaar 1999–2000 wordt hij gebruikt bij de vakken Analyse 1A en Analyse 1B. De syllabus is bedoeld als aanvulling op en toelichting bij het boek "Mathematical Analysis, an Introduction" van A. Browder (Springer, 1996). De stof bestaat uit delen van Chapters 1–3 (voor Analyse 1A) en Chapter 6 (voor Analyse 1B) uit dit boek.

Dit vak lijkt tot op zekere hoogte op het onderdeel Calculus van Methoden en Technieken, maar onderscheidt zich er wezenlijk van in twee opzichten. Ten eerste worden de stellingen rigoureus bewezen, uitgaande van de axioma's die de verzameling $\mathbf{R}$ van de reëele getallen karakteriseren. Zo wordt de analyse als wiskundige theorie vergelijkbaar met bijv. de lineaire algebra of de groepentheorie. Ten tweede worden stellingen over rijen en functies op $\mathbf{R}$ in een breder kader geplaatst van topologische of metrische ruimtes. Stellingen voor het geval $\mathbf{R}$ blijken dan speciale gevallen te zijn van stellingen voor een algemenere ruimte. Het voordeel is dat duidelijk wordt wat je essentieel nodig hebt om de stelling te bewijzen, en dat de algemenere stelling ook tot allerlei andere ruimtes gespecialiseerd kan worden.

Het boek van Browder heeft een heel andere stijl dan de syllabi waar je tot nu toe mee gewerkt hebt. Het is een typisch wiskundeboek, zoals je er nog vele zult tegenkomen, en het is goed om in een vroeg stadium van je studie al met deze stijl kennis te maken. De aanvullende syllabus en het hoorcollege en werkcollege reiken je de hand om de "cultuurschok" te verzachten.

De syllabus loopt parallel aan de hoofdstukken uit het boek. Per hoofdstuk geeft de syllabus achtereenvolgens een lijstje errata, een opsomming van de delen van het hoofdstuk die behandeld zullen worden, een toelichting of aanvulling bij sommige definities, stellingen, voorbeelden etc. van het hoofdstuk, en een serie vraagstukken, sommige al gegeven in het boek, andere toegevoegd.

Eens per week krijg je op het werkcollege een of meer inlevervraagstukken op. Een schriftelijke toets wordt aan het eind van het trimester gehouden. De resultaten van de inlevervraagstukken zullen met een zekere weging meetellen bij de bepaling van het eindcijfer. Deze regeling geldt zowel bij Analyse 1A als bij Analyse 1B. (Bij het vroegere vak Abstracte Analyse werd er eens per week op het werkcollege enige tijd ingeruimd om een student iets te laten vertellen over een extra stukje stof uit het boek dat op het hoorcollege is overgeslagen. De studenten werden hiervoor bij toerbeurt aangewezen.)

Je volgt dit vak met het meeste profijt als je de op het hoorcollege te behandelen stof al van te voren doorleest en na afloop nogmaals, en vragen stelt over wat je niet begrepen hebt. Voor het werkcollege geldt iets soortgelijks. Je zult ook veel profijt hebben van het geregeld maken van de inleversommen en van het achteraf bekijken in het gecorrigeerde werk wat je fout hebt gedaan. Een precieze formulering is van groot belang bij dit vak. Dit leer je het beste door veelvuldige oefening met correctie achteraf.

De in de Syllabus toegevoegde stellingen, formules, vraagstukken, etc. krijgen een eigen nummering voorafgegaan door een S, om een onderscheid te hebben met de nummering van het boek. Vraagstukken voorzien van een ster (*) behoren niet tot de verplichte stof, omdat ze moeilijker zijn of computer algebra gebruiken of aansluiten bij stof die mogelijk in een studentenpresentatie aan de orde komt. In de syllabus is "desda" een afkorting van "dan en slechts dan als". Dus "A desda B" betekent "Als A dan B en als B dan A".

Waarschuwing In de Engelstalige wiskunde-conventie betekent "either ... or" hetzelfde als "or", en duidt niet op twee elkaar uitsluitende mogelijkheden. Het is dus correct om te zeggen: If $a \in \mathbf{R}$ then either $a \geq 0$ or $a \leq 0$. Dit is van belang in bijv. p.10, l.-2 en p.152, Exercise 24.

Zie voor aanvullende literatuur allereerst de literatuurlijsten in de syllabi Calculus Ia en Calculus Ib en in Browder's boek. Een klassieke, zeer gedegen maar ook heel compacte inleiding is Rudin's "Principles of Mathematical Analysis" (referentie [11] in Browder). Een andere goede inleiding is

R. S. Strichartz, *The way of analysis*, Jones and Bartlett, 1995.

Zie voor de opbouw van de reële getallen ook:

H.-D. Ebbinghaus e.a., *Numbers*, Graduate Texts in Math. 23, Springer, 3rd printing, 1995.

E. Landau, *Foundations of Analysis*, Chelsea Publishing Company, 1951.

Tenslotte kun je syllabi van de cursus 1995/96 raadplegen:

T. H. Koornwinder, Syllabus Analyse A3

A. B. Paalman-de Miranda, Syllabus topologie

Voor historische informatie is er, naast vele boeken, een website getiteld *MacTutor History of Mathematics archive*:

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/

Inhoudsopgave

Ch. 1	Real Numbers	pp. 3–11
Ch. 2	Sequences and Series	pp. 12–22
Ch. 3	Continuous Functions on Intervals	pp. 23–29
Ch. 6	Topology (deel 1, §6.1–6.4)	pp. 30–43
Ch. 6	Topology (deel 2, §6.5–6.7)	pp. 44–62

Chapter 1 "Real numbers"

Errata

p.12, Proof of Proposition 1.13: Replace first three sentences of the proof by the following: Apply condition (a) of Definition 1.12 in order to see that

$$\begin{aligned} 0 < a \quad &\Longrightarrow \quad 0 - a < a - a \quad \Longrightarrow \quad -a < 0, \\ -a < 0 \quad &\Longrightarrow \quad -a + a < 0 + a \quad \Longrightarrow \quad 0 < a. \end{aligned}$$

p.14, l.-2; p.15, l.1,3: replace "subset" by "nonempty subset" (three times)

p.20, l.-3: replace "constant" by "positive constant"

p.21, l.-2 of Example 1.32: replace $2 \cdot 2^{-n-1}/q^n$ by $2/q_n^{n+1}$

p.22, l.$-7, -6, -5, -4, -3$: Replace these five lines by the following:
Suppose that A is any nonempty subset of $\mathbf{R}$ which is bounded above. Put $\beta = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$. Then β is a subset of $\mathbf{Q}$ which satisfies conditions (a), (b), (c). Thus $\beta \in \mathbf{R}$. Then it can be easily shown that β is the least upper bound of A. Thus $\beta = \sup A$. The existence of $\mathbf{R}$ is thus established.

p.25, Exercise 17, l.1: replace $\mathbf{R}$ by $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$

p.26, l.-7: replace "Theorem 1.10" by "Theorem 1.19"

Toelichting bij Chapter 1

Uit Hoofdstuk 1 zullen we behandelen:
1.1 Sets, Relations, Functions (herhaling van "Taal der Wiskunde")
1.2 Numbers
1.5 Ordered fields
1.6 Functions on $\mathbf{R}$
1.7 Intervals in $\mathbf{R}$
1.9 Existence of $\mathbf{R}$

Mogelijke onderwerpen voor presentaties zijn: Example 1.15, Theorem 1.23 en §1.8.

Re: 1.1. *Sets, Relations, Functions*

Kijk vooral naar de onderdelen 1 (equivalentierelatie) en 2 (orderelatie). Die hebben we zodadelijk nodig. T.a.v. orderelatie zullen we voorlopig niet zozeer met een algemene partiële orde te maken hebben, maar met het speciale geval van een totale orde:

Definitie S1.1 Een *totale orde* op een verzameling X is een relatie $<$ op X die voldoet aan de twee voorwaarden:

1. Voor alle $x, y, z \in X$ geldt: als $x < y$ en $y < z$ dan $x < z$;
2. Voor alle $x, y \in X$ geldt: òf $x < y$ òf $y < x$ òf $x = y$ (een en slechts een van deze drie mogelijkheden).

Re: 1.2. *Numbers*

We beschouwen de verzameling $\mathbf{N}$ van de natuurlijke getallen als gegeven. Dan construeren we eerst de verzameling $\mathbf{Z}$ van gehele getallen uit $\mathbf{N}$, en vervolgens de verzameling $\mathbf{Q}$ van de rationale getallen uit $\mathbf{Z}$. Beide constructies komen er op neer dat een geschikte equivalentierelatie gelegd wordt op de verzameling van geordende paren van elementen uit de vorige verzameling, en dat de nieuwe verzameling dan gedefinieeerd wordt als de collectie van equivalentieklassen t.o.v. deze equivalentierelatie. Algebraïsche operaties en een ordeningsrelatie op de verzameling van equivalentieklassen kunnen dan gedefinieerd worden in termen van algebraïsche operaties en de ordeningsrelatie op de oude verzameling.

Voor de constructie van $\mathbf{Z}$ beschouwen we $\mathcal{Z} := \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ bestaande uit alle geordende paren (m, n) van natuurlijke getallen. Op $\mathcal{Z}$ definiëren we een equivalentierelatie door de regel

$$(m, n) \sim (j, k) \quad \Longleftrightarrow \quad m + k = n + j.$$

Ter motivatie van deze regel nemen we even aan dat we de verzameling van gehele getallen al kennen (de verzameling $\mathbf{Z}$ waar we al lang mee vertrouwd zijn). Een geordend paar (m, n) bepaalt dan een geheel getal $m - n$. Daarom beschouwen we (m, n) en (j, k) als equivalent desda $m - n = j - k$, i.e., desda $m + k = n + j$.

We duiden de equivalentieklasse van (m, n) aan met $[m, n]$. De verzameling van al deze equivalentieklassen noemen we $\mathbf{Z}$. We kunnen nu optelling, vermenigvuldiging en ordening op $\mathbf{Z}$ invoeren zoals in het boek. Ook deze definities kun je weer begrijpen door eventjes $m - n$ i.p.v. $[m, n]$ te schrijven. Bijvoorbeeld:

$$(m - n) + (j - k) = (m + j) - (n + k) \quad \text{suggereert} \quad [m, n] + [j, k] := [m + j, n + k].$$

Je moet er bij dit soort definities altijd op gespitst zijn dat nagegaan moet worden of de definitie eenduidig is, d.w.z. onafhankelijk van de keuze van de representanten van de equivalentieklassen. Bijvoorbeeld in bovenstaande definitie van optelling op $\mathbf{Z}$ kan $[m + j, n + k]$ niet zondermeer verkregen worden uit $[m, n]$ en $[j, k]$, maar wel uit representanten (m, n) en (j, k) van de equivalentieklassen $[m, n]$ en $[j, k]$. Dus moet nog nagegaan worden dat andere representanten (m', n') en (j', k') van $[m, n]$ en $[j, k]$ een equivalentieklasse $[m' + j', n' + k']$ leveren die gelijk is aan de equivalentieklasse $[m + j, n + k]$.

Vervolgens kan $\mathbf{N}$ injectief ingebed worden in $\mathbf{Z}$ door de afbeelding

$$\phi \colon k \mapsto [k + 1, 1] \colon \mathbf{N} \to \mathbf{Z}.$$

Deze afbeelding ϕ bewaart de structuur van optelling, vermenigvuldiging en ordening. We kunnen nu ook een element $0 := [1, 1]$ in $\mathbf{Z}$ invoeren, dat de eigenschap heeft dat $[m, n] + 0 = [m, n]$ voor ieder element $[m, n]$ uit $\mathbf{Z}$. Wezenlijk nieuw voor $\mathbf{Z}$ vergeleken met $\mathbf{N}$ is dat ieder element $[m, n]$ van $\mathbf{Z}$ een *tegengesteld* element $-[m, n] := [n, m]$ heeft, i.e., zo dat $[m, n] + (-[m, n]) = 0$. Voortaan schrijven we een element $[m, n]$ van $\mathbf{Z}$ als $m - n$ of $-(n - m)$.

Voor de constructie van $\mathbf{Q}$ beschouwen we $\mathcal{Q} := \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$ bestaande uit alle geordende paren (m, n) van gehele getallen zo dat $n \neq 0$. Op $\mathcal{Q}$ definiëren we een equivalentierelatie door de regel

$$(m, n) \sim (j, k) \quad \Longleftrightarrow \quad mk = nj.$$

Ook hier wordt de motivatie gegeven door al even aan te nemen dat $\mathbf{Q}$ is ingevoerd. Een geordend paar (m,n) bepaalt dan een rationaal getal m/n. Daarom beschouwen we (m,n) en (j,k) als equivalent desda $m/n = j/k$, i.e., desda $mk = nj$.

We duiden de equivalentieklasse van (m,n) aan met m/n. (Let op dat dit eerst nog een formele notatie is en dat deze nog niet de betekenis heeft dat $m/n = m\,n^{-1}$, maar zodadelijk wel.) De verzameling van al deze equivalentieklassen noemen we $\mathbf{Q}$. We kunnen nu optelling, vermenigvuldiging en ordening op $\mathbf{Q}$ invoeren zoals in het boek. Dan kan $\mathbf{Z}$ injectief ingebed worden in $\mathbf{Q}$ door de afbeelding $m \mapsto m/1$, en deze afbeelding bewaart alle structuur van $\mathbf{Z}$. Het element 1 van $\mathbf{N}$, dat via de inbedding van $\mathbf{N}$ in $\mathbf{Z}$ al als een element van $\mathbf{Z}$ beschouwd kon worden, wordt dus ook een element van $\mathbf{Q}$ via de inbedding van $\mathbf{Z}$ in $\mathbf{Q}$, nl. het element $1 := 1/1$. Dit element heeft de eigenschap dat $(m/n)\,1 = m/n$ voor elk element m/n uit $\mathbf{Q}$. Nieuw in $\mathbf{Q}$ vergeleken met $\mathbf{Z}$ is dat elk element $m/n \neq 0$ van $\mathbf{Q}$ een *invers* element $(m/n)^{-1} := n/m$ heeft, i.e., zo dat $(m/n)\,(m/n)^{-1} = 1$.

Re: 1.5. *Ordered fields*

Equivalent met de axioma's voor een lichaam zoals gegeven in Definition 1.9 zijn de volgende axioma's, die je ook al bij het vak Algebra bent tegengekomen.

Definitie S1.2 Een *lichaam* is een verzameling K met twee afbeeldingen

$(a,b) \mapsto a+b \colon K \times K \to K$ (optelling);

$(a,b) \mapsto ab \colon K \times K \to K$ (vermenigvuldiging)

met de volgende eigenschappen:

1. voor alle $a,b,c \in K$, $(a+b)+c = a+(b+c)$;
2. voor alle $a,b \in K$, $a+b = b+a$;
3. er bestaat een element $0 \in K$ zo dat $a+0 = a$ voor alle $a \in K$ (dan is 0 uniek);
4. voor alle $a \in K$ bestaat er een element $-a \in K$ zo dat $a+(-a) = 0$ (dan is $-a$ uniek bepaald door a);
5. voor alle $a,b,c \in K$, $(ab)c = a(bc)$;
6. voor alle $a,b \in K$, $ab = ba$;
7. er bestaat een element $1 \in K$ zo dat $1 \neq 0$ en $a1 = a$ voor alle $a \in K$ (dan is 1 uniek);
8. voor alle $a \in K \backslash \{0\}$ bestaat er een element $a^{-1} \in K$ zo dat $aa^{-1} = 1$ (dan wordt a^{-1} uniek bepaald door a);
9. voor alle $a,b,c \in K$, $a(b+c) = ab+ac$.

Merk als gevolg van deze Definitie op dat in een lichaam K o.a. geldt:

(i) $a0 = 0$ voor alle $a \in K$;

(ii) Als $a,b \in K$ en $ab = 0$ dan $a = 0$ of $b = 0$;

(iii) Laat $a \in K$, $n \in \mathbf{N}$. Definieer inductief $na \in K$ zoals onderaan p.11. Dan $na = (n1)\,a$. Als $a \neq 0$ dan: $na = 0 \Leftrightarrow n1 = 0$. We noemen K een *lichaam van karakteristiek 0* als $n1 \neq 0$ voor alle $n \in \mathbf{N}$.

(iv) (zie bovenaan p.12) Het lichaam $\mathbf{Q}$ is van karakteristiek 0. Elk lichaam van karakteristiek 0 bevat een kleinste sublichaam dat op natuurlijke wijze isomorf is met $\mathbf{Q}$.

Definition 1.12 Een *geordend lichaam* is een lichaam K samen met een totale orde $<$ op K zo dat voor alle $a, b, c \in K$ het volgende geldt:

(a) als $a < b$ dan $a + c < b + c$;

(b) als $a < b$ en $c > 0$ dan $ac < bc$.

Deze definitie van *geordend lichaam* is van groot belang. Merk op (Proposition 1.13(d)) dat een geordend lichaam altijd van karakteristiek 0 is.

Definition 1.16 We behandelen hier nog eens in andere woorden de definities van bovengrens en kleinste bovengrens. Zij X een totaal geordende verzameling en S een deelverzameling van X.

We noemen $M \in X$ een *bovengrens* van S als $x \le M$ voor alle $x \in S$. Als S een bovengrens bezit dan noemen we S *naar boven begrensd*. Merk hierbij het volgende op:

(a) Het is mogelijk dat S geen bovengrens in X heeft. Neem bijv. $S := \mathbf{N}$, $X := \mathbf{Q}$.

(b) Een bovengrens M van S die bovendien in S ligt heet een *maximum* van S. Merk op dat S hoogstens één maximum heeft. Als S een maximum M heeft dan geldt voor elke bovengrens M' van S dat $M' \ge M$, dus dan is M de kleinste bovengrens van S.

(c) Het is mogelijk dat S een bovengrens heeft, maar geen maximum. Zij bijv. $X := \mathbf{Q}$, $S := \{x \in \mathbf{Q} \mid x < 0\}$.

(d) Als M een bovengrens is van S en als $M' \in X$ zo dat $M' \ge M$ dan is M' een bovengrens van S. Zij $\mathcal{M}_S$ de verzameling van alle bovengrenzen van S en zij $(\mathcal{M}_S)^C$ het complement van $\mathcal{M}_S$ in X, dus X is de disjuncte vereniging van $\mathcal{M}_S$ en $(\mathcal{M}_S)^C$. Dan geldt voor elke $M \in \mathcal{M}_S$ en $m \in (\mathcal{M}_S)^C$ dat $m < M$.

Op een soortgelijke manier definiëren we de begrippen *ondergrens* en *minimum*. Als S een ondergrens bezit dan noemen we S *naar beneden begrensd*. De verzameling S heet *begrensd* als S zowel naar boven als naar beneden is begrensd.

We noemen $M \in X$ een *kleinste bovengrens* van S als geldt:

1. M is een bovengrens van S.
2. Voor elke bovengrens M' van S geldt dat $M' \ge M$.

Een kleinste bovengrens is dus precies wat de naam zegt: de kleinste van alle bovengrenzen. We noteren de kleinste bovengrens van S met $\sup S$. Merk nog het volgende op:

(e) Voor $M \in X$ geldt:
M is kleinste bovengrens van S desda M is minimum van $\mathcal{M}_S$.

(f) S heeft hoogstens één kleinste bovengrens.

(g) Het is mogelijk dat S geen kleinste bovengrens heeft, bijv. Example 1.17, waarin $X := \mathbf{Q}$ en $S := \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 < 2\}$.

(h) Het is mogelijk dat S een kleinste bovengrens heeft die geen maximum van S is, dus geen element van S is. Zij bijv. het voorbeeld in opmerking (c). Daar is $\sup S = 0$ en $0 \notin S$.

(i) Zij $M \in X$. Dan is M een kleinste bovengrens van S desda geldt:
M is een bovengrens van S en elke $M' \in X$ met $M' < M$ is geen bovengrens van S.

Op een soortgelijke manier definiëren we het begrip *grootste ondergrens* van S, wat we noteren als $\inf S$. We noemen $m \in X$ een *grootste ondergrens* van S als geldt:

1. m is een ondergrens van S.
2. Voor elke ondergrens m' van S geldt dat $m' \leq m$.

Definition 1.18 Een geordend lichaam K heet *volledig* als elke niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van K een kleinste bovengrens heeft. In het vervolg bedoelen we met het lichaam $\mathbf{R}$ van de *reële getallen* een volledig geordend lichaam.

Theorem 1.19 (*Archimedische eigenschap*)
Zij $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. Dan bestaat er voor elke $M \in \mathbf{R}$ een $n \in \mathbf{N}$ zo dat $n\varepsilon > M$.

Deze eigenschap is een belangrijk gevolg van de sup-eigenschap van $\mathbf{R}$. De eigenschap lijkt evident, maar is dat niet gezien tegenvoorbeelden van niet-volledige geordende lichamen zonder de Archimedische eigenschap. De essentie van de Archimedische eigenschap kan reeds voor $\varepsilon := 1$ en $M > 0$ geformuleerd worden:

Voor ieder reëel getal $M > 0$ is er een natuurlijk getal $n > M$.

Dus, hoe groot we het reële getal M ook nemen, er bestaat een natuurlijk getal dat groter is. Een direct gevolg, bevat in het bewijs van Proposition 1.22, is als volgt:

Voor ieder reëel getal $\varepsilon > 0$ is er een natuurlijk getal n zo dat $1/n < \varepsilon$.

Dus, hoe klein we het positieve reële getal ε ook nemen, er is altijd een inverse van een natuurlijk getal dat kleiner is.

Definition 1.21 Zij $E \subset \mathbf{R}$. We noemen E een *dichte deelverzameling van* $\mathbf{R}$ als voor elke $x \in \mathbf{R}$ geldt dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $t \in E$ bestaat zo dat $x - \varepsilon < t < x + \varepsilon$.

Met andere woorden, E ligt dicht in $\mathbf{R}$ desda voor elke $x \in \mathbf{R}$ willekeurig kleine open intervallen $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ rond x een niet-lege doorsnede met E hebben.

Proposition 1.22 $\mathbf{Q}$ ligt dicht in $\mathbf{R}$.

Re: 1.6. *Functions on* R

De verzameling $\mathbf{R}_+$ is gedefinieerd als de verzameling van niet-negatieve reële getallen, dus $\mathbf{R}_+ := \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$. Kijk vooral naar:

Theorem 1.25 Zij $n \in \mathbf{N}$. Dan is de afbeelding $x \mapsto x^n \colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ bijectief. Met andere woorden, bij iedere reële $y \geq 0$ bestaat er een unieke reële $x \geq 0$ zo dat $x^n = y$.

Deze Stelling lijkt evident, maar maakt wezenlijk gebruik van de sup-eigenschap van $\mathbf{R}$. Het feit dat $x \mapsto x^n \colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ bijectief is, stelt ons dan in staat om de inverse afbeelding $y \mapsto y^{1/n} \colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ te definiëren.

Re: 1.7. *Intervals in* $\mathbf{R}$

Theorem 1.27 (*Stelling van Cantor; Stelling van de intervalschakeling*)
Laat $J_1 \supset J_2 \supset \ldots$ een oneindige geneste rij zijn van niet-lege gesloten begrensde intervallen $J_n \subset \mathbf{R}$ ($n \in \mathbf{N}$). Dan is de doorsnede $\cap_{n=1}^{\infty} J_n$ niet-leeg, m.a.w., er bestaat een $c \in \mathbf{R}$ zo dat $c \in J_n$ voor elke $n \in \mathbf{N}$.

Omgekeerd geldt:

Stelling S1.3 Laat K een geordend lichaam zijn waarin Theorem 1.27 (intervalschakeling) en Theorem 1.19 (Archimedische eigenschap) geldig zijn. Dan is K volledig.

$\star$ **Bewijs** Laat $S \subset K$ een niet-lege naar boven begrensde verzameling zijn. We moeten bewijzen dat S een kleinste bovengrens heeft. Neem $a_0 \in S$ en een bovengrens b_0 van S. Als a_0 tevens een bovengrens is van S dan zijn we klaar. Stel dat a_0 geen bovengrens is. Zij $\mathcal{M}_S$ de verzameling van alle bovengrenzen van S en zij $(\mathcal{M}_S)^C$ het complement van $\mathcal{M}_S$ in K. Dan is $a_0 \in (\mathcal{M}_S)^C$ en $b_0 \in \mathcal{M}_S$. Definieer inductief $a_n \in (\mathcal{M}_S)^C$ en $b_n \in \mathcal{M}_S$ als volgt: Als $\frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) \in (\mathcal{M}_S)^C$ dan $a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$, $b_n := b_{n-1}$; als $\frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) \in \mathcal{M}_S$ dan $a_n := a_{n-1}$, $b_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$. De intervallen $J_n := [a_n, b_n]$ voldoen aan de voorwaarden van Theorem 1.27 dus er bestaat $c \in \mathbf{R}$ zo dat $a_n \le c \le b_n$ voor elke $n \in \mathbf{N}$. Met volledige inductie zien we ook in dat $b_n - a_n = (b_0 - a_0)/2^n$, dus $c - a_n \le (b_0 - a_0)/2^n$ en $b_n - c \le (b_0 - a_0)/2^n$. Uit Theorem 1.19 volgt nu dat er voor elke $x > c$ een $n \in \mathbf{N}$ bestaat zo dat $b_n < x$ en dat er voor elke $x < c$ een $n \in \mathbf{N}$ bestaat zo dat $a_n > x$. Nu kunnen we inzien dat $c = \sup S$. Want:

(i) Als $x > c$ dan is x groter dan een zekere bovengrens b_n dus x kan niet in S liggen. Dus $c \ge y$ voor alle $y \in S$, dus c is een bovengrens.
(ii) Als $x < c$ dan is x kleiner dan een zekere niet-bovengrens a_n, dus x kan geen bovengrens zijn. Dus $c \le y$ voor elke bovengrens y. ∎

Theorem 1.28 De kardinaliteit van het interval $(0, 1)$ is overaftelbaar. Meer algemeen: elke deelverzameling van $\mathbf{R}$ die een open interval (a, b) bevat, heeft overaftelbare kardinaliteit. Het bewijs maakt gebruik van Theorem 1.27 (intervalschakeling).

Re: 1.9. *Existence of* $\mathbf{R}$

Deze paragraaf bewijst de existentie en uniciteit (op isomorfisme na) van een volledig geordend lichaam. Dit rechtvaardigt dat we een volledig geordend lichaam met $\mathbf{R}$ aanduiden. Door het existentiebewijs weten we dat we niet bezig zijn om luchtkastelen te maken. Door het uniciteitsbewijs weten we dat er geen verwarring kan zijn over wat we met $\mathbf{R}$ bedoelen.

Het existentiebewijs gaat met de zogenaamde *sneden van Dedekind*. Het idee hierachter is dat we alvast even aannemen dat een volledig geordend lichaam $\mathbf{R}$ bestaat. Dit bevat $\mathbf{Q}$ als een deellichaam. Met elke $x \in \mathbf{R}$ associëren we de deelverzameling $\overline{x} := \{r \in \mathbf{Q} \mid r < x\}$ van $\mathbf{Q}$. Dan voldoet $\overline{x}$, als deelverzameling van $\mathbf{Q}$, aan de eigenschappen (a), (b), (c) in het bewijs van Theorem 1.33. Ook kunnen we x uit $\overline{x}$ terugvinden door de kleinste bovengrens van $\overline{x}$ als deelverzameling van $\mathbf{R}$ te nemen. Nu blijkt dat elke deelverzameling α van $\mathbf{Q}$ die voldoet aan de eisen (a), (b), (c), uniek te schrijven is als $\alpha = \overline{x}$ voor zekere $x \in \mathbf{R}$, dus dat we de verzameling van reële getallen binnen $\mathbf{Q}$

kunnen terugvinden als de collectie van alle deelverzamelingen van $\mathbf{Q}$ die aan (a), (b), (c) voldoen. In het bewijs van Theorem 1.33 wordt deze collectie reeds $\mathbf{R}$ genoemd; laten wij deze collectie voorlopig $\mathcal{R}$ noemen.

De volgende opgave is om op $\mathcal{R}$ de structuur van een geordend lichaam te zetten. Ook hier worden we weer geleid door er al eventjes van uit te gaan dat elk element α van $\mathcal{R}$ te schrijven is als $\alpha = \overline{x}$ voor zekere $x \in \mathbf{R}$. Voor $x, y \in \mathbf{R}$ geldt: $x < y$ desda $\overline{x} \subsetneq \overline{y}$. Dit motiveert om als ordening in $\mathcal{R}$ te definiëren:

$$\alpha < \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \subsetneq \beta.$$

Dan moeten we wel weer nagaan dat we $\mathcal{R}$ zo tot een totaal geordende verzameling hebben gemaakt.

Evenzo merken we op dat voor $x, y, z \in \mathbf{R}$ geldt: $z = x + y$ desda $\overline{z} = \{a + b \mid a \in \overline{x},\ b \in \overline{y}\}$. Dit motiveert om als optelling in $\mathcal{R}$ te definiëren:

$$\alpha + \beta := \{a + b \mid a \in \alpha,\ b \in \beta\}.$$

Ook hiervan moet worden nagegaan dat aan de optellingsaxioma's voldaan is.

Een soortgelijke motivatie kan worden gegeven voor de definitie van de elementen 0, 1, $-\alpha$ en $\alpha \cdot \beta$ van $\mathcal{R}$ (bij gegeven $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$) alsmede α^{-1} ($\alpha \in \mathcal{R} \backslash \{0\}$).

We geven nog in detail het bewijs dat $\mathcal{R}$ de sup-eigenschap heeft. Zij A een niet-lege deelverzameling van $\mathcal{R}$ die naar boven begrensd is. Definieer een deelverzameling β van $\mathbf{Q}$ door $\beta = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$. We zullen bewijzen dat $\beta \in \mathcal{R}$ en dat $\beta = \sup A$. Om in te zien dat $\beta \in \mathcal{R}$ moeten we eigenschappen (a), (b) en (c) nagaan.

ad (a) Zij $q \in \beta$, $r \in \mathbf{Q}$ en $r < q$. Dan is er een $\alpha \in A$ zo dat $q \in \alpha$. Omdat α aan (a) voldoet, zal $r \in \alpha$. Dus $r \in \beta$.

ad (b) Stel dat β een grootste element q heeft. Dan is er een $\alpha \in A$ zo dat $q \in \alpha$. Omdat $\alpha \subset \beta$ is dan $r \leq q$ voor elke $r \in \alpha$. Dus q is het grootste element van α, een tegenspraak.

ad (c) Omdat A niet leeg is, is er een $\alpha \in \mathcal{R}$ met $\alpha \subset \beta$, dus β is niet leeg omdat α niet leeg is. Omdat A naar boven begrensd is, is er een $\gamma \in \mathcal{R}$ met $\gamma \supset \alpha$ voor elke $\alpha \in A$. Dus $\gamma \supset \beta$. Omdat $\gamma \neq \mathbf{Q}$, zal $\beta \neq \mathbf{Q}$.

Nu bewijzen we dat $\beta = \sup A$. Voor elke $\alpha \in A$ geldt dat $\alpha \subset \beta$ dus $\alpha \leq \beta$. Dus β is een bovengrens van A. Als $\gamma \in \mathcal{R}$ een bovengrens van A is, dan geldt voor elke $\alpha \in A$ dat $\alpha \leq \gamma$, dus $\alpha \subset \gamma$. Dus $\beta \subset \gamma$ omdat β de vereniging is van alle $\alpha \in A$. Dus $\beta \leq \gamma$. Dus β is de kleinste bovengrens van A.

Opgaven bij Chapter 1

Opg. S1.1 Exercise 4 in Browder, onderdelen (a) en (b). (De tweede formule in (b) heet het *Binomium van Newton.*)

Opg. S1.2 Exercise 12 in Browder.

Opg. S1.3 Een geordend lichaam K heeft de *sup-eigenschap* als elke (niet-lege) naar boven begrensde verzameling S in K een kleinste bovengrens (in K) heeft. We zeggen dat K de *inf-eigenschap* heeft als elke naar beneden begrensde verzameling S een grootste ondergrens heeft. Laat nu zien dat een geordend lichaam K tegelijkertijd de sup-eigenschap èn de inf-eigenschap bezit, of geen van beide.

Opg. S1.4 Zij K een geordend lichaam. Laat zien dat:

(a) als $a, b, c \in K$ zo zijn dat $c < a + b$ je $\alpha, \beta \in K$ kunt vinden met $\alpha < a$, $\beta < b$ en $c = \alpha + \beta$;

(b) voor alle $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ met $c < a \cdot b$ er $\alpha, \beta \in K$ zijn met $0 < \alpha < a$, $0 < \beta < b$ en $c = \alpha \cdot \beta$.

Opg. S1.5 Geef supremum en infimum van de volgende verzamelingen (voor zover ze bestaan). Motiveer je antwoord.

(a) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\}$ in $\mathbf{Q}$.

(b) $\{p \in \mathbf{N} \mid p \text{ priemgetal}\}$ in $\mathbf{N}$.

(c) $\{q \in \mathbf{Q} \mid q^2 < 3\}$ in $\mathbf{Q}$.

(d) $\{q \in \mathbf{Q} \mid q^2 < 5\}$ in $\mathbf{R}$.

(e) $\{\frac{1}{m^2-9m+21} \mid m \in \mathbf{Z}\}$ in $\mathbf{R}$.

(f) $\{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x(x-1) \leq 1\}$ in $\mathbf{R}$.

Welke van deze verzamelingen hebben een minimaal en/of maximaal element?

Opg. S1.6 Zij X een totaal geordende verzameling. Zij S een niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van X. Zij $\mathcal{M}_S$ de verzameling van bovengrenzen van S.

(a) Bewijs dat elke $x \in S$ een ondergrens van $\mathcal{M}_S$ is.

(b) Stel dat $\mathcal{M}_S$ een grootste ondergrens m heeft. Bewijs dat m de kleinste bovengrens van S is.

Opg. S1.7 Voor twee begrensde verzamelingen A en B in een volledig geordend lichaam K definiëren we de *som* $A + B$ en het *produkt* $A \cdot B$ als

$$A + B := \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$$
$$A \cdot B := \{a \cdot b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

(a) Laat zien dat $A + B$ en $A \cdot B$ ook begrensd zijn (als A en B 't zijn).

(b) Toon aan dat

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$$
$$\sup(-A) = -\inf(A),$$

waar $-A := \{-1\} \cdot A$.

(c) Bewijs of weerleg:

$$\inf(A \cdot B) = \inf(A) \cdot \inf(B).$$

(d) Als je weet dat A en B alleen positieve elementen bevatten, geldt dan

$$\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)?$$

$\star$ **Opg. S1.8** Zet $M = \{n - m\sqrt{2} \mid n, m \in \mathbf{Z},\quad n - m\sqrt{2} < \pi\}$. Wat is $\sup(M)$?

⋆ **Opg. S1.9** Exercise 16 in Browder.

⋆ **Opg. S1.10** Exercise 17 in Browder (met $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$). Kun je ook zoveel verschillende rationale getallen m/n vinden met $|\alpha - m/n| < \frac{2}{n^3}$?

Opg. S1.11 Exercise 18 in Browder.

⋆ **Opg. S1.12** Lees Example 1.15 in Browder nog eens door. Neem je $K = \mathbf{R}$ dan krijg je 't geordende lichaam $\mathbf{R}(X)$. (De zo verkregen ordening op de polynomen noemen we wel de *lexicografische ordening*).

(a) Toon aan dat $\mathbf{R}(X)$ net als $\mathbf{Q}(X)$ <u>niet</u> de Archimedische eigenschap bezit.

(b) Geef een voorbeeld van een rij $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ van niet-lege gesloten intervallen in $\mathbf{R}(X)$, met $J_1 \supset J_2 \supset \ldots$, maar $\cap_{n=1}^{\infty} J_n = \emptyset$.

Hint Heeft de rij $\{nX\}_{n=1}^{\infty}$ een kleinste bovengrens in $\mathbf{R}(X)$?

Opg. S1.13 Geef een zo kort mogelijk argument waarom het lichaam K uit Exercise 11 (Browder; $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$) niet volledig kan zijn (ook al is het “gat” van $\mathbf{Q}$ bij $\sqrt{2}$ gedicht).

Chapter 2 “Sequences and Series”

Errata

p.30, Lemma 2.5, l.2: The second inequality only holds if $t \geq 0$.

p.34, Proposition 2.15, l.1: replace “sequence” by “bounded sequence”.

p.35, Proposition 2.16, l.1: replace “sequences” by “bounded sequences”.

p.35, Proposition 2.16(d), l.2: replace vlim by lim

pp. 41,43, Examples 2.33, 2.34 and 2.41: n^{-s} for s real but irrational is defined at p.66.

p.42, Proof of Theorem 2.37, l.2: Skip:
“$|a_{n+1}/a_n - \mu| < x - \mu$ for all $n \geq m$, and hence”

Toelichting bij Chapter 2

Uit Hoofdstuk 2 zullen we behandelen:
2.1 Sequences
2.3 Infinite Series
Deze onderwerpen zijn ook al behandeld in de syllabus Calculus Ib, hst. VII (Reeksen), echter veelal zonder bewijs. In de tabel hieronder vermelden we welk Theorem etc. in Browder’s boek of in deze syllabus correspondeert met welke plaats in de syllabus Calculus Ib.

Browder’s book	syllabus Calculus Ib, hst. VII
Definition 2.1	Definitie p.31
Proposition 2.2	Stelling p.32
Propositie S2.4	Knijpstellingen, p.32
Example 2.4	De harmonische reeks p.36
Proposition 2.6	standaardlimieten p.33
Proposition 2.27	Stelling p.39, Bewijs p.40
Proposition 2.28	Stelling p.38
Corollary 2.30	Stelling (vergelijkingskenmerk) p.41
Corollary 2.31	Stelling p.45
Example 2.34	Voorbeeld, p.35
Example 2.35	De meetkundige reeks, p.39
Propositie S2.8	Stelling (limietkenmerk) p.41, Bewijs p.43
Theorem 2.36	Stelling (wortelkenmerk), p.47
Theorem 2.37	Stelling (quotiëntenkenmerk), p.46
Corollary 2.45	Stelling (kenmerk van Leibniz), p.46
Proposition 4.35	p.50 (convergentiestraal machtreeks)

Mogelijke onderwerpen voor presentaties zijn: Example 2.7, Example 2.8, Opmerking S2.5, Propositie S2.6.

Re: 2.1. *Sequences*

De belangrijkste stellingen uit deze paragraaf zijn Theorem 2.17 (*Stelling van Bolzano-Weierstrass*) en Theorem 2.19 (*Stelling van Cauchy*).

Definition 2.1 In plaats van $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ kan uiteraard ook geschreven worden: $|x - x_n| < \varepsilon$. In plaats van de uitspraak

er bestaat $n_0 \in \mathbf{N}$ zo dat $|x - x_n| < \varepsilon$ voor iedere $n \geq n_0$

zullen we ook zeggen:

op den duur is $|x - x_n| < \varepsilon$

Algemener, als $B(n)$ een van $n \in \mathbf{N}$ afhankelijke berwering is die waar of niet waar kan zijn, dan zullen we in plaats van de uitspraak

er bestaat $n_0 \in \mathbf{N}$ zo dat $B(n)$ geldt voor iedere $n \geq n_0$

ook zeggen:

op den duur geldt $B(n)$

Zie ook de opmerking hierover in syllabus Calculus Ia, hst. I, p.22.

Propositie S2.1 Als een oneindige rij (x_n) in $\mathbf{R}$ convergeert, dan is zijn limiet uniek.

Bewijs Stel dat de rij (x_n) limieten x en y in $\mathbf{R}$ heeft met $x \neq y$. Dan bestaat er $n \in \mathbf{N}$ zo dat $|x - x_n| < \frac{1}{2}|x - y|$ en $|y - x_n| < \frac{1}{2}|x - y|$. Dus $|x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| < |x - y|$, dus $|x - y| < |x - y|$, een tegenspraak. ∎

Propositie S2.2 Laat (x_n) een oneindige rij zijn in $\mathbf{R}$ met $x_n > 0$ voor alle n. Dan geldt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (x_n)^{-1} = 0.$$

Bewijs De volgende vier beweringen zijn equivalent:

(a) $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

(b) Voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een $n_0 \in \mathbf{N}$ zo dat $x_n > \varepsilon^{-1}$ voor alle $n \geq n_0$.

(c) Voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een $n_0 \in \mathbf{N}$ zo dat $|(x_n)^{-1}| < \varepsilon$ voor alle $n \geq n_0$.

(d) $\lim_{n\to\infty} (x_n)^{-1} = 0$. ∎

Proposition 2.3 Deze Propositie, een direct gevolg van de definitie van limiet, was niet vermeld in syllabus Calculus Ib, Hst. VII, maar is belangrijk genoeg om te onthouden. In andere woorden zegt het eerste deel van de Propositie:

Als de termen van een convergente rij in $\mathbf{R}$ op den duur ≥ 0 zijn dan is de limiet ≥ 0.

Pas op, als de termen van een convergente rij in $\mathbf{R}$ op den duur > 0 zijn dan is de limiet gezien de vorige uitspraak ≥ 0, maar we mogen niet concluderen dat de limiet > 0 is. Het tweede deel van de Propositie zegt:

Als de termen van een convergente rij in $\mathbf{R}$ op den duur in een gesloten begrensd interval $[a, b]$ liggen, dan ligt de limiet ook in $[a, b]$.

Gevolg S2.3 Als (x_n) en (y_n) convergente rijen in $\mathbf{R}$ zijn en als voor zekere $k \in \mathbf{N}$ geldt dat $x_n \geq y_n$ als $n \geq k$, dan $\lim x_n \geq \lim y_n$.

Propositie S2.4 (*knijpstellingen*)
(a) Laten (a_n) en (b_n) convergente rijen in $\mathbf{R}$ zijn met de zelfde limiet L en zo dat op den duur $a_n \leq b_n$. Als (x_n) een oneindige rij in $\mathbf{R}$ is zo dat op den duur $a_n \leq x_n \leq b_n$, dan is de rij (x_n) convergent met limiet L.

(b) Laat (a_n) een oneindige rij in $\mathbf{R}$ is met $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Als (x_n) een oneindige rij in $\mathbf{R}$ is zo dat op den duur $x_n \geq a_n$, dan geldt dat $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Bewijs (a) Laat $\varepsilon > 0$. Op den duur geldt dat

$$L - \varepsilon < a_n \leq x_n \leq b_n < L + \varepsilon.$$

Dus op den duur geldt dat $|L - x_n| < \varepsilon$.

(b) Laat $M \in \mathbf{R}$. Op den duur geldt dat $x_n \geq a_n > M$. ∎

Proposition 2.6 De triviaal ogende uitspraken $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ en $\lim_{n\to\infty} n^{-1} = 0$ gebruiken wezenlijk de Archimedische eigenschap. Sommige delen van het bewijs van de Propositie kunnen iets versneld worden door gebruik van Propositie S2.2. De voorlaatste zin van het bewijs gebruikt de knijpstelling Propositie S2.4(a). Het bewijs dat $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ kan in het geval $a \geq 1$ ook als volgt gegeven worden:

Laat $\varepsilon > 0$. Op den duur geldt dat $1 \leq a < 1 + n\varepsilon$ (nl. als $n > (a-1)/\varepsilon$). Dus, gezien Lemma 2.5, geldt op den duur dat $1 \leq a < (1+\varepsilon)^n$, dus op den duur geldt dat $1 \leq a^{1/n} < 1 + \varepsilon$. ∎

Example 2.7 Het boek geeft een algoritme om iedere $x \in [0,1)$ als een (mogelijk oneindige) "decimale" breuk

$$x = 0.d_1 d_2 \ldots \qquad (d_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}) \tag{S2.1}$$

in het b-tallig stelsel te schrijven, d.w.z. zo dat voor elke $n \in \mathbf{N}$ geldt dat

$$0 \leq x - x_n < b^{-n} \quad \text{waarbij} \quad x_n := d_1 b^{-1} + d_2 b^{-2} + \cdots d_n b^{-n}, \tag{S2.2}$$

dus

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x. \tag{S2.3}$$

Het inductieve algoritme luidt:

$$\begin{aligned} &d_1 := [bx], \quad x_1 := d_1/b \quad \text{(startwaarden)};\\ &d_{k+1} := [b^{k+1}(x - x_k)], \quad x_{k+1} := x_k + d_{k+1} b^{-k-1} \quad \text{(inductieve stap)}. \end{aligned} \tag{S2.4}$$

Het boek geeft het bewijs van (S2.2) met volledige inductie. We geven wat meer details betreffende de inductiestap. Stel dat (S2.2) geldt als $n = k$. Er volgt uit (S2.4) dat

$$(x - x_{k+1}) b^k = (x - x_k) b^k - [b \cdot b^k (x - x_k)]/b. \tag{S2.5}$$

Er volgt uit de inductiehypothese dat $0 \le (x - x_k)b^k < 1$. Combinatie met (S2.5) levert $0 \le (x - x_{k+1})b^k < 1/b$, dus $0 < x - x_{k+1} < b^{-k-1}$. Hiermee is (S2.2) bewezen voor $n = k + 1$.

Omgekeerd definieert een rechterlid zoals in (S2.1) altijd een reëel getal $x \in [0, 1]$ d.m.v. (S2.3) met x_n gegeven door (S2.2). Om dit in te zien hebben we enige kennis over reeksen nodig, zie §2.3. Immers,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} d_n b^{-n} \tag{S2.6}$$

met $0 \le d_n b^{-n} \le (b - 1)b^{-n}$ en

$$(b-1)\sum_{n=1}^{\infty} b^{-n} = 1 < \infty \quad \text{(meetkundige reeks, Example 2.35).}$$

Dus de reeks (S2.6) convergeert (zie Corollary 2.30) en is ≤ 1.

We zullen als een vraagstuk geven dat de enig mogelijke dubbelzinnigheid voor representaties (S2.1) van $x \in [0, 1)$ gegeven wordt door

$$x = 0.d_1d_2\ldots d_n000\ldots = 0.d_1d_2\ldots d_{n-1}(d_n - 1)(b - 1)(b - 1)\ldots \quad (d_n \in \{1, \ldots, b - 1\}). \tag{S2.7}$$

Een dubbelzinnigheid doet zich dus voor desda $x = p/b^n$ met $p, n \in \mathbf{N}$ en $0 < p < b^n$.

Proposition 2.10 Noem een rij (a_n) in $\mathbf{R}$ *naar boven begrensd* als de verzameling $\{a_n\}$ van de termen van de rij naar boven begrensd is. (Definieer evenzo een *naar beneden begrensde rij* en een *begrensde rij*.) Er geldt:

(a) Een stijgende rij (a_n) die naar boven begrensd is, convergeert. De limiet is gelijk aan $\sup\{a_n\}$, d.w.z. aan de kleinste bovengrens van de verzameling van de termen a_n.

(b) Een stijgende rij die niet naar boven begrensd is, heeft limiet ∞.

Example 2.12 Proposition 3.29 zegt dat $e = E(1)$ met

$$e := \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n, \quad E(1) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,.$$

Een continue versie van de limiet werd al vermeld in syllabus Calculus Ia, Hst. I, p.24, Voorbeeld 13. De reeks is een speciaal geval van de machtreeks voor e^x (zie syllabus Calculus Ib, Hst. VII, p.52,54).

De convergentie van de reeks die $E(1)$ definieert, volgt eenvoudig uit de quotiëntentoets (Theorem 2.37). Het bewijs van Proposition 3.29 geeft als een gevolg van de binomiaalformule dat

$$(1 + 1/n)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,(1 - 1/n)(1 - 2/n)\ldots(1 - (k - 1)/n),$$

en hieruit de ongelijkheden

$$(1 + 1/n)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < E(1).$$

Deze twee formules leveren een alternatieve manier (i.p.v. de methode in Example 2.12) om in te zien dat de rij $\big((1 + 1/n)^n\big)_{n=1}^{\infty}$ monotoon stijgt en naar boven begrensd is.

Opmerking S2.5 Het is zowel van praktisch als van theoretisch belang om te weten hoe snel de partiële sommen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \tag{S2.8}$$

van de reeks $E(1)$ naar e convergeren. Er geldt dat

$$\begin{aligned} e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots \right\} = \frac{1}{(n+1)!} \, \frac{1}{1-(n+1)^{-1}} = \frac{1}{n!\,n}\,. \end{aligned}$$

Dus, als s_n gegeven is door (S2.8), dan

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!\,n} \quad (n \in \mathbf{N}). \tag{S2.9}$$

Zie bijvoorbeeld de volgende benaderingen van $e \approx 2.718281828$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{9 \times 9!} &\approx 3.1 \times 10^{-7}, \quad s_9 \approx 2.718281526; \\ \frac{1}{10 \times 10!} &\approx 2.8 \times 10^{-8}, \quad s_{10} \approx 2.718281801. \end{aligned}$$

Propositie S2.6 Het getal e is irrationaal.

Bewijs Stel dat $e \in \mathbf{Q}$, dus $e = p/q$ voor zekere $p, q \in \mathbf{N}$. Dan volgt er uit (S2.9) met $n := q$ dat

$$0 < q!\,(p/q - s_q) < 1/q \le 1.$$

Maar zowel $q!\,(p/q)$ als $q!\,s_q$ zijn geheel (ga na), dus $q!\,(p/q - s_q)$ is enerzijds geheel en ligt anderzijds in $(0,1)$. Dit is een tegenspraak. ∎

Proposition 2.15 Met andere woorden: Zij (a_n) een begrensde rij in $\mathbf{R}$ en $A := \limsup a_n$. Dan is A het unieke reële getal zo dat voor elke $A' \in \mathbf{R}$ geldt:

(i) Als $A' > A$ dan is op den duur $a_n < A'$.

(ii) Als op den duur $a_n < A'$ dan $A' \ge A$.

Proposition 2.16 We bewijzen hier (c) en het tweede gedeelte van (d). De rest is oefening.

Bewijs van (c) Voor iedere l, m met $l \ge m$ geldt dat

$$\begin{aligned} a_l + b_l &\le \sup_{n \ge m} a_n + \sup_{n \ge m} b_n, \quad \text{dus} \\ \sup_{l \ge m}(a_l + b_l) &\le \sup_{n \ge m} a_n + \sup_{n \ge m} b_n. \end{aligned}$$

Neem nu aan beide kanten van de laatste ongelijkheid de limiet voor $m \to \infty$.

Bewijs van tweede gedeelte van (d) Stel eerst dat $A := \limsup a_n = \liminf a_n$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan op den duur $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$. Dus $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Stel vervolgens dat de rij (a_n) convergeert naar $A \in \mathbf{R}$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan geldt op den duur dat $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$. Dus $A - \varepsilon \le \liminf a_n \le \limsup a_n \le A + \varepsilon$ (gebruik eigenschap (ii) bij Proposition 2.15 hierboven en iets soortgelijks voor lim inf). Omdat ε willekeurig is, concluderen we dat $A = \limsup a_n = \liminf a_n$.

Theorem 2.17 (*Stelling van Bolzano-Weierstrass*)
Iedere begrensde rij in **R** heeft een convergente deelrij.

Zij (a_n) een rij in **R**. We zeggen dat $A \in \mathbf{R}$ een *limietpunt* van de rij is als A de limiet is van een zekere convergente deelrij. Het aantal limietpunten kan 0, 1, een willekeurig eindig aantal, of oneindig veel bedragen. De stelling van Bolzano-Weierstrass zegt:

- Een begrensde rij heeft minstens één limietpunt.

Uit het bewijs van de stelling volgt:

- De $\limsup$ en $\liminf$ van een begrensde rij zijn limietpunten van die rij.

Ook geldt:

- Een rij is convergent desda hij begrensd is en precies één limietpunt heeft.

Vanwege de opmerking onderaan p.35 van Browder geldt:

- Voor een begrensde rij (a_n) is $\limsup(a_n)$ het grootste limietpunt en $\liminf(a_n)$ het kleinste limietpunt.

Merk tenslotte op:

- Zij (a_n) een rij in het gesloten begrensde interval $[b, c]$. Dan bezit de rij (minstens) een limietpunt, en alle limietpunten liggen in het interval $[b, c]$.

Theorem 2.19 (*Stelling van Cauchy*)
Een rij in **R** is convergent desda het een Cauchy-rij is.

Deze stelling geeft ons een middel om de convergentie van een rij te testen zonder een kandidaat voor de limiet te kennen. Zie ook Exercise 9 op p.51 van Browder, waar een ander bewijs van de stelling gevraagd wordt met behulp van Bolzano-Weierstrass.

Re: 2.3. *Infinite Series*

Vergeleken met Hoofdstuk VII, §2,3,4 in syllabus Calculus Ib biedt deze paragraaf geen spectaculaire nieuwe zaken. Nieuw is dat de quotiëntentoets en worteltoets nu algemener met behulp van $\limsup$ worden geschreven. Verder worden nu de bewijzen gegeven die bij Calculus achterwege zijn gelaten.

Merk bij de definitie van een convergente reeks op dat voor een gegeven eindig aantal n het variëren van de eerste n termen in een reeks niets verandert aan de convergentie of divergentie van de reeks. Een onmiddellijk gevolg van de definitie van convergente reeks, samen met Theorem 2.19 (Stelling van Cauchy voor rijen), is:

Propositie S2.7 (*Stelling van Cauchy voor reeksen*) De reeks $\sum_{k=l}^{\infty} a_k$ is convergent desda er bij elke $\varepsilon > 0$ een $n_0 \geq l$ bestaat zo dat $|\sum_{k=n}^{m} a_k| < \varepsilon$ voor alle n, m met $m \geq n \geq n_0$.

Proposition 2.29 In geval van convergentie zal de som ≥ 0 zijn.

Corollary 2.30 Aan de conclusie kan worden toegevoegd dat $0 \leq \sum b_n \leq \sum a_n$.

Corollary 2.31 Een ander bewijs gaat met de driehoeksongelijkheid

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k|$$

gecombineerd met Propositie S2.7 (Cauchy voor reeksen). Het voordeel van dit bewijs is dat het doorgaat voor reeksen van complexe getallen of algemener voor reeksen in genormeerde ruimtes (volgt later).

Voor het goede begrip van de benaming "*voorwaardelijk convergente reeks*" moet je kijken naar Corollary 2.48 en Theorem 2.49. Je ziet daar dat het voorwaardelijke slaat op de volgorde van de termen van de reeks. We kunnen in een voorwaardelijk convergente reeks de termen in een andere volgorde schrijven zodanig dat de nieuwe reeks convergeert met een andere som of divergeert. Echter, bij een absoluut convergente reeks blijven het convergentiegedrag en de som gelijk na elke herordening van de termen. Daarom noemen we een absoluut convergente reeks ook *onvoorwaardelijk convergent*.

In aansluiting op het *vergelijkingskenmerk* dat in Corollary 3.32 gegeven wordt, herinneren we ook aan het *limietkenmerk* uit syllabus Calculus Ib, Hst. VII, p.41 met bewijs op p.43 met behulp van het vergelijkingskenmerk:

Propositie S2.8 (*limietkenmerk*) Laten (a_n) en (b_n) rijen zijn met $a_n, b_n > 0$ voor alle n, zodanig dat $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n)$ bestaat en > 0 is. Dan geldt: òf beide reeksen $\sum_n a_n$ en $\sum_n b_n$ zijn convergent òf beide reeksen zijn divergent.

Theorems 2.36, 2.37 (*worteltoets; quotiëntentoets*)
Aan deze twee convergentietoetsen wordt vaak de naam van Cauchy verbonden, aan de quotiëntentoets soms ook die van d'Alembert. Maar ook Gauss heeft de quotiëntentoets al gebruikt om de convergentiestraal van de hypergeometrische reeks te vinden (zie een vraagstuk).

Kijk vooral naar formulering en bewijs van deze twee stellingen. Maak vervolgens Exercise 14 uit het boek. Dus, gezien die Exercise, is de worteltoets in theorie krachtiger dan de quotiëntentoets. Immers (aannemend dat $a_n > 0$), een onbesliste uitslag $\liminf(a_{n+1}/a_n) = 1$ of $\limsup(a_{n+1}/a_n) = 1$ van de quotiëntentoets sluit een duidelijke uitspraak $\limsup a_n^{1/n} > 1$ resp. $\limsup a_n^{1/n} < 1$ van de worteltoets niet uit, maar bij een onbesliste uitslag $\limsup a_n^{1/n} = 1$ van de quotiëntentoets kunnen we niet hopen op een duidelijke uitspraak van de worteltoets. In de vraagstukken zal een voorbeeld behandeld worden waarbij de quotiëntentoets geen beslissing geeft, maar de worteltoets wel.

Tenslotte merken we op dat de worteltoets en quotiëntentoets voor $\sum_n a_n$ alleen informatie over de absolute waarden $|a_n|$ van de termen gebruiken. Als we uit zo'n toets tot convergentie concluderen, dan zal dat altijd absolute convergentie zijn.

Proposition 4.35 Deze propositie over de convergentiestraal van een machtreeks was al zonder bewijs gegeven in syllabus Calculus Ib, Hst. VII, p.50, maar hier wordt bovendien een uitdrukking voor de convergentiestraal gegeven in termen van de machtreekscoëfficiënten. De propositie blijkt een onmiddellijk gevolg te zijn van de worteltoets.

Theorem 2.40 (*Cauchy's condensation test*)
Zij $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots > 0$, dan geldt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{convergeert} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \quad \text{convergeert}$$

Example 2.41 Zij $s \in \mathbf{R}$. De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ convergeert desda $s > 1$.

Strikt genomen kunnen we bovenstaand resultaat in dit stadium alleen nog maar formuleren als $s \in \mathbf{Q}$. Voor niet-rationale s is n^{-s} nog niet gedefinieerd. Dit gebeurt pas in het boek op p.66 net boven §3.6.

Corollary 2.45 (*criterium van Leibniz*)
Zij $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots > 0$ zo dat $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dan convergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

We zullen Example 2.42, Theorem 2.43 en Corollary 2.44 uit het boek overslaan, en in plaats daarvan een rechtstreeks bewijs van het criterium van Leibniz geven.

Bewijs van Corollary 2.45 Omdat $a_k - a_{k+1} \geq 0$ en $a_k > 0$ voor alle k volgt er dat voor alle $n, m \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} a_n \geq & a_n - (a_{n+1} - a_{n+2}) - \ldots - (a_{n+2m-1} - a_{n+2m}) \\ > & (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \cdots + (a_{n+2m-2} - a_{n+2m-1}) \geq 0. \end{aligned}$$

Dus voor alle $n \in \mathbf{N}$ en $l \geq 0$ geldt dat

$$0 \leq \sum_{k=0}^{l} (-1)^k a_{n+k} \leq a_n,$$

dus ook

$$\left| \sum_{k=0}^{l} (-1)^{n+k} a_{n+k} \right| \leq a_n.$$

Omdat $\lim a_n = 0$, kunnen we nu Propositie S2.7 (Cauchy voor reeksen) toepassen. ∎

Opgaven bij Chapter 2

Opg. S2.1 Bewijs Lemma 2.5.

Opg. S2.2 Laat K een geordend lichaam zijn. We zeggen dat de rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in K convergeert met limiet $x \in K$ als voor elke $\varepsilon > 0$ er een $n_0 \in \mathbf{N}$ bestaat zodanig dat $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ voor elke $n \geq n_0$. Laat nu zien dat K de Archimedische eigenschap heeft desda $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Opg. S2.3 Laat K zijn als in Opg. S2.2 en met de Archimedische eigenschap (bijv. $K := \mathbf{R}$). Zij (x_n) een rij in K. Bewijs dat de rij (x_n) convergeert met limiet $x \in K$ desda er voor elke $N \in \mathbf{N}$ een $n_0 \in \mathbf{N}$ bestaat zodanig dat $x - 1/N < x_n < x + 1/N$ voor elke $n \geq n_0$.

Opg. S2.4 Exercise 2 in Browder.

Opg. S2.5 Exercise 4 in Browder.

Opg. S2.6 Exercise 5 in Browder.

Opg. S2.7 Exercise 6 in Browder.

Opg. S2.8 Bewijs van Proposition 2.16 in Browder de onderdelen (a), (b), eerste deel van (d), en (e). Werk met *begrensde* rijen (a_n) en (b_n) in $\mathbf{R}$. Geef van onderdeel (c) (reeds eerder in deze syllabus bewezen) ook een bewijs gebruik makend van Proposition 2.15. Geef tenslotte een voorbeeld waarbij in onderdeel (c) strikte ongelijkheid geldt.

Opg. S2.9 Gebruik Theorem 2.17 (Bolzano-Weierstrass) om een ander bewijs van (de niet-triviale helft van) Theorem 2.19 (Cauchy) te geven.

Opg. S2.10

(a) Is de rij $\{\tan n\}_{n=1}^{\infty}$ convergent?

(b) Heeft die rij een convergente deelrij?

Opg. S2.11 Zet $a_n = 10^n \cdot \pi - [10^n \cdot \pi]$. Toon aan dat de rij $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ een convergente deelrij heeft. Wat zegt je dit over de decimale ontwikkeling van π?

$\star$ **Opg. S2.12** Experimenteer in Maple met verschillende benaderingen van e. Hierbij kun je gebruik maken van commando's als

`evalf(E)`, `evalf(E,20)`, `evalf(sum(1/k!,k=0..9))`, `evalf(1/9/9!)`, etc.

Bereken ook met behup van `evalf` de uitdrukking $(1 + n^{-1})^n$ voor verschillende waarden van n en zie hoe langzaam dit e benadert.

Opg. S2.13 Zij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij in $\mathbf{R}$. Bewijs het volgende:

(a) Als $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ bestaat, dan bestaat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \tag{S2.10}$$

met limiet eveneens gelijk aan A.

(b) Geef een voorbeeld waarbij de limiet (S2.10) bestaat, maar de rij (a_n) niet convergeert.

(c) Als de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert met som S dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n}{n} = S.$$

(d) Als de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0.$$

Opmerking Als de limiet (S2.10) bestaat en gelijk is aan zekere $A \in \mathbf{R}$ dan zeggen we dat de rij (a_n) *Cesàro-convergent* is en we noemen A de *Cesàro-limiet* van de rij. Dus gewone convergentie impliceert Cesàro-convergentie, maar niet omgekeerd.

Opg. S2.14 Zij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij niet-negatieve getallen waarvoor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert. Toon aan dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ convergeert.

Opg. S2.15 Exercise 13 in Browder.

Opg. S2.16 Exercise 17 in Browder.

Opg. S2.17 Laat $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij positieve getallen zijn waarvoor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergeert.

(a) Bewijs dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ divergeert.

(b) Bewijs of weerleg: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ divergeert.

$\star$ **Opg. S2.18** Bewijs de laatste bewering in het commentaar in de syllabus bij Example 2.7 als volgt.

(a) Bewijs de tweede ongelijkheid in (S2.7).

(b) Stel dat $0.d_1d_2\ldots = 0.e_1e_2\ldots$ en schrijf $c_n := d_n - e_n$. Dan $c_n \in \mathbf{Z}$ met $-b < c_n < b$, terwijl $\sum_{n=1}^{\infty} c_n b^{-n} = 0$. Stel dat niet $c_n = 0$ voor alle n. Zij k de kleinste n met $c_n \neq 0$. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat $c_k < 0$. Dan $-c_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n b^{-n}$. Concludeer door een bovenschatting van de som in het rechterlid dat $c_k = -1$ en $c_n = b-1$ voor $n > k$.

Opg. S2.19 Exercise 14 in Browder.
Aanwijzing voor het bewijs van de laatste ongelijkheid Zij $\lambda := \limsup(a_{n+1}/a_n)$. Als $\lambda = \infty$ dan zijn we klaar. Stel dat $\lambda < \infty$. Kies $\rho \in (\lambda, \infty)$. Dan is er een $N \in \mathbf{N}$ zo dat $a_{n+1}/a_n \leq \rho$ als $n \geq N$, dus $a_n \leq a_N \rho^{n-N}$ als $n \geq N$. Schat nu $a_n^{1/n}$ af voor $n \geq N$, gebruik Proposition 2.15, en gebruik dat ρ willekeurig $> \lambda$ gekozen was.

Opg. S2.20 Kies reële getallen a en b met $0 < a < b < 1$. Definieer voor $m \in \mathbf{N}$ dat $a_{2m-1} := a^{-m}$ en $a_{2m} := b^{-m}$. Bereken de lim inf en lim sup van a_{n+1}/a_n, en ook de lim inf en lim sup van $a_n^{1/n}$. Controleer dat deze vier getallen geordend zijn in overeenstemming met Exercise 14 uit het boek, en dat voor de reeks $\sum_n a_n$ de worteltoets uitsluitsel geeft maar de quotiëntentoets niet.

Opg. S2.21 Zij $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ een voorwaardelijk convergente reeks. Bewijs dat $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1$.

Opg. S2.22 Exercise 8 in Browder.

Opg. S2.23 Toon aan dat $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Opg. S2.24 Exercise 15 in Browder.

Opg. S2.25 Zij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ een rij in $\mathbf{R}$ waarvan de termen op den duur $\neq 0$ zijn. Stel dat $R := \lim_{n\to\infty}(a_n/a_{n+1})$ bestaat voor zekere reële $R \geq 0$ of voor $R = \infty$. Bewijs dat de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergentiestraal R heeft.

Opg. S2.26 Laten a, b, c reële getallen zijn, maar niet gelijk aan een niet-positief geheel getal. De *hypergeometrische reeks van Gauss* is de machtreeks

$$1 + \frac{abx}{c} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)\; b(b+1)\ldots(b+n-1)\; x^n}{c(c+1)\ldots(c+n-1)\; n!}\,.$$

Bewijs dat deze machtreeks convergentiestraal 1 heeft. Wat kun je zeggen als a of b gelijk is aan een niet-positief geheel getal?

Opg. S2.27 Exercise 16 in Browder.

Opg. S2.28 Exercise 12 in Browder.

Chapter 3 "Continuous functions on Intervals"

Errata

p.59, Theorem 3.15, l.2: skip extra bracket after second occurrence of $f(b)$

p.60, l.-2: Replace "Theorem 1.13" by "Theorem 1.25"

Toelichting bij Chapter 3

Uit Hoofdstuk 3 zullen we behandelen:
3.1 Limits and Continuity
3.2 Two Fundamental Theorems
3.3 Uniform Continuity
Vooral de onderwerpen uit §3.1 zijn ook al behandeld in de syllabus Calculus Ia, hst. I, paragrafen 3 en 4 (Limieten), echter vaak zonder bewijs. In de tabel hieronder vermelden we welk Theorem etc. in Browder's boek of in deze syllabus correspondeert met welke plaats in de syllabus Calculus Ia.

Browder's book	syllabus Calculus Ia, hst. I
Definition 3.1	Definities (limiet, linkerlimiet), p.16,17
Definition 3.2	Definitie onderaan p.17
Propositie S3.1	Insluitstelling p.22, Bewijs p.25
Definition 3.7	Definitie (continuïteit), p.16
Proposition 3.9	somregel etc., p.21
Proposition 3.11	continuïteitsregel, p.21
Theorem 3.14	Fundamentele stelling, hst. II, p.43

Een mogelijk onderwerp voor een presentatie is Theorem 3.20.

Re: 3.1. *Limits and Continuity*

De definities van limiet en continuïteit herhalen materiaal uit syllabus Calculus Ia, hst. I. Nieuw in dit verband is de formulering in termen van omgevingen. Echt nieuwe resultaten vind je in Propositions 3.6, 3.13 (over stijgende functies) en in Proposition 3.8(e) (karakterisering van continuïteit in termen van limieten van rijen).

Definitions 3.1, 3.2 Deze definities zijn reeds gegeven in syllabus Calculus Ia, hst. I, pp.16,17. In plaats van $\lim_{x\to c+}$ mag je $\lim_{x\downarrow c}$ schrijven. In plaats van $\lim_{x\to c-}$ mag je $\lim_{x\uparrow c}$ schrijven. In elk van de gevallen besproken in deze definities is sprake van een functie $f\colon A \to \mathbf{R}$ met $A \subset \mathbf{R}$. Voor een punt c in $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ wordt alleen dan een mogelijke linkerlimiet $\lim_{x\downarrow c}$ bekeken als c het linker eindpunt is van een open interval $(c, b) \subset A$. Voor een punt c in $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ wordt alleen dan een mogelijke rechterlimiet $\lim_{x\uparrow c}$ bekeken als c het rechter eindpunt is van een open interval $(a, c) \subset A$. Het is bij de definities niet van belang hoe klein dit open interval wordt genomen. Ook speelt het geen rol of c al of niet in A bevat is, want de eventuele functiewaarde $f(c)$ wordt niet in de definitie van de limiet gebruikt.

Bijvoorbeeld, als $A := \{1/n \mid n \in \mathbf{N}\}$ en $f\colon x \mapsto x\colon A \to \mathbf{R}$, dan verbiedt bovengenoemde conventie om te zeggen dat $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = 0$. Immers, er bestaat geen open interval $(0,c) \subset A$. Zonder veel problemen zouden we die conventie kunnen laten vallen, maar we zullen dat hier niet doen.

Definition 3.3 Het begrip "omgeving van een punt" komt uit de topologie. Het helpt misschien om dit begrip op een paar verschillende equivalente manieren te formuleren. Zij $a \in U \subset \mathbf{R}$. We zeggen dat U een *omgeving van a* is als een van de volgende drie equivalente uitspraken geldt:

(a) $\exists \varepsilon > 0$ zo dat $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset U$.

(b) Er is een open interval I zo dat $a \in I \subset U$.

(c) (wat vager geformuleerd) Iedere reële x voldoende dicht bij a ligt in U.

Zij nu A een vaste deelverzameling van $\mathbf{R}$. Voor een punt a in A kunnen we ook spreken over een "omgeving van a t.o.v. A". Ook dit kunnen we op een paar equivalente manieren formuleren. Zij $a \in V \subset A \subset \mathbf{R}$. We zeggen dat V een *omgeving van a t.o.v. A* is als een van de volgende drie equivalente uitspraken geldt:

(a) Er is een omgeving U van a zo dat $V = U \cap A$.

(b) $\exists \varepsilon > 0$ zo dat $\forall x \in A \quad |x-a| < \varepsilon \;\Rightarrow\; x \in V$.

(c) (wat vager geformuleerd) Iedere $x \in A$ voldoende dicht bij a ligt in V.

Propositie S3.1 (*insluitstelling*)
Zij $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ en $\lim_{x\to\infty} h(x) = L$. Stel $\exists M \in \mathbf{R}$ zo dat $f(x) \le g(x) \le h(x)$ als $x > M$. Dan geldt: $\lim_{x\to\infty} g(x) = L$.

Deze stelling werd al geformuleerd in syllabus Calculus Ia, hst. I, p.22 met bewijs op p.25.

Proposition 3.8 De equivalentie van (a) en (e) maakt het mogelijk om continuïteitseigenschappen van functies te bewijzen met behulp van convergentie van rijen, zie een toepassing hiervan bij het bewijs van Proposition 3.9.

Neem goed waar hoe aan het begin van de laatste alinea van het bewijs van Prop. 3.8 de uitspraak "f is niet continu in c" geëxpliciteerd wordt.

Re: 3.2. *Two Fundamental Theorems*

De twee fundamentele stellingen in deze paragraaf maken voor hun bewijs essentieel gebruik van de volledigheid (sup-eigenschap) van de reële getallen. Het bewijs van de eerste stelling gebruikt ook de stelling van Bolzano-Weierstrass.

Theorem 3.14 Een continue reëelwaardige functie op een gesloten begrensd interval neemt een maximumwaarde en een minimumwaarde aan. Anders gezegd:
Zij $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ continu. Dan zijn er $x_1, x_2 \in [a,b]$ zo dat $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ voor alle $x \in [a,b]$.

Merk op dat, om te bewijzen dat f een maximum aanneemt op $[a,b]$, er eerst bewezen wordt dat f naar boven begrensd is, en vervolgens dat het supremum van de verzameling $f([a,b])$ een maximum is.

Het is essentieel in de aannamen van de stelling dat het interval waarop de continue functie f bekeken wordt zowel gesloten als begrensd is. Het is makkelijk om een voorbeeld te geven van een continue functie f op een interval $[a,\infty)$ of op een interval $[a,b)$ die geen maximum op dat interval aanneemt.

Theorem 3.15 (*tussenwaardestelling*)
Als f continu is op een interval $[a,b]$ dan wordt iedere reële waarde gelegen tussen $f(a)$ en $f(b)$ minstens eenmaal door f op het interval (a,b) aangenomen.

We kunnen deze stelling anders formuleren door gebruik te maken van de volgende karakterisering van intervallen (zie Definition 1.26 en daarop volgende discussie).

Propositie S3.2 Intervallen $J \subset \mathbf{R}$ kunnen op de volgende twee equivalente manieren gekarakteriseerd worden:

(a) Voor elke $a, c \in J$ met $a < c$ geldt: als $b \in \mathbf{R}$ met $a < b < c$ dan $b \in J$.

(b) J is van een van de volgende types: (i) $J = \emptyset$, (ii) $J = [a,b]$ $(-\infty < a \le b < \infty)$, (iii) $J = [a,b)$ $(-\infty < a < b \le \infty)$, (iv) $J = (a,b]$ $(-\infty \le a < b < \infty)$, (v) $J = (a,b)$ $(-\infty \le a < b \le \infty)$.

In de gevallen (ii)–(v) van (b) geldt dat $a = \inf(J)$, $b = \sup(J)$.

Gevolg S3.3 (equivalent met Theorem 3.15)
Als J een interval is en $f\colon J \to \mathbf{R}$ continu, dan is $f(J)$ een interval.

Gevolg S3.4 (volgt uit Theorems 3.14, 3.15)
Als J een gesloten begrensd interval is en $f\colon J \to \mathbf{R}$ continu, dan is $f(J)$ een gesloten begrensd interval.

Theorem 3.16 Zij I een niet-leeg interval en $f\colon I \to \mathbf{R}$ continu. Zij $J := f(I)$ (dus J is niet-leeg interval).

(a) f is injectief desda f is strikt monotoon stijgend of strikt monotoon dalend.

(b) Stel f is strikt monotoon stijgend (resp. dalend). Schrijf $g := f^{-1}$, dus $g\colon J \to \mathbf{R}$, $g(J) = I$ en g is strikt monotoon stijgend (resp. dalend). Dan is g continu.

Deze stelling is ook een gevolg van de tussenwaardestelling. De stelling rechtvaardigt de invoering in syllabus Calculus Ia, hst. I, pp.7–9 van een aantal belangrijke speciale functies g als inverse functies van andere, reeds bekend veronderstelde functies f. De stelling plaatst ook Theorem 1.25 (invoering van de functie $y \mapsto y^{1/n}$) in een algemener kader.

Re: 3.3. *Uniform Continuity*

Het begrip "uniforme continuïteit" is van fundamenteel belang. Zie vooral Theorem 3.18. We zullen uniforme continuïteit later opnieuw tegenkomen in het algemenere kader van metrische ruimtes.

Definition 3.17 Zij I een interval in $\mathbf{R}$ en zij $f\colon I \to \mathbf{R}$. We zeggen dat f *uniform continu* is op I als

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall s \in I \quad \forall t \in I \quad |s-t| < \delta \;\Rightarrow\; |f(s)-f(t)| < \varepsilon. \tag{S3.1}$$

Propositie S3.5 Als f uniform continu is op I dan is f continu op I.

Bewijs Uitspraak (S3.1) impliceert dat

$$\forall s \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t \in I \quad |s-t| < \delta \;\Rightarrow\; |f(s)-f(t)| < \varepsilon. \tag{S3.2}$$

Uitspraak (S3.2) zegt precies dat voor alle $s \in I$ de functie f continu is in s. ∎

In uitspraak (S3.2) hangt de δ niet slechts van ε maar ook van s af. In uitspraak (S3.1) is δ echter onafhankelijk van s.

We hebben hier te maken met een veel voorkomende situatie bij logica met quantoren. Zij $B(s,\delta)$ een bewering waarvan het al of niet waar zijn afhangt van de variabelen s en δ. Vergelijk dan de uitspraken

(a) $\exists \delta\, \forall s \quad B(s,\delta)$;

(b) $\forall s\, \exists \delta \quad B(s,\delta)$.

Uitspraak (a) impliceert (b), maar (b) impliceert niet zondermeer (a).

Theorem 3.18 Continuïteit op een gesloten begrensd interval impliceert uniforme continuïteit op dat interval.

Waarschuwing Continue functies op een interval dat niet gesloten of niet begrensd is kunnen maar hoeven niet uniform continu op dat interval te zijn.

In het begin van het bewijs van Theorem 3.18 wordt de ontkenning van uitspraak (S3.1) gegeven: f is niet uniform continu op I desda

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists s \in I \quad \exists t \in I \quad \big(\, |s-t| < \delta \quad \text{en} \quad |f(s)-f(t)| \geq \varepsilon \,\big). \tag{S3.3}$$

Theorem 3.20 Anders gezegd: Als f een continue reëelwaardige functie is op het gesloten begrensde interval I dan bestaat er voor elke $\varepsilon > 0$ een stuksgewijs lineaire continue functie g zo dat $\sup_{t\in I} |f(t)-g(t)| < \varepsilon$.

Voor twee continue functies f en g op I kunnen we de uitdrukking

$$d(f,g) := \sup_{t\in I} |f(t)-g(t)| = \max_{t\in I} |f(t)-g(t)|$$

in zekere zin opvatten als de *afstand* tussen f en g. De stelling zegt dus dat er voor gegeven continue f bij elke $\varepsilon > 0$ een stuksgewijs lineaire continue functie g gevonden kan worden op afstand kleiner dan ε tot f. Deze uitspraak is vergelijkbaar met de uitspraak in Proposition 1.22 dat $\mathbf{Q}$ een dichte deelverzameling van $\mathbf{R}$ is. We zeggen dan ook dat de verzameling van stuksgewijs lineaire continue functies op I een *dichte* deelverzameling is van de ruimte van continue functies op I (t.o.v. het gekozen afstandsbegrip).

Definitie S3.6 Zij I een interval. Een functie $f\colon I \to \mathbf{R}$ heet *Lipschitz-continu* op I als er een M bestaat zo dat $|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$ voor alle $x, y \in I$.

Propositie S3.7 Zij I een interval. Als f Lipschitz-continu is op I dan is f uniform continu op I.

Het bewijs van Propositie S3.7 volgt onmiddellijk uit de definitie van uniforme continuïteit (ga na).

In voorbeelden van uniform continue functies zullen we vaak te maken hebben met differentieerbare functies en gebruiken we eigenschappen van de afgeleide om de uniforme continuïteit te bewijzen. Daarom lopen we al even vooruit op Chapter 4 (Differentiation) en vermelden we de middelwaardestelling, die reeds behandeld is in syllabus Calculus Ia, Hst. II, p.44 met bewijs op p.47.

Theorem 4.22 (*middelwaardestelling*)
Zij $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$. Als f continu is op $[a, b]$ en f differentieerbaar op (a, b), dan is er een $\xi \in (a, b)$ zo dat $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Nu volgt onmiddellijk (ga na):

Propositie S3.8 Zij I een interval, zij $f\colon I \to \mathbf{R}$ een differentieerbare functie en neem aan dat er een $M \geq 0$ bestaat zo dat $|f'(x)| \leq M$ voor alle $x \in I$ (dus f' is begrensd op I). Dan is f Lipschitz-continu op I en dus uniform continu op I.

Tot slot nog twee handige eigenschappen, die onmiddellijk volgen uit de definitie van uniforme continuïteit.

Propositie S3.9
(a) Als f uniform continu is op een interval V dan is f ook uniform continu op elk deelinterval W van V.
(b) Stel I, I_1, I_2 zijn intervallen zo dat $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ en $I = I_1 \cup I_2$. Zij f een functie op I die uniform continu is op I_1 en op I_2. Dan is f uniform continu op I.

Opgaven bij Chapter 3

Opg. S3.1 Stel een definitie voor van $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

Opg. S3.2 Als $L, L' \in \mathbf{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ en $\lim_{x\downarrow c} f(x) = L$ en $\lim_{x\downarrow c} f(x) = L'$, bewijs dan dat $L = L'$. (Dus f kan hoogstens één rechterlimiet bij c hebben.)

Opg. S3.3 Zij I een open interval en $c \in I$. Zij $f\colon I \to \mathbf{R}$. Zij $L \in \mathbf{R}$. Bewijs dat $\lim_{x\to c} f(x) = L$ desda voor iedere rij (x_n) in $I\backslash\{c\}$ met $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ geldt dat de rij $(f(x_n))$ naar L convergeert.
Concludeer: als $\lim_{x\to c} f(x) = L$ en $\lim_{x\to c} g(x) = M$ dan $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M$ en $\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = LM$.

Opg. S3.4 Geef voor de uitspraak dat $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ een equivalente karakterisering in termen van limieten van rijen. Gebruik dit om Propositie S3.1 (insluitstelling voor limieten van functies) te bewijzen met behulp van Propositie S2.4(a) (knijpstelling voor limieten van rijen).

Opg. S3.5 Noem een deelverzameling V van $\mathbf{R}$ *open* als er voor iedere $x \in V$ een $\varepsilon > 0$ bestaat zo dat $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset V$.
Zij I een open interval in $\mathbf{R}$ en $f: I \to \mathbf{R}$. Bewijs dat f continu is op I desda voor iedere open deelverzameling V van R geldt dat $f^{-1}(V)$ een open verzameling is.

Opg. S3.6 Bewijs Proposities S3.7 en S3.8.

Opg. S3.7 Exercise 1 in Browder.

Opg. S3.8 Exercise 2 in Browder.

$\star$ **Opg. S3.9** Exercise 5 in Browder.

Opg. S3.10 Exercise 7 in Browder.

$\star$ **Opg. S3.11** Exercise 8 in Browder.

Opg. S3.12 Exercise 3 in Browder.

Opg. S3.13 Exercise 4 in Browder.

Opg. S3.14 Als J een open interval is in $\mathbf{R}$ en $f: J \to \mathbf{R}$ continu, is $f(J)$ dan ook een open interval?

Opg. S3.15 Stel dat $f: \mathbf{R} \to \mathbf{Q}$ continu is, d.w.z. f is continu en $f(x)$ is rationaal voor elke $x \in \mathbf{R}$. Toon aan dat f constant is.

$\star$ **Opg. S3.16** Zij f continu op $(0, 1)$. Zet $\alpha = \liminf_{x\downarrow 0} f(x)$, $\beta = \limsup_{x\downarrow 0} f(x)$ (zie Exercise 5 in Browder). Bewijs dat f elke waarde γ met $\alpha < \gamma < \beta$ oneindig vaak aanneemt op $(0, 1)$.
Hint Als $\alpha \neq \beta$ laat dan zien dat voor elke $\varepsilon > 0$ er een $x \in (0, \varepsilon)$ gevonden kan worden met $f(x) = \gamma$.

Opg. S3.17 Bewijs:

(a) Als de functie f uniform continu is op een begrensd interval I dan is f begrensd op I.

(b) Als de functie f niet begrensd is op een begrensd interval I dan is f niet uniform continu op I.

(c) Er bestaat een begrensde continue functie op een begrensd interval I die niet uniform continu is op I.

Opg. S3.18 Bewijs het volgende. Zij $I = (a, \infty)$ of $I = [a, \infty]$. Als $f\colon I \to \mathbf{R}$ differentieerbaar en $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \infty$ dan is f niet uniform continu op I.
Hint Gebruik de middelwaardestelling om aan te tonen dat voor elke $h > 0$ geldt dat $\lim_{x\to\infty}(f(x+h) - f(x)) = \infty$.

Opg. S3.19 Is de functie $f(x) = 3x^7 - 5x^3 + 2x - 8$ uniform continu op $(0, 1)$?

Opg. S3.20 Ga na welke van de volgende functies uniform continu zijn op hun aangegeven domein:
(a) $f(x) = x^2$ op $\mathbf{R}$,
(b) $f(x) = \sqrt{x}$ op $[0, \infty)$,
(c) $f(x) = x \sin x$ op $\mathbf{R}$,
(d) $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ op $(0, \pi)$,
(e) $f(x) = e^x$ op $(-\infty, 0)$,
(f) $f(x) = e^x$ op $[0, \infty)$,
(g) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ op $[0, \infty)$,
(h) $f(x) = \cos(x^2)$ op $\mathbf{R}$.

Opg. S3.21 Exercise 11 in Browder.

Opg. S3.22 Exercise 12 in Browder.

Opg. S3.23 Laten f en g twee uniform continue (reëelwaardige) functies op het interval I zijn. Bewijs dat:
(a) $f + g$ ook uniform continu is,
(b) $f \cdot g$ niet uniform continu hoeft te zijn,
$\star$(c) maar dat $f \cdot g$ wel uniform continu is als f en g beide begrensd zijn. (Dit gebeurt bijv. als I een begrensd interval is).

Chapter 6 “Topology”(deel 1)

Errata

p.124, l.5: Insert at the end of the sentence: “or $U = \emptyset$”

Toelichting bij Chapter 6, deel 1

In deze aflevering van de syllabus behandelen we de paragrafen 6.1–6.4 uit het boek. Hierin worden topologische ruimtes, en meer in het bijzonder metrische ruimtes geïntroduceerd. We behandelen §6.3 (metrische ruimtes) voor §6.2 (continue afbeeldingen). Een geschikt onderwerp voor een presentatie is de Hilbertruimte ℓ^2 (zie Example 6.24).

Re: 6.1. *Topological Spaces*

Van deze paragraaf zullen we uit het boek overslaan: de alinea na Example 6.4 (over zwakkere en sterkere topologieën) en Definition 6.9 met de alinea erna (over limietpunten en geïsoleerde punten). Een paar onderdelen benadrukken we hieronder nog eens in het Nederlands, of lichten we nader toe. Uit latere paragrafen halen we al naar voren Definition 6.26 (relatieve topologie) en Definition 6.16 (homeomorfisme). Bekijk deze definities nadat je Example 6.4 gepasseerd bent.

Definition 6.1 Zij X een verzameling. Zij $\mathcal{T}$ een familie van deelverzamelingen van X. We noemen de familie $\mathcal{T}$ een *topologie op* X als aan de volgende eisen is voldaan:

(a) Als $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ een (mogelijk oneindige) deelfamilie is van $\mathcal{T}$ en als $U := \cup_{\alpha\in A}U_\alpha$ de vereniging is van alle verzamelingen uit deze deelfamilie, dan behoort U tot $\mathcal{T}$.

(b) Als $\{U_i\}_{i=1}^n$ een eindige deelfamilie is van $\mathcal{T}$ en als $U := \cap_{i=1}^n U_i$ de doorsnede is van van alle verzamelingen uit deze deelfamilie, dan behoort U tot $\mathcal{T}$.

(c) De verzamelingen $\emptyset$ en X behoren tot $\mathcal{T}$.

Dan heet $(X, \mathcal{T})$ een *topologische ruimte*. Vaak spreken we kortweg over de topologische ruimte X. De deelverzamelingen van X die tot $\mathcal{T}$ behoren, heten *open verzamelingen*.

Samenvattend: een topologie op X is een familie van deelverzamelingen van X (de zogenaamde open verzamelingen), waarbij moet gelden:

(a) Een willekeurige vereniging van open verzamelingen is open.

(b) Een eindige doorsnede van open verzamelingen is open.

(c) $\emptyset$ en X zijn open.

Merk op dat we de eis (b) equivalent mogen schrijven als volgt:

(b′) Als U en V open verzamelingen zijn dan is $U \cap V$ open.

Example 6.3 Noem een deelverzameling U van $\mathbf{R}$ *open* als er voor elke $c \in U$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat $(c - \delta, c + \delta) \subset U$. Dan is aan de eisen (a), (b) en (c) van Definition 6.1 voldaan:

(a) Stel dat de deelverzamelingen U_α ($\alpha \in A$) van $\mathbf{R}$ open zijn en zij $U := \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Zij $c \in U$. Dan is $c \in U_\alpha$ voor zekere α. Omdat U_α open is, is er een $\delta > 0$ zo dat $(c-\delta, c+\delta) \subset U_\alpha$. Omdat $U_\alpha \subset U$ is dus $(c-\delta, c+\delta) \subset U$. Dus U is open.

(b) Stel dat de deelverzamelingen U_i ($i = 1, \ldots, n$) van $\mathbf{R}$ open zijn en zij $U := \cap_{i=1}^n U_i$. Zij $c \in U$. Dan $c \in U_i$ voor elke i. Dus voor elke i is er een $\delta_i > 0$ zo dat $(c-\delta_i, c+\delta_i) \subset U_i$. Zij $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Dan geldt dat $(c-\delta, c+\delta) \subset U_i$ voor elke i. Dus $(c-\delta, c+\delta) \subset U$. Dus U is open.

(c) De deelverzameling $\emptyset$ van $\mathbf{R}$ is open omdat uiteraard voor alle $c \in \emptyset$ aan de eis in de definitie van open deelverzameling voldaan is. De deelverzameling $\mathbf{R}$ van $\mathbf{R}$ is open omdat voor elke $c \in \mathbf{R}$ geldt dat $(c-1, c+1) \subset \mathbf{R}$.

De zo gedefinieerde topologie noemen we de *standaardtopologie* op $\mathbf{R}$. In het vervolg zullen we, sprekend over $\mathbf{R}$, deze topologie bedoelen tenzij we anders vermelden.

Merk op dat een interval I in $\mathbf{R}$ een open verzameling in $\mathbf{R}$ is desda I van de vorm (a, b) of (a, ∞) of $(-\infty, b)$ of $(-\infty, \infty)$ of $\emptyset$ is (zie een vraagstuk). De terminologie van open verzamelingen klopt dus mooi met de terminologie van open intervallen. Maar bijv. een interval $[a, b)$ is geen open verzameling in $\mathbf{R}$ omdat er geen $\delta > 0$ is zo dat $(a-\delta, a+\delta) \subset [a, b)$.

Definition 6.26 Zij X een topologische ruimte en zij Y een deelverzameling van X. We definiëren de *relatieve topologie* op Y. Noem een deelverzameling V van Y *open* (t.o.v. Y) als $V = U \cap Y$ voor zekere open deelverzameling U van X. Zo wordt Y een topologische ruimte, want aan de eisen (a), (b) en (c) van Definition 6.1 is voldaan:

(a) Zij $V_\alpha = U_\alpha \cap Y$ met U_α open in X. Hier doorloopt α een zekere indexverzameling A. Dan

$$\cup_{\alpha\in A} V_\alpha = \cup_{\alpha\in A}(U_\alpha \cap Y) = (\cup_{\alpha\in A} U_\alpha) \cap Y,$$

en $\cup_{\alpha\in A} U_\alpha$ is open in X.

(b) Zij $V_i = U_i \cap Y$ voor $i = 1, \ldots, n$, met U_i open in X. Dan

$$\cap_{i=1}^n V_i = \cap_{i=1}^n (U_i \cap Y) = (\cap_{i=1}^n U_i) \cap Y,$$

en $\cap_{i=1}^n U_i$ is open in X.

(c) $\emptyset = \emptyset \cap Y$ en $Y = X \cap Y$.

Iedere deelverzameling E van $\mathbf{R}$ wordt zo een topologische ruimte: geef aan $\mathbf{R}$ de standaardtopologie en geef aan E de relatieve topologie.

Definition 6.16 Stel X en Y zijn topologische ruimtes. Een *homeomorfisme van X op Y* is een bijectieve afbeelding $f\colon X \to Y$ zo dat voor elke deelverzameling U van X geldt: U is open in X desda $f(U)$ is open in Y.

Topologische ruimtes waartussen een homeomorfisme bestaat, heten *homeomorf* of *topologisch equivalent*.

Definition 6.6 Zij X een topologische ruimte. We noemen een deelverzameling F van X *gesloten* als zijn complement F^C open is.

Dus er volgt uit de eigenschappen van open deelverzamelingen:

(a) De doorsnede van een willekeurig (mogelijk oneindig) aantal gesloten deelverzamelingen is gesloten.

(b) De vereniging van een eindig aantal gesloten deelverzamelingen is gesloten.

(c) De deelverzamelingen $\emptyset$ en X zijn gesloten.

Merk op dat een interval I in $\mathbf{R}$ een gesloten verzameling in $\mathbf{R}$ is desda I van de vorm $\{a\}$ of $[a,b]$ of $[a,\infty)$ of $(-\infty,b]$ of $(-\infty,\infty)$ of $\emptyset$ is (zie een vraagstuk). De terminologie van gesloten verzamelingen klopt dus mooi met de terminologie van gesloten intervallen.

Definitions 6.7, 6.10, 6.11 Zij X een topologische ruimte en $E \subset X$.

(a) De *afsluiting van* E (genoteerd $\overline{E}$ of $\operatorname{cl} E$) is de kleinste gesloten deelverzameling van X die E omvat. Deze bestaat, want hij is gelijk aan de doorsnede van alle gesloten deelverzamelingen van X die E omvatten.

(b) Het *inwendige van* E (genoteerd E° of $\operatorname{int} E$) is de grootste open deelverzameling van X die bevat is in E. Deze bestaat, want hij is gelijk aan de vereniging van alle open deelverzamelingen van X die in E bevat zijn.

(c) De *rand van* E (genoteerd ∂E) is de verzameling $\overline{E} \setminus E^\circ$.

(d) Een punt $x \in E$ heet *inwendig punt van* E als $x \in E^\circ$.

(e) We zeggen dat E *dicht is in* X als $\overline{E} = X$.

Definition 6.5 Zij X een topologische ruimte en $x \in X$. Een deelverzameling U van X heet een *omgeving van* x als er een open verzameling V bestaat zo dat $x \in V \subset U$.

Uit deze definitie volgen onmiddellijk de volgende drie eigenschappen:

1. Een deelverzameling U van X is open desda U een omgeving is van x voor elke $x \in U$.
2. Als U een omgeving is van x en $V \supset U$ dan is V een omgeving van x.
3. Als U_1 en U_2 omgevingen zijn van x dan is $U_1 \cap U_2$ een omgeving van x.

We noemen U een *open omgeving van* x als U open is en $x \in U$.

Proposition 6.8 Zij X een topologische ruimte, $E \subset X$ en $x \in X$. Dan ligt x in de afsluiting van E desda iedere omgeving van x niet-lege doorsnede met E heeft.

Zij nu $X := \mathbf{R}$. Dan zegt Proposition 6.8 (ga na) dat $x \in \overline{E}$ desda voor iedere $\delta > 0$ het interval $(x-\delta, x+\delta)$ een punt van E bevat. Ook zegt Definition 6.11 dan dat E dicht is in $\mathbf{R}$ desda voor iedere $x \in \mathbf{R}$ en iedere $\delta > 0$ het interval $(x-\delta, x+\delta)$ een punt van E bevat. Dit klopt met Definition 1.21 van dichte deelverzameling van $\mathbf{R}$.

Re: 6.3. *Metric Spaces*

Lees in het boek deze paragraaf tot/met Definition 6.23. Hieronder volgt nog enige toelichting. We behandelen de twee onderwerpen “genormeerde vectorruimtes” en “topologisch equivalente metrieken” in veel meer detail dan in het boek. We grijpen ook vooruit op het begrip “Hausdorff-ruimte” uit §6.5.

Definition 6.18 Een *metriek* of *afstandsfunctie* op een verzameling X is een afbeelding $\rho: X \times X \to [0, \infty)$ met de volgende eigenschappen:

(a) $\rho(x, y) = 0$ desda $x = y$.

(b) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ voor alle $x, y \in X$ (*symmetrie*).

(c) $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ voor alle $x, y, z \in X$ (*driehoeksongelijkheid*).

Dan heet (X, ρ) een *metrische ruimte*. Soms spreken we kortweg over een metrische ruimte X. In plaats van $\rho(x, y)$ schrijft men ook wel $d(x, y)$ voor de metriek op een metrische ruimte.

Definitions 6,19, 6.20 Zie de definities van open bal, van open verzameling in een metrische ruimte, en het bewijs dat een open bal een open verzameling is.

Het bewijs dat de open deelverzamelingen van een metrische ruimte X inderdaad een topologie op X definiëren, gaat net zo als we dat in Example 6.3 voor $\mathbf{R}$ deden:

(a) Stel dat de deelverzamelingen U_α $(\alpha \in A)$ van X open zijn en zij $U := \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Zij $c \in U$. Dan is $c \in U_\alpha$ voor zekere α. Omdat U_α open is, is er een $\delta > 0$ zo dat $B(c, \delta) \subset U_\alpha$. Omdat $U_\alpha \subset U$ is dus $B(c, \delta) \subset U$. Dus U is open.

(b) Stel dat de deelverzamelingen U_i $(i = 1, \ldots, n)$ van X open zijn en zij $U := \cap_{i=1}^n U_i$. Zij $c \in U$. Dan $c \in U_i$ voor elke i. Dus voor elke i is er een $\delta_i > 0$ zo dat $B(c, \delta_i) \subset U_i$. Zij $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Dan geldt dat $B(c, \delta) \subset U_i$ voor elke i. Dus $B(c, \delta) \subset U$. Dus U is open.

(c) De deelverzameling $\emptyset$ van X is open, omdat uiteraard voor alle $c \in \emptyset$ aan de eis in de definitie van open deelverzameling voldaan is. De deelverzameling X van X is open omdat voor elke $c \in X$ geldt dat $B(c, 1) \subset X$.

Definition 6.35 Een topologische ruimte X heet een *Hausdorff-ruimte* als er voor elk tweetal punten $x, y \in X$ met $x \neq y$ open verzamelingen U en V bestaan zo dat $x \in U$, $y \in V$ en $U \cap V = \emptyset$.

Propositie S6.1 In een Hausdorff-ruimte is de verzameling $\{x\}$ gesloten voor elke $x \in X$.

Bewijs We bewijzen dat $Y := X \setminus \{x\}$ open is. Zij $y \in Y$ willekeurig. Dan $x \neq y$. Er zijn dus disjuncte open verzamelingen U_y en V_y in X zo dat $x \in U_y$ en $y \in V_y$. Dus $y \in V_y \subset Y$. Er geldt dus dat $Y = \cup_{y \in Y} V_y$, dus Y is als vereniging van open verzamelingen open. ∎

Propositie S6.2 Elke metrische ruimte is een Hausdorff-ruimte. Dus in een metrische ruimte geldt dat de uit één punt bestaande deelverzamelingen gesloten zijn.

Bewijs Zij (X, ρ) een metrische ruimte. Neem $x, y \in X$ met $x \neq y$. Zij $r := \rho(x, y)$. Dan $r > 0$. Dan zijn $B(x, r/2)$ en $B(y, r/2)$ disjunct, want als z in de doorsnede zou zitten dan $r = \rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y) < r/2 + r/2 = r$, dus $r < r$, een tegenspraak. Omdat $B(x, r/2)$ een open omgeving is van x en $B(y, r/2)$ een open omgeving van y, is het bewijs voltooid. ∎

Zoals opgemerkt na Definition 6.26: Als (X, ρ) een metrische ruimte is en $Y \subset X$ dan wordt Y een metrische ruimte door ρ te beperken tot $Y \times Y$. Ga na dat de topologie op Y gegeven door deze metriek op Y dezelfde is als de relatieve topologie op Y.

Definitie S6.3 Zij V een lineaire ruimte. (Tenzij anders vermeld bedoelen we met lineaire ruimte altijd een lineaire ruimte over $\mathbf{R}$, dus een reële vectorruimte.) Een *norm op* V is een afbeelding $v \mapsto \|v\|: V \to [0,\infty)$ zo dat

(a) $\|v\| > 0$ als $v \neq 0$.

(b) $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$ voor alle $\lambda \in \mathbf{R}$ en $v \in V$.

(c) $\|v+w\| \le \|v\| + \|w\|$ voor alle $v, w \in V$ (*driehoeksongelijkheid*).

Een lineaire ruimte die voorzien is van een norm heet een *genormeerde lineaire ruimte.*

Er volgt uit (b) dat $\|0\| = 0$, dus $\|v\| = 0$ desda $v = 0$. Merk op dat iedere lineaire deelruimte W van een genormeerde lineaire ruimte V zelf een genormeerde lineaire ruimte wordt door de norm op V te beperken tot W.

Propositie S6.4 Zij V een genormeerde lineaire ruimte. Definieer

$$\rho(v,w) := \|v-w\| \quad (v, w \in V).$$

Dan is ρ een metriek op V. Zodoende wordt V een metrische ruimte en dus ook een topologische ruimte, en evenzo elke deelverzameling van V.

Bewijs We gaan de eigenschappen (a), (b), (c) van Definition 6.18 na:

(a) $\|v-w\| \ge 0$, en $\|v-w\| = 0$ desda $v - w = 0$ desda $v = w$.

(b) $\|v-w\| = \|(-1)(w-v)\| = |-1|\,\|w-v\| = \|w-v\|$.

(c) $\|u-w\| \le \|u-v\| + \|v-w\|$ wegens (c) van Definitie S6.3. ∎

Definition 6.23 Het standaardvoorbeeld van een genormeerde lineaire ruimte wordt gegeven door $\mathbf{R}^d$ waarbij de standaardnorm van $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ (te schrijven als $|\mathbf{x}|$ i.p.v. $\|\mathbf{x}\|$) gegeven wordt door

$$|\mathbf{x}| = <\mathbf{x},\mathbf{x}>^{1/2} := (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}. \tag{S6.1}$$

Hier is

$$<\mathbf{x},\mathbf{y}> := x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d \tag{S6.2}$$

het standaard-inproduct op $\mathbf{R}^d$. Dat (S6.1) inderdaad een norm definieert, is evident wat eigenschappen (a) en (b) van Definitie S6.3 betreft. De driehoeksongelijkheid (c) wordt bewezen in Corollary 6.22 en volgt uit de *ongelijkheid van Cauchy-Schwarz* voor het inproduct (S6.2) (zie Proposition 6.21).

De standaardmetriek op $\mathbf{R}^d$ wordt dus gegeven door

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) := |\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \big((x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_d-y_d)^2\big)^{1/2}. \tag{S6.3}$$

Zodoende wordt $\mathbf{R}^d$ een metrische ruimte en dus ook een topologische ruimte, en evenzo elke deelverzameling van $\mathbf{R}^d$. Merk op dat $E \subset \mathbf{R}^d$ open is desda er voor elke $\mathbf{a} \in E$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat de bal $B(\mathbf{a},\delta) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d \mid |\mathbf{x}-\mathbf{a}| < \delta\}$ in E bevat is. Het geval $d := 1$ van (S6.3) geeft de standaardmetriek $\rho(x,y) := |x-y|$ op $\mathbf{R}$, en deze geeft weer aanleiding tot de in §6.1 ingevoerde standaardtopologie op $\mathbf{R}$.

Opmerking S6.5 Op dezelfde manier als we $\mathbf{R}^d$ tot een genormeerde vectorruimte maakten, kunnen we een willekeurige inproductruimte tot een genormeerde ruimte maken. We vatten kort een paar bij Lineaire Algebra behandelde zaken samen. Zij V een lineaire ruimte (over $\mathbf{R}$) met *inproduct*, d.w.z. met een afbeelding $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle : V \times V \to \mathbf{R}$ zo dat voor alle $u, v, w \in V$ en $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ geldt:

(a) $\langle \lambda u + \mu v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \mu\langle v, w\rangle$.

(b) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$.

(c) Als $v \neq 0$ dan $\langle v, v\rangle > 0$.

Definieer

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle} \quad (v \in V). \tag{S6.4}$$

Dan geldt de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz:

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\| \quad (v, w \in V).$$

Hieruit volgt dat (S6.4) een norm op V definieert.

Voorbeeld S6.6 We geven een ander voorbeeld van een genormeerde lineaire ruimte. Zij X een niet-lege verzameling. De collectie van alle functies $f : X \to \mathbf{R}$ vormt een lineaire ruimte: als f, g functies op X zijn en $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ dan is de functie $\lambda f + \mu g$ gedefinieerd door

$$(\lambda f + \mu g)(x) := \lambda f(x) + \mu g(x) \quad (x \in X).$$

Noem een functie $f : X \to \mathbf{R}$ *begrensd* als er een $M \geq 0$ bestaat zo dat $|f(x)| \leq M$ voor alle $x \in X$, of, equivalent gezegd, als de deelverzameling $\{|f(x)| \mid x \in X\}$ van $\mathbf{R}$ naar boven begrensd is. Als f begrensd is, dan bestaat dus

$$\|f\|_{\mathrm{b}} := \sup_{x\in X} |f(x)| \tag{S6.5}$$

als een reëel getal ≥ 0.

Zij $\mathcal{B}(X)$ de collectie van alle begrensde functies $f : X \to \mathbf{R}$. Merk op dat, als f, g begrensde functies zijn en $\lambda \in \mathbf{R}$, dan ook $f + g$ en λf begrensde functies zijn. Dus $\mathcal{B}(X)$ vormt een lineaire deelruimte van de lineaire ruimte van alle functies op X. We tonen nu aan dat (S6.5) een norm definieert op $\mathcal{B}(X)$ (de zogenaamde *supremumnorm* of *supnorm*), waarmee $\mathcal{B}(X)$ een genormeerde vectorruimte wordt. We gaan de eigenschappen (a), (b), (c) van Definitie S6.3 na. (a) en (b) volgen onmiddellijk uit (S6.5). We bewijzen de driehoeksongelijkheid (c). Laat $f, g \in \mathcal{B}(X)$. Dan geldt voor elke $x \in X$ dat

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{\mathrm{b}} + \|g\|_{\mathrm{b}}.$$

(Immers, $|f(x)| \leq \|f\|_{\mathrm{b}}$ en $|g(x)| \leq \|g\|_{\mathrm{b}}$.) We zien dat $\|f\|_{\mathrm{b}} + \|g\|_{\mathrm{b}}$ een bovengrens is van $\{|f(x) + g(x)|\}_{x\in X}$. Dus

$$\|f + g\|_{\mathrm{b}} = \sup_{x\in X} |f(x) + g(x)| \leq \|f\|_{\mathrm{b}} + \|g\|_{\mathrm{b}}.$$

Voorbeeld S6.7 Een speciaal geval van Voorbeeld S6.6 krijgen we voor $X := \mathbf{N}$. Een functie $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ kunnen we via $a_n := f(n)$ ook beschrijven als een rij $\mathbf{a} = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbf{R}$. Optelling en scalaire vermenigvuldiging worden dan gegeven door $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} := (\lambda a_n + \mu b_n)_{n=1}^{\infty}$. De genormeerde lineaire ruimte $\mathcal{B}(\mathbf{N})$ kunnen we dan beschrijven als de lineaire ruimte van alle begrensde rijen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbf{R}$ met norm gegeven door

$$\|\mathbf{a}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbf{N}} |a_n|. \tag{S6.6}$$

Deze genormeerde lineaire ruimte wordt meestal aangeduid met ℓ^∞.

Voorbeeld S6.8 Zij $X := [a,b]$ een gesloten begrensd interval. Duid met $C(X)$ de collectie aan van alle continue functies $f\colon X \to \mathbf{R}$. Dan is $C(X)$ een lineaire deelruimte van de lineaire ruimte van alle functies op X. Wegens Theorem 3.14 zijn de functies in $C(X)$ begrensd, dus $C(X)$ is een lineaire deelruimte van de genormeerde lineaire ruimte $\mathcal{B}(X)$, dus $C(X)$ is zelf ook een genormeerde lineaire ruimte t.o.v. de supnorm.

Propositie S6.9 Zij X een verzameling met twee metrieken ρ en ρ'. De twee metrieken heten *(topologisch) equivalent* als ze dezelfde topologie op X voortbrengen. (Zie een voorbeeld op p.130 van het boek.)
In het bijzonder, als er positieve reële getallen C_1 en C_2 bestaan zo dat

$$C_1\,\rho(x,y) \le \rho'(x,y) \le C_2\,\rho(x,y) \quad \text{voor alle } x,y \in X \tag{S6.7}$$

dan zijn ρ en ρ' equivalent.

Bewijs Schrijf $B(a,r)$ voor een open bal (om a met straal r) t.o.v. de metriek ρ, en $B'(a,r)$ voor een open bal t.o.v. de metriek ρ'. Dan volgt er uit (S6.7) dat voor elke $a \in X$ en $r > 0$ geldt:

$$B'(a, C_1 r) \subset B(a,r) \subset B'(a, C_2 r).$$

Dus als $a \in E \subset X$ en $B(a,\delta) \subset E$ voor zekere $\delta > 0$, dan $B'(a, C_1\delta) \subset E$. Dus als E open is t.o.v. ρ, dan is E open t.o.v. ρ'. Evenzo, als $a \in E \subset X$ en $B'(a,\delta) \subset E$ voor zekere $\delta > 0$, dan $B(a, \delta/C_2) \subset E$. Dus als E open is t.o.v. ρ', dan is E open t.o.v. ρ. ∎

Bij een metrische verzameling maken we onderscheid tussen *topologische* begrippen en *metrische* begrippen. Topologische begrippen hangen niet af van de speciale keuze van de metriek, maar alleen van de topologie (bijv. open verzameling, rand). Metrische begrippen hangen af van de keuze van de metriek (bijv. open bal).

Re: 6.2. *Continuous Mappings*

Lees de hele paragraaf in het boek.

Definition 6.12 Stel X en Y zijn topologische ruimtes en $f\colon X \to Y$. De afbeelding f heet *continu* in $x \in X$ als aan een van de volgende drie equivalente uitspraken voldaan is:

(a) Als V een omgeving van $f(x)$ in Y is, dan is $f^{-1}(V)$ een omgeving van x in X.

(b) Bij iedere omgeving V van $f(x)$ in Y is er een omgeving U van x in X zo dat $f(U) \subset V$.

(c) Bij iedere open omgeving V van $f(x)$ in Y is er een open omgeving U van x in X zo dat $f(U) \subset V$.

Als bovendien (X, ρ) en (Y, ρ') metrische ruimtes zijn dan is continuïteit van f in x ook equivalent met de volgende eigenschap (zie p.130 van het boek):

(d) Voor iedere $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zo dat voor alle $y \in X$ geldt:

$$\rho(y, x) < \delta \ \Rightarrow \ \rho'(f(y), f(x)) < \varepsilon.$$

Zij $A \subset X$. We noemen $f\colon X \to Y$ *continu op* A als f continu is in x voor elke $x \in A$. We noemen $f\colon X \to Y$ *continu* (zondermeer) als f continu is in x voor elke $x \in X$.

Proposition 6.14 Stel X en Y zijn topologische ruimtes en $f\colon X \to Y$. Dan zijn equivalent:
(a) f is continu.
(b) $f^{-1}(V)$ is een open verzameling in X voor elke open verzameling V in Y.
(c) $f^{-1}(V)$ is een gesloten verzameling in X voor elke gesloten verzameling V in Y.

Waarschuwing Als $f\colon X \to Y$ continu is dan hoeft niet te gelden dat $f(U)$ open is in Y voor elke open deelverzameling U van X. Zelfs als f bijectief is, dan hoeft dit niet te gelden.

Een afbeelding $f\colon X \to Y$ met de eigenschap dat $f(U)$ open is in Y voor elke open deelverzameling U van X, heet een *open afbeelding* (zie Definition 6.32). De afbeelding f is een homeomorfisme desda f bijectief, continu en open is (zie Definition 6.16).

Opmerking S6.10 Zij Y een topologische ruimte, $Z \subset Y$, en maak Z tot een topologische ruimte met de relatieve topologie. Dan is de afbeelding $z \mapsto z\colon Z \to Y$ continu (ga na). Zij ook X een topologische ruimte en $f\colon X \to Y$ zo dat $f(X) \subset Z$. Dan is $f\colon X \to Y$ continu desda $f\colon X \to Z$ continu is t.o.v. de relatieve topologie voor Z (ga na).

Opmerking S6.11 We kunnen gebruik maken van Proposition 6.14 om te bewijzen dat bepaalde deelverzamelingen van een topologische ruimte X gesloten zijn. Zij bijv. Y een Hausdorff-ruimte en zij $f\colon X \to Y$ continu. Zij $y \in f(X)$. Dan is de verzameling $\{x \in X \mid f(x) = y\}$ gesloten in X.

Neem als voorbeeld $X := \mathbf{R}^2$, $Y := \mathbf{R}$ en $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ een polynoom $f(x, y)$ in de reële variabelen x en y. Dan is voor elke $c \in \mathbf{R}$ de algebraïsche kromme $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid f(x, y) = c\}$ gesloten in $\mathbf{R}^2$.

Voorbeeld S6.12 Zij $E \subset \mathbf{R}^d$, $f\colon E \to \mathbf{R}$ en $\mathbf{a}$ een inwendig punt van E. Beschouw E en $\mathbf{R}$ als metrische ruimten. Dan is volgens Definition 6.12 (onderdeel (d)) f continu in $\mathbf{a}$ desda er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ is zo dat als $\mathbf{x} \in E$ en $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$ dan $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$. Deze definitie klopt met de definitie gegeven in syllabus Calculus Ia, hst. IV, p.105 voor het geval $d = 2$. Gezien Definition 6.12 hoeven we niet te eisen dat $a \in E$ een inwendig punt is. Als a wel inwendig punt is dan kunnen we voor gegeven $\varepsilon > 0$ onze $\delta > 0$ zo klein nemen dat $\mathbf{x} \in E$ voor alle $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ met $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$.

Re: 6.4. *Constructing Topological Spaces*

Van deze paragraaf behandelen we uit het boek alleen Definition 6.29, Lemma 6.30, Proposition 6.31 en Proposition 6.33, en ook nog slechts alleen voor het geval van metrische ruimtes en van eindige directe producten. Alle te behandelen stof staat hieronder in de syllabus. Voor deze paragraaf hoef je dus niet het boek te raadplegen.

Propositie S6.13 (zie Definition 6.29)
Laten (X_1, ρ_1) en (X_2, ρ_2) metrische ruimtes zijn. Definieer een functie $\rho\colon (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \to [0, \infty)$ als volgt:

$$\rho((a_1, a_2), (b_1, b_2)) := \max\{\rho_1(a_1, b_1), \rho_2(a_2, b_2)\}. \tag{S6.8}$$

Dan is ρ een metriek op $X_1 \times X_2$.

Algemener, als $(X_1, \rho_1), \ldots, (X_n, \rho_n)$ metrische ruimtes zijn dan definieert

$$\rho((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) := \max_{k=1,\ldots,n} \rho_k(x_k, y_k) \tag{S6.9}$$

een metriek ρ op $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

Bewijs We lopen de eigenschappen (a), (b), (c) van Definition 6.18 na. Eigenschappen (a) en (b) geven geen problemen (ga na). We zullen de driehoeksongelijkheid (c) bewijzen, d.w.z. de ongelijkheid

$$\rho((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \leq \rho((a_1, a_2), (c_1, c_2)) + \rho((c_1, c_2), (b_1, b_2)).$$

Voor het bewijs concluderen we uit

$$\rho_1(a_1, b_1) \leq \rho_1(a_1, c_1) + \rho_1(c_1, b_1) \leq \rho((a_1, a_2), (c_1, c_2)) + \rho((c_1, c_2), (b_1, b_2))$$

en

$$\rho_2(a_2, b_2) \leq \rho_2(a_2, c_2) + \rho_2(c_2, b_2) \leq \rho((a_1, a_2), (c_1, c_2)) + \rho((c_1, c_2), (b_1, b_2))$$

dat

$$\max\{\rho_1(a_1, b_1), \rho_2(a_2, b_2)\} \leq \rho((a_1, a_2), (c_1, c_2)) + \rho((c_1, c_2), (b_1, b_2)).$$

Het geval van een n-voudig direct product volgt nu door iteratie: gebruik dat $X_1 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ en omdat

$$\max\left(\max_{k=1,\ldots,n-1} \rho_k(x_k, y_k), \rho_n(x_n, y_n)\right) = \max_{k=1,\ldots,n} \rho_k(x_k, y_k). \qquad \blacksquare$$

Opmerking S6.14 Schrijf $X := X_1 \times \cdots \times X_n$. Dan geldt voor de open ballen in de metrische ruimte (X, ρ) dat

$$B((a_1, \ldots, a_n), \delta) = B(a_1, \delta) \times \cdots \times B(a_n, \delta). \tag{S6.10}$$

Dus $E \subset X$ is open desda er voor alle $(a_1 \ldots, a_n) \in E$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat $B(a_1, \delta) \times \cdots \times B(a_n, \delta) \subset E$.

Voorbeeld S6.15 Uitgaande van $\mathbf{R}$ als metrische ruimte verkrijgen we op $\mathbf{R}^d$ met behulp van Propositie S6.13 een metriek

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{i=1,\ldots,d} |x_i - y_i|.$$

Deze metriek is topologisch equivalent met de standaardmetriek (S6.3) op $\mathbf{R}^d$, zie een van de vraagstukken.

Propositie S6.16 Laten $(X_1, \rho_1), \ldots, (X_n, \rho_n)$ metrische ruimtes zijn. Maak $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ tot een metrische ruimte (X, ρ) volgens (S6.9). Definieer voor $k = 1, \ldots, n$ afbeeldingen $\pi_k \colon X \to X_k$ (*coördinaatprojecties*) door $\pi_k(x_1, \ldots, x_n) := x_k$. Dan geldt:

(a) De afbeeldingen $\pi_k \colon X \to X_k$ zijn continu.

(b) De afbeeldingen $\pi_k \colon X \to X_k$ zijn open.

(c) Zij Y een topologische ruimte en zij $f \colon Y \to X$. Dan is f continu desda $\pi_k \circ f \colon Y \to X_k$ continu is voor elke k.

Bewijs (a) Als $x, y \in X$ dan $\rho_k(\pi_k(x), \pi_k(y)) \le \rho(x, y)$. Dus voor iedere $x \in X$ en $\varepsilon > 0$ geldt: als $y \in B(x, \varepsilon)$ dan $\pi_k(y) \in B(\pi_k(x), \varepsilon)$.

(b) Zij $E \subset X$ open. We moeten laten zien dat $\pi_k(E)$ open is in X_k. Als $x_k \in \pi_k(E)$ dan is $x_k = \pi_k(x)$ voor zekere $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$. Omdat E open is, geldt er dat $x \in B(x_1, \delta) \times \cdots \times B(x_n, \delta) \subset E$ voor zekere $\delta > 0$. Dus $x_k = \pi_k(x) \in B(x_k, \delta) \subset \pi_k(E)$. Dus x_k is inwendig punt van $\pi_k(E)$.

(c) Als f continu is dan is $\pi_k \circ f$ als samenstelling van twee continue afbeeldingen continu. Veronderstel omgekeerd dat $\pi_k \circ f$ continu is voor alle k. We moeten bewijzen dat f continu is. Zij $a \in Y$ en $f(a) = b = (b_1, \ldots, b_n) \in X$ en zij V een open omgeving van b in X. We moeten een open omgeving U van a in Y vinden zo dat $f(U) \subset V$. Er bestaat $\delta > 0$ zo dat $b \in B(b_1, \delta) \times \cdots \times B(b_n, \delta) \subset V$. Nu geldt voor $y \in Y$: $f(y) \in B(b_1, \delta) \times \cdots \times B(b_n, \delta)$ desda $(\pi_k \circ f)(y) \in B(b_k, \delta)$ voor alle k desda $y \in \cap_{k=1}^n (\pi_k \circ f)^{-1}(B(b_k, \delta))$. Omdat de afbeeldingen $\pi_k \circ f$ continu zijn, is deze laatste verzameling als eindige doorsnede van open verzamelingen in Y dus open, en bovendien is a in deze verzameling bevat. Het is een open omgeving van a in Y zoals gezocht. ∎

Voorbeeld S6.17 We passen Propositie S6.16(c) toe op het geval dat $X = \mathbf{R}^d = \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}$ en Y een willekeurige topologische ruimte. Dan is, gezien Voorbeeld S6.15, een afbeelding $f \colon y \mapsto (f_1(y), \ldots, f_d(y)) \colon Y \to \mathbf{R}^d$ continu desda de functies $f_k \colon Y \to \mathbf{R}$ continu zijn voor $k = 1, \ldots, d$. Voor het geval dat Y een interval is en $d = 2$ werd dit reeds opgemerkt in syllabus Calculus Ia, hst. IV, Gevolg bovenaan p.99.

Waarschuwing Het is niet juist om naar analogie van bovenstaande te zeggen dat een functie $f \colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ continu is desda f continu is in elk van de d variabelen afzonderlijk. Zie de vraagstukken.

Lemma S6.18 (ga zelf na)
De afbeeldingen $(x, y) \mapsto x + y \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ en $(x, y) \mapsto xy \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ zijn continu.

Propositie S6.19 (generalisatie van Proposition 3.9)
Zij X een topologische ruimte, f en g reëelwaardige continue functies op X en $\lambda \in \mathbf{R}$. Dan zijn de functies λf, $f+g$, fg en (als $f(x) \neq 0$ voor alle $x \in X$) f^{-1} continu op X.

Bewijs De afbeelding $x \mapsto (f(x), g(x)) \colon X \to \mathbf{R}^2$ is continu wegens Propositie S6.16(c). Gebruik nu dat een samenstelling van continue afbeeldingen weer continu is, bijv.
$x \mapsto (f(x), g(x)) \mapsto f(x) + g(x) \colon X \to \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. ∎

Gevolg S6.20 Zij $f \colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ een polynoom, d.w.z. een functie van de vorm $f(\mathbf{x}) = \sum_{k_1,\ldots,k_d} c_{k_1,\ldots,k_d} x_1^{k_1} \ldots x_d^{k_d}$. Dan is f continu.

Voorbeeld S6.21 Zij X een topologische ruimte. De collectie van alle continue functies op X vormt een lineaire ruimte (zie Propositie S6.19). De ruimte $C_{\mathrm{b}}(X)$ van alle begrensde continue functies $f \colon X \to \mathbf{R}$ is ook een lineaire ruimte, en is een lineaire deelruimte van de genormeerde lineaire ruimte $\mathcal{B}(X)$ (zie Voorbeeld S6.6). Dus $C_{\mathrm{b}}(X)$ is ook een genormeerde lineaire ruimte t.o.v. de sup-norm (S6.5).

Opgaven bij Chapter 6, deel 1

Opg. S6.1 Als we hieronder over a en b spreken, bedoelen we $a, b \in \mathbf{R}$ met $a < b$.

(a) Bewijs dat een interval I in $\mathbf{R}$ een open verzameling in $\mathbf{R}$ is desda I van de vorm (a,b) of (a,∞) of $(-\infty,b)$ of $(-\infty,\infty)$ of $\emptyset$ is.

(b) Bewijs dat een interval I in $\mathbf{R}$ een gesloten verzameling in $\mathbf{R}$ is desda I van de vorm $\{a\}$ of $[a,b]$ of $[a,\infty)$ of $(-\infty,b]$ of $(-\infty,\infty)$ of $\emptyset$ is.

(c) Geef in $\mathbf{R}$ de afsluiting, het inwendige en de rand van de verzameling (a,b).

(d) Schrijf $[a,b]$ als een aftelbaar oneindige doorsnede van open intervallen in $\mathbf{R}$. Concludeer dat in een topologische ruimte een oneindige doorsnede van open verzamelingen niet open hoeft te zijn.

(e) Schrijf (a,b) als een aftelbaar oneindige vereniging van gesloten intervallen.

Opg. S6.2 Zij X een topologische ruimte. Veronderstel dat U open is, en V gesloten. Toon aan dat:

(a) $U \setminus V$ is open

(b) $V \setminus U$ is gesloten.

(c) Concludeer dat voor $E \subset X$ de rand van E gesloten is.

Opg. S6.3 Bepaal de afsluiting en het inwendige van $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$.

Opg. S6.4 Geef aan $\mathbf{Q}$ de relatieve topologie als deelverzameling van $\mathbf{R}$.

(a) Bewijs dat de verzameling $\{q \in \mathbf{Q} \mid q < \sqrt{2}\}$ open en gesloten is in $\mathbf{Q}$.

(b) Zij $a \in \mathbf{R}$. Zij $U_a := \{q \in \mathbf{Q} \mid q < a\}$. Bewijs dat U_a open is in $\mathbf{Q}$. Geef ook een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor a opdat U_a gesloten is in $\mathbf{Q}$.

Opg. S6.5 Bekijk de verzamelingen $\mathbf{N}$, $X := \{n^{-1} \mid n \in \mathbf{N}\}$, $Y := X \cup \{0\}$, elk met de relatieve topologie als deelverzameling van $\mathbf{R}$.

(a) Bestaat er een homeomorfisme van X op $\mathbf{N}$?

(b) Bestaat er een homeomorfisme van Y op $\mathbf{N}$?

Opg. S6.6 Zij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ een convergente rij in $\mathbf{R}$ met limiet L. Bepaal de afsluiting in $\mathbf{R}$ van de verzameling $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Opg. S6.7 Zij X een topologische ruimte en $E \subset Y \subset X$. Zij $\mathrm{cl}_X\, E$ de afsluiting van E in X en $\mathrm{cl}_Y\, E$ de afsluiting van E in Y (met op Y de relatieve topologie). Bewijs dat $\mathrm{cl}_Y\, E = Y \cap \mathrm{cl}_X\, E$.

Opg. S6.8 Schrijf de standaardnorm op $\mathbf{R}^d$ als

$$\|\mathbf{x}\|_2 := (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}.$$

Definieer ook

$$\|\mathbf{x}\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_d|, \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}.$$

(a) Bewijs dat $\|\,.\,\|_1$ en $\|\,.\,\|_\infty$ normen op $\mathbf{R}^d$ zijn.

(b) Bewijs dat voor alle $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ geldt:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1 \le \sqrt{d}\,\|\mathbf{x}\|_2 \le d\,\|\mathbf{x}\|_\infty.$$

Concludeer dat de drie normen op $\mathbf{R}^d$ aanleiding geven tot topologisch equivalente metrieken.

Opg. S6.9 Exercise 1 in Browder.

Opg. S6.10 Bepaal de afsluiting, het inwendige en de rand van:

(a) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < y\}$

(b) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2y^2 = 1\}$

Opg. S6.11 Zij (X, ρ) een metrische ruimte. Op $X \times X$ definiëren we de functie $\rho'(x, y) := \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$.

(a) Laat zien dat ρ' een metriek is op X.

$\star$(b) Toon aan dat de metrieken ρ en ρ' topologisch equivalent zijn.

Opg. S6.12 Zij $\mathbf{T} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ de eenheidscirkel in $\mathbf{R}^2$. Zij ρ de door $\mathbf{R}^2$ geïnduceerde metriek op $\mathbf{T}$. Definieer $\rho'((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ als de kortste booglengte via $\mathbf{T}$ tussen de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) van $\mathbf{T}$. Bewijs dat ρ' een metriek is op $\mathbf{T}$ en dat ρ' topologisch equivalent is met ρ.

⋆ **Opg. S6.13** Zij $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ de eenheidssfeer in $\mathbf{R}^3$. Zij ρ de door $\mathbf{R}^3$ geïnduceerde metriek op S^2. Definieer $\rho'((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2))$ als de kortste booglengte via S^2 tussen de punten (x_1,y_1,z_1) en (x_2,y_2,z_2) van S^2. Bewijs dat ρ' een metriek is op S^2 en dat ρ' topologisch equivalent is met ρ.

Opg. S6.14 Zij $C^1([0,1])$ de lineaire ruimte van alle continu differentieerbare functies op het interval $[0,1]$. (Dus voor f in deze ruimte bestaat f' en is continu op $[0,1]$, waarbij $f'(0)$ rechter afgeleide is en $f'(1)$ linker afgeleide.) Geef in de onderstaande gevallen aan wanneer $\|\,.\,\|$ een norm is op $C^1([0,1])$:

(a) $\|f\| := \sup_{t\in[0,1]}\big(|f(t)|+|f'(t)|\big)$

(b) $\|f\| := \sup_{t\in[0,1]}|f'(t)|$

(c) $\|f\| := \sup_{t\in[0,1]}|f(t)+f'(t)|$

(d) $\|f\| := |f(0)|+\sup_{t\in[0,1]}|f'(t)|$

Opg. S6.15 Bestaat er een homeomorfisme van $X := [0,1]$ op $Y := [0,1)\cup(2,3]$ (beide met de relatieve topologie als deelverzameling van $\mathbf{R}$)?

Opg. S6.16 Vind alle deelverzamelingen E van $\mathbf{R}$ zo dat E homeomorf is met $[0,1]$ (beide met de relatieve topologie als deelverzameling van $\mathbf{R}$). Idem die homeomorf zijn met $(0,1)$. Idem die homeomorf zijn met $[0,1)$.

Opg. S6.17 Zij $f\colon \mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbf{R}$.

(a) Bewijs dat f op hoogstens één manier uitgebreid kan worden tot een functie $f\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ die continu is in $(0,0)$.

(b) Zij $f(x,y) := xy/(x^2+y^2)$ als $(x,y)\neq(0,0)$ en $f(0,0) := 0$. Bewijs dat voor elke $y\in\mathbf{R}$ de functie $x\mapsto f(x,y)$ continu is op $\mathbf{R}$ en dat voor elke $x\in\mathbf{R}$ de functie $y\mapsto f(x,y)$ continu is op $\mathbf{R}$, maar dat $f\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ niet continu is in $(0,0)$. Bestaat er een andere keuze voor $f(0,0)$ zo dat $f\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ continu is in $(0,0)$?

(c) Zij $f(x,y) := x^2y^2/(x^2+y^2)$ als $(x,y)\neq(0,0)$. Ga na of de functie uitgebreid kan worden tot een continue functie $f\colon\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$.

Opg. S6.18 Gegeven zijn metrische ruimtes $X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n$ en continue afbeeldingen $f_k\colon X_k\to Y_k$ $(k=1,\ldots,n)$. Definieer $F\colon X_1\times\cdots\times X_n\to Y_1\times\cdots\times Y_n$ door $F(x_1,\ldots,x_n) := (f_1(x_1),\ldots,f_n(x_n))$. Bewijs dat F continu is.

Opg. S6.19 Gegeven zijn metrische ruimtes $(X_1,\rho_1),\ldots,(X_n,\rho_n)$. Zij $X := X_1\times\cdots\times X_n$ met metriek ρ gegeven door (S6.9). Definieer op $X\times X$ ook de functies

$$\rho'((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) := \rho_1(x_1,y_1)+\cdots+\rho_n(x_n,y_n),$$
$$\rho''((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) := \big(\rho_1(x_1,y_1)^2+\cdots+\rho_n(x_n,y_n)^2\big)^{1/2}.$$

Bewijs dat ρ' en ρ'' metrieken zijn op X en dat ze allebei topologisch equivalent zijn met ρ.

Opg. S6.20 Zij (X, ρ) een metrische ruimte.
(a) Bewijs dat voor elke $x, y, z \in X$ geldt dat

$$|\rho(x, y) - \rho(x, z)| \leq \rho(y, z).$$

(b) Bewijs dat de functie $(x, y) \mapsto \rho(x, y)$ continu is op $X \times X$.

Opg. S6.21 Zij X een metrische ruimte. Bewijs dat de diagonaal $\{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ een gesloten verzameling is in $X \times X$.

Opg. S6.22 Exercise 8 in Browder.

Opg. S6.23 Zij $\mathbf{T}$ de eenheidscirkel $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ met relatieve topologie als deelverzameling van $\mathbf{R}^2$. Zij $E \subset \mathbf{R}$ met relatieve topologie als deelverzameling van $\mathbf{R}$. Bewijs dat $\mathbf{T}$ en E niet homeomorf kunnen zijn.

Opg. S6.24 Zij S^2 de eenheidssfeer in $\mathbf{R}^3$, i.e., $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Zij $X := S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ met de relatieve topologie als deelverzameling van $\mathbf{R}^3$. Zij $f : X \to \mathbf{R}^2$ de stereografische projectie gedefinieerd door

$$f(x, y, z) := (x/(1 - z), y(1 - z)) \quad ((x, y, z) \in X).$$

Bewijs dat f een homeomorfisme is van X op $\mathbf{R}^2$.

Opg. S6.25 Zij $M_n(\mathbf{R})$ de lineaire ruimte van alle reële $n \times n$ matrices. Vat de matrixelementen A_{ij} van $A \in M_n(\mathbf{R})$ op als de n^2 coördinaten van A, en identificeer zo $M_n(\mathbf{R})$ als lineaire ruimte met $\mathbf{R}^{n^2}$. Hierdoor wordt $M_n(\mathbf{R})$ een metrische ruimte en dus een topologische ruimte. Zij $\det(A)$ de determinant van A. Zij $GL(n, \mathbf{R})$ de collectie van alle inverteerbare reële $n \times n$ matrices.
(a) Bewijs dat de afbeelding $(A, B) \mapsto AB : M_n(\mathbf{R}) \times M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$ continu is.
(b) Bewijs dat de afbeelding $A \mapsto \det(A) : M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ continu is.
(c) Bewijs dat $GL(n, \mathbf{R})$ een open verzameling is in $M_n(\mathbf{R})$.
(d) Bewijs dat de afbeelding $A \mapsto A^{-1} : GL(n, \mathbf{R}) \to GL(n, \mathbf{R})$ continu is.

Opg. S6.26 Zij $O(n)$ de collectie van alle $n \times n$ orthogonale matrices. Dan is $O(n) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid AA^t = I\}$ (A^t is getransponeerde van A; I is $n \times n$ eenheidsmatrix). Definieer ook $SO(n)$ als de collectie van alle $A \in O(n)$ met determinant 1.
(a) Bewijs dat $O(n)$ een gesloten verzameling is in $M_n(\mathbf{R})$.
(b) Bewijs dat $SO(n)$ een gesloten verzameling is in $M_n(\mathbf{R})$.

Chapter 6 “Topology”(deel 2)

Errata

p.142, Theorem 6.59, Proof, l.1: replace $\rho(f(y) - f(x))$ by $\rho(f(x), f(y))$

Definition 6.66, l.1: replace “space X” by “topological space X”

Toelichting bij Chapter 6, deel 2

In deze aflevering van de syllabus behandelen we (delen van) de paragrafen 6.5–6.7 uit het boek. Na alle definities uit het eerste deel van de syllabus bij Chapter 6 zullen er in dit deel nog vele volgen, maar we gaan nu ook de vruchten plukken van onze inspanningen in de vorm van fraaie stellingen die vaak stellingen uit Chapters 1–3 generaliseren. Onderwerpen geschikt voor een presentatie zijn Theorem 6.44 (contractiestelling) en Example 6.83 (Cantor-verzameling).

Re: 6.5. *Sequences*

Van deze paragraaf behandelen we het boek tot/met Proposition 6.41, maar we voegen wat zaken toe over convergentie van een rij t.o.v. de supnorm en uniforme convergentie. De paragraaf behandelt rijen en limieten van rijen in toplogische, maar vooral in metrische ruimtes. We geven de definitie van een Cauchy-rij in een metrische ruimte. Dit geeft aanleiding tot de uitermate belangrijke begrippen van volledige metrische ruimte en volledige genormeerde ruimte. Convergentie van een rij in de genormeerde lineaire ruimte $\mathcal{B}(X)$ blijkt ook geformuleerd te kunnen worden als z.g. uniforme convergentie van een rij functies op X. Ook uniforme convergentie is een fundamenteel begrip, dat herhaaldelijk in latere vakken zal terugkomen.

Definition 6.34 Zij X een topologische ruimte. Zij $x_1, x_2, \dots$ een rij van elementen van X. (De nummering mag ook bij een ander geheel getal beginnen.) Kortweg spreken we over de rij (x_n) in X. Zij $x \in X$. We zeggen dat de rij (x_n) *convergeert met limiet* x als het volgende geldt:
Bij iedere omgeving U van x bestaat er $n_0 \in \mathbf{N}$ zo dat $x_n \in U$ voor alle $n \geq n_0$.
Notatie $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Propositie S6.22 (volgt onmiddellijk, ga na)
Zij (X, ρ) een metrische ruimte. Zij (x_n) een rij in X en zij $x \in X$. Dan zijn equivalent:

(a) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

(b) Bij iedere $\varepsilon > 0$ bestaat er $n_0 \in \mathbf{N}$ zo dat $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ voor alle $n \geq n_0$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$.

Uitspraak (b) toegepast op de metrische ruimte $\mathbf{R}$ geeft de vertrouwde definitie van convergentie van een rij in $\mathbf{R}$. In uitspraak (c) blijken we convergentie van een rij in een metrische ruimte te kunnen herformuleren in termen van convergentie van een rij in $\mathbf{R}$.

Proposition 6.36 In een Hausdorff-ruimte X geldt: als een rij in X een limiet heeft, dan is de limiet uniek. In het bijzonder geldt dit in een metrische ruimte.

Propositie S6.23 Zij (X, ρ) een metrische ruimte die het directe product is van de metrische ruimtes $(X_1, \rho_1), \ldots, (X_d, \rho_d)$. Zij $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij in X en schrijf $\mathbf{x}_n = (x_{1,n}, \ldots, x_{d,n})$. Zij $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in X$. Dan zijn equivalent:

(a) $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$.

(b) $\lim_{n\to\infty} x_{i,n} = x_i$ voor $i = 1, \ldots, d$.

Bewijs $\lim_{n\to\infty} \max\big(\rho_1(x_{1,n}, x_1), \ldots, \rho_d(x_{d,n}, x_d)\big) = 0$ desda $\lim_{n\to\infty} \rho_i(x_{i,n}, x_i) = 0$ voor $i = 1, \ldots, d$. ∎

Voorbeeld S6.24 In $X := \mathbf{R}^d$ geldt dat $\lim_{n\to\infty}(x_{1,n}, \ldots, x_{d,n}) = (x_1, \ldots, x_d)$ desda $\lim_{n\to\infty} x_{i,n} = x_i$ voor $i = 1, \ldots, d$.

Proposition 6.37 Zij X een metrische ruimte, $E \subset X$ en $x \in X$. Dan ligt x in de afsluiting $\overline{E}$ van E desda er een rij (x_n) in E is zo dat $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Opmerking Er bestaan topologische Hausdorff-ruimtes X met $E \subset X$ en $x \in \overline{E}$ zo dat x geen limiet is van een rij in E. Zulke topologische ruimtes kunnen uiteraard niet topologisch equivalent zijn met een metrische ruimte.

Proposition 6.38 Zij X een metrische ruimte en Y een topologische ruimte. Zij $f\colon X \to Y$ en $x \in X$. Dan zijn equivalent:

(a) f is continu in x.

(b) Voor elke rij (x_n) in X met $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ geldt dat $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Deze Propositie zullen we vooral bij functies $f\colon X \to \mathbf{R}$ gebruiken (met X metrisch). Voor functies op een interval zijn we deze Propositie al tegengekomen in Proposition 3.8 (equivalentie van (a) en (e)). De implicatie (a)⇒(b) van Proposition 6.38 blijft waar als X een topologische ruimte is, maar de implicatie (b)⇒(a) hoeft dan niet waar te zijn.

Definition 6.39 Zij (X, ρ) een metrische ruimte. Een rij (x_n) in X heet een *Cauchy-rij* als er bij elke $\varepsilon > 0$ een $n_0 \in \mathbf{N}$ bestaat zo dat voor alle $n, m \in \mathbf{N}$ geldt: als $n, m \geq n_0$ dan $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Voor $X := \mathbf{R}$ levert dit de vertrouwde definitie van Cauchy-rij op. In een direct product (X, ρ) van metrische ruimtes $(X_1, \rho_1), \ldots, (X_d, \rho_d)$ is een rij $(\mathbf{x}_n)$ Cauchy-rij desda er coördinaatsgewijs sprake is van een Cauchy-rij, d.w.z. desda de rij $(x_{i,n})_{n=1}^{\infty}$ Cauchy-rij is in X_i voor $i = 1, \ldots, d$. Dit volgt omdat

$$\rho(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) = \max\big(\rho_1(x_{1,n}, x_{1,m}), \ldots, \rho_d(x_{d,n}, x_{d,m})\big).$$

In het bijzonder is in $X := \mathbf{R}^d$ de rij $(\mathbf{x}_n)$ Cauchy-rij desda $(x_{i,n})_{n=1}^{\infty}$ Cauchy-rij is in $\mathbf{R}$ voor $i = 1, \ldots, d$.

In een algemene topologische ruimte is het niet goed mogelijk om een definitie van Cauchy-rij te geven.

Propositie S6.25 (volgt direct, ga na)
In een metrische ruimte is elke convergente rij een Cauchy-rij.

Definition 6.40 Een metrische ruimte X heet *volledig* als elke Cauchy-rij in X convergeert naar een limiet in X.

Dus $\mathbf{R}$ is volledig, $\mathbf{R}^d$ is volledig, en een direct product van eindig veel volledige metrische ruimtes is volledig.

Opmerking S6.26 In Definition 1.18 werd gedefinieerd wanneer een geordend lichaam volledig is. Dat is niet hetzelfde volledigheidsbegrip als hier in Definition 6.40. Immers, een geordend lichaam heeft niet noodzakelijk op een natuurlijke manier de structuur van een metrische ruimte. In het geval van het geordende lichaam $\mathbf{R}$ is het wel zo dat volledigheid in de zin van Definition 1.18 volledigheid in de zin van Definition 6.40 impliceert (gezien de Stelling van Cauchy gegeven in Theorem 2.19).

We herinneren er aan dat een deelverzameling Y van een metrische ruimte (X, ρ) zelf een metrische ruimte wordt door de metriek $\rho: X \times X \to [0, \infty)$ te beperken tot $Y \times Y$. De zo verkregen metriek op Y noemen we de *door X geïnduceerde metriek op Y*.

Proposition 6.41 Zij X een volledige metrische ruimte en $E \subset X$. Dan is E met de geïnduceerde metriek volledig desda E gesloten is.

Dus in $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}^d$ zijn alle gesloten verzamelingen volledig, bijv. de intervallen $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$, de halfruimte $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d \mid x_d \geq 0\}$ en de gesloten bal
$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d \mid x_1^2 + \cdots + x_d^2 \leq 1\}$. Maar $\mathbf{Q}$ is niet volledig en evenmin $[0, 1] \cap \mathbf{Q}$.

Definitie S6.27 Zij V een genormeerde lineaire ruimte. Die kunnen we ook als metrische ruimte beschouwen (zie Propositie S6.4). Een rij (x_n) in V is dan een Cauchy-rij desda er bij elke $\varepsilon > 0$ een $n_0 \in \mathbf{N}$ bestaat zo dat $\rho(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\| < \varepsilon$ voor alle $n, m \geq n_0$.
We noemen een genormeerde lineaire ruimte *volledig* als hij, beschouwd als metrische ruimte, volledig is.
Een volledige genormeerde lineaire ruimte heet een *(reële) Banach-ruimte*.
Een lineaire ruimte met inproduct die als genormeerde lineaire ruimte volledig is, heet een *(reële) Hilbert-ruimte*.

Voorbeeld S6.28 Zij X een verzameling en zij $\mathcal{B}(X)$ de genormeerde lineaire ruimte van begrensde functies op X met de sup-norm $\|\,.\,\|_{\mathrm{b}}$ (zie Voorbeeld S6.6). Zij (f_n) een rij in $\mathcal{B}(X)$ en zij $f \in \mathcal{B}(X)$. Dan zijn equivalent:

(a) $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ (convergentie in $\mathcal{B}(X)$).

(b) $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathrm{b}} = 0$

(c) $\lim_{n\to\infty} \big(\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|\big) = 0$.

(d) Bij alle $\varepsilon > 0$ bestaat er $n_0 \in \mathbf{N}$ zo dat $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ voor alle $n \geq n_0$.

(e) Bij alle $\varepsilon > 0$ bestaat er $n_0 \in \mathbf{N}$ zo dat voor alle $x \in X$ geldt: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ voor alle $n \geq n_0$.

In het algemenere geval van functies f_n en f op X die niet noodzakelijk begrensd zijn, hebben de uitspraken (d) en (e) nog steeds betekenis, en ze zijn nog steeds equivalent. (Ook kunnen we (b) en (c) zo interpreteren dat ze dan betekenis houden, en equivalent blijven met (d) en (e)).

Definitie S6.29 Zij X een verzameling. Zij f een functie op X en (f_n) een rij van functies op X.

(a) De rij (f_n) *convergeert puntsgewijs op X naar f* als $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ voor elke $x \in X$, d.w.z. bij elke $x \in X$ en bij elke $\varepsilon > 0$ bestaat er $n_0 \in \mathbf{N}$ zo dat $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ voor alle $n \geq n_0$.

(b) De rij (f_n) *convergeert uniform naar f op X* als uitspraak (e) in Voorbeeld S6.28 geldt, dus bij alle $\varepsilon > 0$ bestaat er $n_0 \in \mathbf{N}$ zo dat voor alle $x \in X$ geldt: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ voor alle $n \geq n_0$.

Merk op:

- Als (f_n) uniform convergeert naar f op X dan convergeert (f_n) puntsgewijs naar f op X.
- In (a) hangt n_0 zowel van ε als x af, in (b) hangt n_0 alleen van ε af.
- Een rij (f_n) in $\mathcal{B}(X)$ convergeert naar $f \in \mathcal{B}(X)$ t.o.v. de supnorm-metriek desda (f_n) uniform naar f convergeert.
- Zie in het boek na Definition 3.22 een voorbeeld van een rij functies op $[0, 1]$ die puntsgewijs convergeert, maar niet uniform.

Stelling S6.30 (*erfelijkheidsstelling voor continue functies*)
In een topologische ruimte X geldt: Als een rij (f_n) van continue functies op X uniform convergeert op X naar een functie f op X, dan is f continu.

Bewijs Zij $x \in X$ en zij $\varepsilon > 0$. Gezien de uniforme convergentie van (f_n) naar f op X is er een $n \in \mathbf{N}$ zo dat $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon/3$ voor elke $y \in X$. Neem zo'n n. Omdat f_n continu is in x, bestaat er een omgeving U van x in X zo dat $|f_n(y) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ voor elke $y \in U$. Dus als $y \in U$ dan

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

Dus f is continu in x. ∎

Het boek geeft Stelling S6.30 voor het geval dat X een interval is in Theorem 3.24.

Gevolg S6.31 Zij X een topologische ruimte. Zij $C_{\mathrm{b}}(X)$ de genormeerde lineaire ruimte van continue begrensde functies op X (zie Voorbeeld S6.21). Dan is $C_{\mathrm{b}}(X)$ een gesloten lineaire deelruimte van $\mathcal{B}(X)$.

Bewijs Gezien Proposition 6.37 moeten we aantonen dat, als (f_n) een rij in $C_{\mathrm{b}}(X)$ is en deze rij convergeert in de metriek van $\mathcal{B}(X)$ naar zekere $f \in \mathcal{B}(X)$, dan $f \in C_{\mathrm{b}}(X)$. Maar dit volgt uit Stelling S6.30. ∎

Propositie S6.32 (volgt onmiddellijk, ga na)
Zij X een verzameling en zij (f_n) een rij van begrensde functies op X die uniform op X convergeert naar een functie f. Dan is f begrensd.

Definitie S6.33 Zij X een verzameling. Een rij (f_n) van functies op X heet *uniform Cauchy op X* als er bij elke $\varepsilon > 0$ een $n_0 \in \mathbf{N}$ bestaat zo dat voor alle $x \in X$ geldt: als $n, m \geq n_0$ dan $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Als een rij (f_n) uniform Cauchy is op X, dan geldt voor elke $x \in X$ dat de rij $(f_n(x))$ in $\mathbf{R}$ een Cauchy-rij is in $\mathbf{R}$. De omgekeerde implicatie geldt in het algemeen niet.

Propositie S6.34 (volgt onmiddellijk, ga na)
Zij X een verzameling. Als een rij (f_n) van functies op X uniform op X convergeert naar een functie f op X dan is de rij (f_n) uniform Cauchy op X.

Stelling S6.35 (*Stelling van Cauchy in het uniforme geval*)
Zij X een verzameling. Als (f_n) een rij van functies is op X die uniform Cauchy is op X, dan bestaat er een functie f op X zo dat (f_n) uniform naar f convergeert op X.

$\star$ **Bewijs** Omdat de rij (f_n) uniform Cauchy is op X, geldt voor elke $x \in X$ dat $(f_n(x))$ een Cauchy-rij is, dus $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ bestaat puntsgewijs. Neem $\varepsilon > 0$. Omdat (f_n) uniform Cauchy is, bestaat er $n_0 \in \mathbf{N}$ zo dat $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ als $x \in X$ en $n, m \geq n_0$. Dus voor alle $x \in X$ en $n \geq n_0$ geldt dat $|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$. Dus f_n convergeert uniform naar f op X. ∎

Stelling S6.35 wordt in het boek gegeven als Proposition 3.23.

Gevolg S6.36 Zij X een verzameling.

(a) De genormeerde lineaire ruimte $\mathcal{B}(X)$ is volledig.

(b) Als X een topologische ruimte is dan is de genormeerde lineaire ruimte $C_\mathrm{b}(X)$ volledig.

Bewijs Gezien Propositie S6.32 volgt (a) uit Stelling S6.35. Gezien Gevolg S6.31 en Proposition 6.41 volgt (b) uit (a). ∎

6.5b *Completering van metrische ruimtes* (niet in het boek)

Het is bij het werken met een metrische ruimte aantrekkelijk om over de volledigheids-eigenschap te kunnen beschikken. Als een metrische ruimte niet volledig is dan kunnen we hem completeren (volledig maken). Het eerste voorbeeld dat je daarvan gezien hebt, is de completering van $\mathbf{Q}$ (niet volledig) tot $\mathbf{R}$ (wel volledig), waarbij $\mathbf{Q}$ dicht ligt in $\mathbf{R}$. Deze uitbreiding gebeurde in Theorem 1.33 door een nieuwe verzameling van z.g. Dedekind-sneden van $\mathbf{Q}$ te bekijken, hierin alle structuur van $\mathbf{R}$ aan te brengen en dan een isomorfisme te geven van $\mathbf{Q}$ met een dichte deelverzameling van deze verzameling van Dedekind-sneden. Iets soortgelijks is het geval bij de hieronder te geven definitie van completering van een metrische ruimte.

Definitie S6.37 Laten (X, ρ) en (X', ρ') metrische ruimtes zijn. Zij $f\colon X \to X'$. We noemen f een *isometrie van X in X'* als $\rho'(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$ voor alle $x, y \in X$. Dan is f injectief (ga na). Als f bovendien surjectief is, dan noemen we f een *isometrie van X op X'*.

Merk op: een isometrie van X in X' is continu. Een isometrie van X op X' is een homeomorfisme.

Merk ook op: als $f\colon X \to Y'$ een isometrie is van een metrische ruimte X in een metrische ruimte Y' en als we het beeld $X' := f(X)$ als metrische ruimte beschouwen met de door Y' geïnduceerde metriek, dan is $f\colon X \to X'$ een isometrie van X op X'.

Definitie S6.38 Zij X een metrische ruimte. Een *completering van X* is een paar (Y', f), waarbij Y' een volledige metrische ruimte is en $f\colon X \to Y'$ een isometrie van X in Y' is zo dat het beeld $X' := f(X)$ dicht ligt in Y'.

Voorbeeld S6.39 Je kijkt misschien wat vreemd aan tegen Definitie S6.38. Het kan eenvoudiger als X al gegeven is als een dichte deelruimte van een volledige metrische ruimte Y. Geef dan aan X de geïnduceerde metriek. Dan is $\mathrm{id}\colon x \mapsto x\colon X \to Y$ een isometrie van X in Y met beeld X. Dus het paar (Y, id) is een completering van X. Een paar voorbeelden van deze situatie:

(a) $X := \mathbf{Q}$, $Y := \mathbf{R}$.
(b) $X := (0, 1)$, $Y := [0, 1]$.
(c) X is de ruimte van continue en stuksgewijs lineaire functies op $[0, 1]$, $Y := C([0, 1])$. (Zie Theorem 3.20, Voorbeeld S6.8 en Gevolg S6.36(b).)

Als je echter begint met een metrische ruimte X zonder dat je al een volledige metrische ruimte Y kent waarin X een dichte deelruimte is, dan kun je niet om de algemene Definitie S6.38 heen.

Stelling S6.40 Zij X een metrische ruimte. Dan bestaat er een completering van X. Als (Y_1, f_1) en (Y_2, f_2) twee completeringen zijn van X dan is er een unieke isometrie F van Y_1 op Y_2 zo dat $F \circ f_1 = f_2$ (zie het commutatieve diagram hieronder).

$$\begin{tikzcd} & Y_1 \arrow[dd, "F"] \\ X \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & \\ & Y_2 \end{tikzcd}$$

De stelling zegt dus dat elke metrische ruimte een completering heeft en dat dat de completering van een metrische ruimte essentieel uniek is. De essentiële uniciteit volgt onmiddellijk uit het volgende lemma.

⋆ **Lemma S6.41** Laten (Y_1, ρ_1) en (Y_2, ρ_2) volledige metrische ruimtes zijn met dichte deelruimte X_1 van Y_1 en dichte deelruimte X_2 van Y_2. Laat $f\colon X_1 \to X_2$ een isometrie van X_1 op X_2 zijn. Dan heeft f een unieke uitbreiding tot een isometrie van Y_1 op Y_2.

Bewijs Eerst bewijzen we de uniciteit. Stel F is een uitbreiding van f tot een isometrie van Y_1 op Y_2. In het bijzonder is $F: Y_1 \to Y_2$ continu. Zij $y \in Y_1$. Omdat X_1 dicht ligt in Y_1 is er een rij (x_n) in X_1 die convergeert naar y (ga na). Vanwege Proposition 6.38 geldt dat $F(y) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Dus $F(y)$ is uniek bepaald door f.

Vervolgens bewijzen we de existentie van F. We beginnen zoals in het eerste deel van het bewijs met $y \in Y_1$ en een rij (x_n) in X_1 die convergeert naar y. Dan is (x_n) een Cauchy-rij. Omdat f een isometrie is van X_1 op X_2, is $(f(x_n))$ een Cauchy-rij in X_2, dus ook in de volledige metrische ruimte Y_2. Dus de limiet van deze rij bestaat in Y_2. We willen definiëren

$$F(y) := \lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad \text{als } \lim_{n\to\infty} x_n = y, \tag{S6.11}$$

maar we moeten nog aantonen dat de definitie van $F(y)$ onafhankelijk van de keuze van de rij (x_n) is.

Laat evenzo (x'_n) een rij in X_1 zijn die convergeert naar $y' \in Y_1$ (in eerste instantie mag $y \neq y'$). Dan heeft de rij $(f(x'_n))$ in X_2 een limiet in Y_2. Nu volgt met gebruik van Opgave S6.20(b), Proposition 6.38 en Propositie S6.23 dat

$$\begin{aligned} \rho'(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(x'_n)) &= \lim_{n\to\infty} \rho'(f(x_n), f(x'_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = \rho(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} x'_n) = \rho(y, y'). \end{aligned}$$

Hieruit trekken we twee conclusies:

1. Als $y = y'$, dan is $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$. Dus de definitie (S6.11) is onafhankelijk van de keuze van de rij (x_n) die convergeert naar y.
2. $\rho'(F(y), F(y')) = \rho(y, y')$, dus F is een isometrie van Y_1 in Y_2.

F is een uitbreiding van f, want laat $x \in X_1$ en neem de rij (x_n) met $x_n := x$ voor alle n. Dan $F(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Tenslotte laten we zien dat F surjectief is. Want neem $y' \in Y_2$. Dan is er een rij (x'_n) in X_2 die convergeert naar y', dus die een Cauchy-rij is in X_2. Omdat f een isometrie is van X_1 op X_2, is er dus een Cauchy-rij (x_n) in X_1 zo dat $f(x_n) = x'_n$ voor alle $n \in \mathbf{N}$. Omdat Y_1 volledig is, convergeert de rij (x_n) naar zekere $y \in Y_1$. Volgens onze definitie van F zal dan $F(y) = y'$. ∎

De existentie van een completering van een metrische ruimte zal volgen uit het volgende Lemma.

$\star$ **Lemma S6.42** Zij (X, ρ) een metrische ruimte. Neem $a \in X$ vast. Definieer voor elke $x \in X$ een functie f_x op X door

$$f_x(y) := \rho(y, x) - \rho(y, a) \qquad (y \in X).$$

Dan is f_x een continue begrensde functie op X en de afbeelding $\phi: x \mapsto f_x: X \to C_\mathrm{b}(X)$ is een isometrie van X in $C_\mathrm{b}(X)$.

Bewijs Er volgt uit Opgave S6.20(a) (in feite uit de driehoeksongelijkheid) dat $|f_x(y)| \leq \rho(x, a)$, dus f_x is een begrensde functie. De continuïteit van f_x volgt uit S6.20(b). Nu bewijzen we de isometrie-eigenschap. Laat $w, x \in X$. Dan $f_w(y) - f_x(y) = \rho(y, w) - \rho(y, x)$. Dus er volgt voor $y := x$ dat $f_w(x) - f_x(x) = \rho(w, x)$ en er volgt uit Opgave S6.20(a) dat $|f_w(y) - f_x(y)| \leq \rho(w, x)$ voor alle $y \in X$. Dus de functie $|f_w - f_x|$ neemt zijn maximum aan op X, dus $\|f_w - f_x\|_\mathrm{b} = \sup_{y\in X} |f_w(y) - f_x(y)| = \max_{y\in X} |f_w(y) - f_x(y)| = \rho(w, x)$. ∎

$\star$ **Gevolg S6.43** Behoud de gegevens uit Lemma S6.42. Zij $X' := \phi(X)$ en zij Y' de afsluiting van X' in $C_{\mathrm{b}}(X)$. Dan is Y' een volledige metrische ruimte en (Y', ϕ) is een completering van X.

Bewijs De afsluiting Y' van X' is per definitie gesloten in $C_{\mathrm{b}}(X)$. De ruimte X' is een dichte deelruimte van Y', want i.h.a. is een deelverzameling van een topologische ruimte een dichte deelruimte van zijn afsluiting (ga na). Omdat $C_{\mathrm{b}}(X)$ een volledige metrische ruimte is (zie Gevolg S6.36(b)) en Y' een gesloten deelruimte van $C_{\mathrm{b}}(X)$, is Y' een volledige metrische ruimte (zie Proposition 6.41). Gebruik nu Lemma S6.42 en Definitie S6.38. ∎

$\star$ **Opmerking S6.44** Een andere manier om de existentie van een completering van een metrische ruimte (X, ρ) te bewijzen gaat als volgt. Zij Cauchy(X) de collectie van alle Cauchy-rijen in X. Noem twee Cauchy-rijen (x_n) en (y_n) *equivalent* (notatie $(x_n) \sim (y_n)$) als $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$. Je kunt nagaan dat dit een equivalentierelatie op de verzameling Cauchy(X) definieert. Zij $\widetilde{X}$ de collectie van equivalentieklassen in Cauchy(X). Definieer $f\colon X \to \widetilde{X}$ door voor $f(x)$ de equivalentieklasse van Cauchy-rijen te nemen die de Cauchy-rij $x, x, x, \ldots$ bevat. Definieer een metriek $\widetilde{\rho}$ op $\widetilde{X}$ als volgt. Laat $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{X}$ en neem een Cauchy-rij (x_n) in de equivalentieklasse $\widetilde{x}$ en een Cauchy-rij (y_n) in de equivalentieklasse $\widetilde{y}$. Definieer $\widetilde{\rho}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) := \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$. Deze definitie is onafhankelijk van de keuze van (x_n) en (y_n) en het maakt inderdaad $\widetilde{X}$ tot een metrische ruimte. Bovendien is $f\colon X \to \widetilde{X}$ een isometrie. Tenslotte kan aangetoond worden dat de metrische ruimte $(\widetilde{X}, \widetilde{\rho})$ volledig is.

$\star$ **Opmerking S6.45** Als V een genormeerde lineaire ruimte is en dus ook een metrische ruimte, en als (W', f) een completering van de metrische ruimte V is, dan kan W' op een unieke manier tot een genormeerde lineaire ruimte gemaakt worden zo dat de metriek op W' afkomstig is van de norm op W' en zo dat de isometrie $f\colon V \to W'$ een injectieve en norm behoudende lineaire afbeelding is. Als V bovendien een inproductruimte is dan kan de genormeerde lineaire ruimte W' op een unieke manier tot een inproductruimte worden gemaakt zo dat de norm op W' afkomstig is van het inproduct en zo dat de afbeelding $f\colon V \to W'$ het inproduct behoudt.

Dus iedere genormeerde lineaire ruimte kan op een essentieel unieke manier tot een Banach-ruimte worden gecompleteerd, en iedere inproductruimte kan op een essentieel unieke manier tot een Hilbert-ruimte worden gecompleteerd.

Re: 6.6. *Compactness*

Compactheid is een van de belangrijkste begrippen in de topologie. Aan de definitie zul je echter flink moeten wennen. Laat je motiveren door de fraaie stellingen die in verband met compacte ruimtes geformuleerd kunnen worden. We volgen het boek in deze paragraaf tot/met Definition 6.61. Een paar van de resultaten uit het boek verderop bewijzen we op een andere manier. We voegen tenslotte nog een belangrijke toepassing i.v.m. eindig-dimensionale genormeerde lineaire ruimtes toe.

Definitions 6.47, 6.48 Zij X een topologische ruimte en $E \subset X$. Een *open overdekking van E* is een collectie $\mathcal{U} := \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ van open deelverzamelingen van X zo dat $E \subset \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Als $B \subset A$ en de collectie $\mathcal{V} := \{U_\alpha \mid \alpha \in B\}$ nog steeds een open

overdekking van E is, dan noemen we $\mathcal{V}$ een *deeloverdekking van* $\mathcal{U}$. Als B bovendien eindig is, dus als $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset A$ en $\mathcal{V} = \{U_{\alpha_j}\}_{j=1,\ldots,n}$ en $E \subset \cup_{j=1}^n U_{\alpha_j}$, dan noemen we $\mathcal{V}$ een *eindige deeloverdekking van* $\mathcal{U}$.
We noemen E een *compacte deelverzameling van* X als iedere open overdekking van E een eindige deeloverdekking heeft.

We noemen een topologische ruimte X *compact* als X een compacte deelverzameling van zichzelf is. Dus een topologische ruimte X is compact desda er voor iedere collectie $\mathcal{U} := \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ van open deelverzamelingen van X met $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ er een eindige deelcollectie $\{U_{\alpha_j}\}_{j=1,\ldots,n}$ van $\mathcal{U}$ bestaat zo dat $X = \cup_{j=1}^n U_{\alpha_j}$.

Proposition 6.50 Zij X een topologische ruimte en $E \subset X$. Dan is E een compacte deelverzameling van X desda E een compacte topologische ruimte is in de relatieve topologie.

Bewijs Zij E een compacte deelverzameling van X. Zij $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een collectie van deelverzamelingen van E, open in de relatieve topologie, zo dat $E = \cup_{\alpha \in A} V_\alpha$. Dan is er voor iedere $\alpha \in A$ een open verzameling $U_\alpha \subset X$ zo dat $V_\alpha = E \cap U_\alpha$. Dus de collectie $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ is een open overdekking van E en heeft dus een eindige deeloverdekking $\{U_{\alpha_j}\}_{j=1,\ldots,n}$. Dan $\cup_{j=1}^n V_{\alpha_j} = \cup_{j=1}^n (E \cap U_{\alpha_j}) = E \cap (\cup_{j=1}^n U_{\alpha_j}) = E$. Dus E is een compacte ruimte in de relatieve topologie.

Zij omgekeerd E een compacte ruimte in de relatieve topologie. Zij $\mathcal{U} := \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een open overdekking van E. Laat $V_\alpha := U_\alpha \cap E$. Dan is V_α open in E in de relatieve topologie. Ook is $E = \cup_{\alpha \in A} V_\alpha$. Dus er is een eindige deelverzameling $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ van A zo dat $E = \cup_{j=1}^n V_{\alpha_j}$. Dan $E \subset \cup_{j=1}^n U_{\alpha_j}$, dus de open overdekking $\mathcal{U}$ van E heeft een eindige deeloverdekking. ∎

Dus het begrip compact is van een andere orde dan de begrippen open of gesloten. Een topologische ruimte E kunnen we bekijken als deelverzameling van allerlei topologische ruimtes X zo dat de relatieve topologie op E samenvalt met de oorspronkelijke topologie op E. Voor E als deelverzameling van X kunnen we dan verschillende topologische eigenschappen bekijken. Sommige eigenschappen zullen al of niet gelden, afhankelijk van de keuze van X, bijv. het open of gesloten zijn van E. Maar andere eigenschappen, zoals compactheid, zijn onafhankelijk van de keuze van X.

Merk op dat een eindige deelverzameling van een topologische ruimte zeker compact is.

Theorem 6.49 (*Stelling van Heine-Borel*)
Een gesloten begrensd interval in $\mathbf{R}$ is compact.

Echter, andersoortige intervallen zijn niet compact. Bijv. zij $E := [0, 1)$ en neem een open overdekking bestaande uit verzamelingen $U_n := (-1, 1 - 1/m)$ $(m = 2, 3, 4, \ldots)$. Dan is er geen eindige deeloverdekking bestaande uit verzamelingen $U_{m_1}, \ldots, U_{m_n}$ met $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$, want $1 - 1/m_n \notin \cup_{k=1}^n U_{m_k}$.

We geven nu, naast het bewijs uit het boek voor Theorem 6.49, nog een tweede bewijs, dat het voordeel heeft dat het zich laat generaliseren tot een bewijs van het d-dimensionale geval.

Tweede Bewijs van Theorem 6.49 Zij $[a,b]$ een gesloten begrensd interval (als $a=b$ dan gaat het bewijs door, maar de compactheid is dan al triviaal in te zien). Stel dat $[a,b]$ niet compact is. Dan is er een open overdekking $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ van $[a,b]$ zonder eindige deeloverdekking. Dus voor minstens één van beide deelintervallen $[a,(a+b)/2]$ en $[(a+b)/2,b]$ bezit $\mathcal{U}$ geen eindige deeloverdekking. Zo doorgaande komen we op een dalende rij gesloten begrensde intervallen $[a,b]=I_0\supset I_1\supset I_2\ldots$ met I_k van lengte $2^{-k}(b-a)$ en zo dat $\mathcal{U}$ voor I_k geen eindige deeloverdekking bezit. Dan is er vanwege Theorem 1.27 (Stelling van Cantor) een $c\in\cap_{k=1}^\infty I_k\subset[a,b]$. Dan is er een $\alpha\in A$ zo dat $c\in U_\alpha$, dus voor deze α is er een $\varepsilon>0$ zo dat $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)\subset U_\alpha$. Dus voor $2^{-k}(b-a)<\varepsilon$ zal $I_k\subset U_\alpha$, dus voor k voldoende groot wordt I_k al overdekt door één element van $\mathcal{U}$, een tegenspraak. ∎

Stelling S6.46 (Stelling van Heine-Borel voor het d-dimensionale geval)
De gesloten “kubus” $B_0:=\prod_{j=1}^d[a_j,b_j]$ in $\mathbf{R}^d$ is compact.

Bewijs Stel B is niet compact. Dan is er een open overdekking $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ van B zonder eindige deeloverdekking. Verdeel B in 2^d gelijkvormige gesloten deelkubussen op evidente manier. Dan zal $\mathcal{U}$ voor minstens een van deze deelkubussen geen eindige deeloverdekking hebben. Geheel analoog aan het bewijs hierboven voor $d=1$ vinden we een dalende rij $B_0\supset B_1\supset B_2\supset\ldots$ van gesloten kubussen waarbij B_k ribben heeft van lengte $2^{-k}(b_j-a_j)$ $(j=1,\ldots,d)$. Door toepassing van de stelling van Cantor op de dalende rij intervallen in elk van de coördinaten vinden we $\mathbf{c}\in\cap_{k=1}^\infty B_k\subset B_0$ en een $\alpha\in A$ zo dat $\mathbf{c}\in U_\alpha$, en we concluderen dat U_α B_k overdekt voor k voldoende groot. Dit is een tegenspraak. ∎

Proposition 6.51 In een compacte ruimte heeft elke dalende rij van niet-lege gesloten verzamelingen een niet-lege doorsnede.

Theorem 1.27 (de stelling van Cantor) is een speciaal geval van deze Propositie.

Lees nu achtereenvolgens Proposition 6.52, Corollary 6.53, Proposition 6.54 en Corollary 6.55 inclusief bewijzen. Voor het onthouden van de resultaten kun je de uitspraken beter hergroeperen en er ook nog Corollary 6.64 bij betrekken:

Proposition 6.54 In een Hausdorff-ruimte is iedere compacte deelverzameling gesloten.

Propositie S6.47 Zij X een compacte Hausdorff-ruimte en $E\subset X$. Dan is E compact desda E gesloten is.

Stelling S6.48 (Corollaries 6.55, 6.64)
Zij $E\subset\mathbf{R}^d$. Dan is E compact desda E gesloten en begrensd is.

Bewijs Als E gesloten en begrensd is in $\mathbf{R}^d$ dan is E een gesloten deelverzameling van een gesloten begrensde kubus in $\mathbf{R}^d$. Dus dan is E compact wegens Stelling S6.46 en Propositie S6.47.

Zij omgekeerd E compact. Dan is E gesloten wegens Proposition 6.54. Ook vormen de open kubussen $(-n,n)^d$ $(n\in\mathbf{N})$ een open overdekking van E, dus ze hebben een eindige deeloverdekking. Dus $E\subset(-n,n)^d$ voor zekere $n\in\mathbf{N}$, dus E is begrensd. ∎

Proposition 6.54 blijft niet zondermeer doorgaan voor een topologische ruimte die niet Hausdorff is. Omdat deze Propositie vaak wordt toegepast, is het het veiligst om in eerste instantie bij het werken met compactheid de extra restrictie te maken dat de te beschouwen topologische ruimtes Hausdorff zijn. Bij het werken met metrische ruimtes is dat zeker het geval. Als de omstandigheden je er toe dwingen om toch met niet-Hausdorff-ruimtes te werken, wees dan extra voorzichtig en kijk eventueel nog eens in de literatuur na wat blijft gelden over compactheid en wat niet.

Lees nu Theorem 6.56, Corollary 6.57 en Corollary 6.58 met bewijzen. We formuleren Theorem 6.56 en Corollary 6.58 als volgt:

Theorem 6.56 Laten X en Y topologische ruimtes zijn en zij $f\colon X \to Y$ continu. Dan geldt: Als $E \subset X$ compact is dan is $f(E)$ compact. M.a.w., een continue afbeelding beeldt compacte verzamelingen op compacte verzamelingen af.

Corollary 6.58 Laten X en Y topologische ruimtes zijn, Y bovendien Hausdorff. Als X compact is en $f\colon X \to Y$ continu en bijectief dan is f een homeomorfisme.

In Gevolg S3.4 hebben we al een speciaal geval van Theorem 6.56 gezien: $E = X := [a, b]$ en $Y := \mathbf{R}$. Dan zegt Gevolg S3.4 dat $f(E)$ een gesloten begrensd interval is, dus $f(E)$ is compact.

Het geval $Y := \mathbf{R}$ van Theorem 6.56 leidt tot een verregaande generalisatie van Theorem 3.14:

Corollary 6.57 Een continue reëelwaardige functie op een compacte ruimte neemt een maximumwaarde en een minimumwaarde aan. Anders gezegd:
Zij X compact en $f\colon X \to \mathbf{R}$ continu. Dan zijn er $x_1, x_2 \in X$ zo dat $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ voor alle $x \in X$.

De volgende resultaten betreffen compactheid in het kader van metrische ruimtes. Het eerste resultaat generaliseert Theorem 3.18, welke stelling zegt dat een continue functie op een gesloten begrensd interval uniform continu is. We kunnen het begrip uniforme continuïteit niet gemakkelijk definiëren voor functies op een algemene topologische ruimte, maar wel voor functies op een metrische ruimte, en zelfs voor afbeeldingen van een metrische ruimte naar een metrische ruimte:

Definition 6.25 Laten (X, ρ) en (Y, ρ') metrische ruimtes zijn. Zij $f\colon X \to Y$. We noemen de afbeelding f *uniform continu* als er bij elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x, y \in X$ geldt: als $\rho(x, y) < \delta$ dan $\rho'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Merk op dat $f\colon X \to Y$ continu is als f uniform continu is. In het bijzonder kunnen we in Definition 6.25 $Y := \mathbf{R}$ nemen. Dan verkrijgen we de definitie van een *uniform continue functie* $f\colon X \to \mathbf{R}$ op een metrische ruimte (X, ρ):
Bij elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x, y \in X$ geldt: als $\rho(x, y) < \delta$ dan $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Theorem 6.59 Laten (X, ρ) en (Y, ρ') metrische ruimtes zijn met X compact. Zij $f\colon X \to Y$ continu. Dan is f uniform continu.

Definition 6.60 Zij (X, ρ) een metrische ruimte en $E \subset X$. We noemen het getal $\operatorname{diam} E := \sup\{\rho(x, y) \mid x, y \in E\}$ (mogelijk gelijk aan ∞) de *diameter van* E. We noemen de deelverzameling E *begrensd* als $\operatorname{diam} E < \infty$.

Merk op: E is begrensd desda $E \subset B(a, r)$ voor zekere $a \in X$ en $r > 0$. Merk ook op dat diameter en begrensdheid geheel bepaald worden door E als metrische ruimte, en onafhankelijk zijn van de metrische ruimte X waarvan E een deelverzameling is.

Propositie S6.49 Zij (X, ρ) een metrische ruimte en $E \subset X$. Als E compact is dan is E gesloten en begrensd.

Bewijs We zagen al in Proposition 6.54 dat E gesloten is. Neem voor het bewijs van de begrensdheid een $a \in X$ en merk op dat de open ballen $B(a, n)$ $(n \in \mathbf{N})$ de gehele X en dus zeker E overdekken. Omdat E compact is, zullen reeds eindig veel van deze ballen E overdekken, dus $E \subset B(a, n)$ voor zekere $n \in \mathbf{N}$. Dus E is begrensd. ∎

Propositie S6.50 Een compacte metrische ruimte X is volledig.

Bewijs Zie in het boek de eerste alinea van het bewijs van Theorem 6.63 vanaf de derde regel. ∎

Zij nu X een volledige metrische ruimte en $E \subset X$. Aan welke eisen moet E voldoen opdat E compact is? Uit Propositie S6.49 weten we dat E zeker gesloten en begrensd moet zijn. Uit Proposition 6.41 weten we dat E dan ook volledig is, dus aan de noodzakelijke voorwaarde voor compactheid van Propositie S6.50 is dan ook voldaan. Toch zijn in het algemeen geslotenheid en begrensdheid geen voldoende voorwaarden voor compactheid (wel als $X = \mathbf{R}^d$, zie Stelling S6.48). Theorem 6.63 geeft aan dat geslotenheid en *totale begrensdheid* (zie Definition 6.61) noodzakelijke en voldoende voorwaarden zijn voor compactheid van een deelverzameling van een volledige metrische ruimte. We zullen Theorem 6.63 en Definition 6.61 hier niet verder behandelen.

We behandelen nu een generalisatie van de Stelling van Bolzano-Weierstrass (Theorem 2.17) in het kader van compacte ruimtes. Merk eerst op dat Theorem 2.17 kan worden herschreven als volgt:

Stelling S6.51 (Bolzano-Weierstrass herformuleerd)
Zij $X := [a, b]$ een gesloten begrensd interval. Dan heeft elke rij in X een deelrij die convergeert naar een limiet in X.

Definition 6.66 Zij X een topologische ruimte. We zeggen dat X de *Bolzano-Weierstrass eigenschap heeft* of dat X *rij-compact* is als iedere rij in X een deelrij heeft die convergeert naar een limiet in X.

Theorem 6.67 Zij X een metrische ruimte. Dan zijn equivalent:
(a) X is compact.
(b) X heeft de Bolzano-Weierstrass eigenschap.

De implicatie (a)$\Rightarrow$(b) is een generalisatie van Stelling S6.51. Lees het bewijs hiervan in het boek (tweede alinea van het bewijs van Theorem 6.67). Het bewijs van de implicatie (b)$\Rightarrow$(a) gebruikt totale begrensdheid. Je mag dat bewijs overslaan.

Als belangrijke toepassing van de eigenschappen van compactheid bewijzen we tot slot van deze paragraaf de volgende stelling:

Stelling S6.52 Zij $\|\,.\,\|$ een norm op $\mathbf{R}^d$ en zij $|\,.\,|$ de standaardnorm op $\mathbf{R}^d$. Dan zijn de twee normen equivalent, d.w.z., er bestaan $C_1, C_2 > 0$ zo dat

$$C_1\,|\mathbf{x}| \le \|\mathbf{x}\| \le C_2\,|\mathbf{x}| \quad \text{voor alle } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d. \tag{S6.12}$$

Dus iedere norm op $\mathbf{R}^d$ leidt tot de standaardtopologie op $\mathbf{R}^d$.

Bewijs Zij $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ de standaardbasis voor $\mathbf{R}^d$. Schrijf ρ voor de standaardmetriek op $\mathbf{R}^d$ en ρ' voor de metriek op $\mathbf{R}^d$ geleverd door de norm $\|\,.\,\|$. Als $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_d\mathbf{e}_d \in \mathbf{R}^d$ dan

$$\|\mathbf{x}\| \le |x_1|\,\|\mathbf{e}_1\| + \cdots + |x_d|\,\|\mathbf{e}_d\| \le \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}\,\sqrt{\|\mathbf{e}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{e}_d\|^2}$$

gezien de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz. Dit levert $\|\mathbf{x}\| \le C_2\,|\mathbf{x}|$, de tweede ongelijkheid in (S6.12). Dus

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \le C_2\,|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{voor alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^d,$$

waarmee de identieke afbeelding $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ continu is van $(\mathbf{R}^d, \rho)$ naar $(\mathbf{R}^d, \rho')$. Zij $S^{d-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d \mid |\mathbf{x}| = 1\}$ (de eenheidssfeer in $\mathbf{R}^d$ t.o.v. de standaardnorm). Dan is S^{d-1} gesloten en begrensd in $(\mathbf{R}^d, \rho)$, dus compact. Dus wegens Theorem 6.56 is S^{d-1} compact in $(\mathbf{R}^d, \rho')$ en wegens Proposition 6.54 is S^{d-1} gesloten in $(\mathbf{R}^d, \rho')$. Omdat $\mathbf{0} \notin S^{d-1}$ en het complement van S^{d-1} open is in $(\mathbf{R}^d, \rho')$, is er een $r > 0$ zo dat $\mathbf{x} \notin S^{d-1}$ als $\|\mathbf{x}\| < r$. Dus $\|\mathbf{x}\| \ge r$ als $\mathbf{x} \in S^{d-1}$. Zij nu $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d \backslash \{\mathbf{0}\}$. Dan

$$\|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}|\,\|\,|\mathbf{x}|^{-1}\,\mathbf{x}\,\| \ge r\,|\mathbf{x}|.$$

Dit levert de eerste ongelijkheid in (S6.12). We concluderen tenslotte uit (S6.12) dat de metrieken ρ en ρ' topologisch equivalent zijn. ∎

Op een oneindig-dimensionale lineaire ruimte V is het over het algemeen niet waar dat twee normen op V aanleiding geven tot topologisch equivalente metrieken. Hiermee samenhangend vermelden we het feit dat de eenheidssfeer in een oneindig-dimensionale lineaire ruimte niet compact is.

Re: 6.7. *Connectedness*

Het begrip samenhangendheid is aanschouwelijker dan het begrip compactheid, en de definitie zul je misschien ook iets minder vreemd vinden, ook al zou je er zelf niet zo gauw opgekomen zijn. We volgen de paragraaf in het boek tot/met Definition 6.82.

Definition 6.74, Proposition 6.75 Zij X een topologische ruimte. X heet *samenhangend* als:

(a) X is niet te schrijven als de disjuncte vereniging van twee niet-lege open deelverzamelingen.

Hiermee equivalente karakteriseringen zijn:

(b) X is niet te schrijven als de disjuncte vereniging van twee niet-lege gesloten deelverzamelingen.

(c) De enige tegelijk open en gesloten deelverzamelingen van X zijn $\emptyset$ en X.

We noemen een deelverzameling A van X *samenhangend* als A in de relatieve topologie samenhangend is. Gecombineerd met (a) betekent dit dat A een samenhangende deelverzameling is van de topologische ruimte X desda geldt:
als U, V open zijn in X en $A \subset U \cup V$ en $A \cap U \cap V = \emptyset$, dan $A \subset U$ of $A \subset V$.

Samenhangendheid is dus, net als compactheid, een intrinsieke eigenschap van een topologische ruimte A, die niet afhangt van de topologische ruimte X waarvan X deelverzameling is.

Merk op dat de uit één punt bestaande deelverzamelingen $\{x\}$ van een topologische ruimte X zeker samenhangend zijn.

Theorem 6.76 Zij $A \subset \mathbf{R}$. Dan is A samenhangend desda A een interval is.

Theorem 6.77 Laten X en Y topologische ruimtes zijn en zij $f\colon X \to Y$ continu. Dan geldt: Als $E \subset X$ samenhangend is dan is $f(E)$ samenhangend. M.a.w., een continue afbeelding beeldt samenhangende verzamelingen op samenhangende verzamelingen af.

In Gevolg S3.3 hebben we al een speciaal geval van Theorem 6.56 gezien: $E = X$ is een interval en $Y := \mathbf{R}$. Dan zegt Gevolg S3.3 dat $f(E)$ een interval is, dus $f(E)$ is samenhangend.

Merk ook op dat samenhangendheid zich net zo gedraagt onder continue afbeeldingen als compactheid (cf. Theorem 6.56).

Combinatie van Theorem 6.77 (met $Y := \mathbf{R}$) en Theorem 6.76 levert een generalisatie van de tussenwaardestelling Theorem 3.15:

Gevolg S6.53 Zij X een samenhangende topologische ruimte en $f\colon X \to \mathbf{R}$ continu. Dan is $f(X)$ een interval. Ook geldt dan: Als $a, b \in X$ dan wordt iedere tussen $f(a)$ en $f(b)$ gelegen reële waarde op X aangenomen.

We komen nu tot het belangrijke begrip samenhangscomponent. Ter voorbereiding nog twee proposities.

Proposition 6.78 Zij X een topologische ruimte en zij $c \in X$. Een vereniging van samenhangende deelverzamelingen van X die c bevatten is weer samenhangend.

Proposition 6.79 Zij X een topologische ruimte en zij $E \subset X$ samenhangend. Dan is de afsluiting $\overline{E}$ samenhangend.

Definition 6.80 en Proposition 6.81
Zij X een topologische ruimte. Zij $x \in X$. De *samenhangscomponent* C_x van x is de vereniging van alle samenhangende deelverzamelingen van X die x bevatten. (Dus zeker $x \in C_x$, want $\{x\}$ is samenhangend.) Er geldt:

(a) Elke samenhangscomponent in X is een gesloten en samenhangende deelverzameling van X.

(b) Als $x, y \in X$ dan òf $C_x = C_y$ òf $C_x \cap C_y = \emptyset$.

Noem een samenhangende deelverzameling E van X een *maximale samenhangende deelverzameling* als voor iedere samenhangende $F \subset X$ met $F \supset E$ geldt dat $F = E$. We kunnen (a) en (b) dus als volgt herformuleren:

De samenhangscomponenten C_x zijn precies de maximale samenhangende deelverzamelingen van X, en deze zijn gesloten. De topologische ruimte X is de disjuncte vereniging van zijn maximale samenhangende deelverzamelingen.

Samenhangscomponenten kunnen op nog een andere wijze worden gekarakteriseerd. Definieer een relatie $\sim$ op X door: $x \sim y$ desda er een samenhangende deelverzameling E van X bestaat met $x, y \in E$. Dan is $\sim$ een equivalentierelatie op X en de equivalentieklassen zijn juist de samenhangscomponenten.

Proposition 6.81 garandeert niet dat de samenhangscomponenten open zijn. Onder de volgende omstandigheden is dat wel waar:

$\star$ **Definitie S6.54** Een topologische ruimte X heeft de *samenhangende omgevings-eigenschap* als iedere $x \in X$ een samenhangende omgeving heeft.

Vergelijk dit met de definitie van *lokaal samenhangende* topologische ruimte in Browder, Exercise 21. Lokale samenhang impliceert de samenhangende omgevings-eigenschap, maar niet omgekeerd.

$\star$ **Propositie S6.55** Een topologische ruimte X heeft de samenhangende omgevings-eigenschap desda elke samenhangscomponent in X open is.

Bewijs Stel eerst dat X de samenhangende omgevings-eigenschap heeft. Zij E een samenhangscomponent in X. Zij $x \in E$ en zij U een samenhangende omgeving van x. Dan $x \in U \subset E$, dus x is inwendig punt van E. Dus E is open.

Stel nu dat elke samenhangscomponent in X open is. Zij $x \in X$. Dan is C_x een samenhangende omgeving van x. ∎

$\star$ **Voorbeeld S6.56** Zij X een metrische ruimte met de eigenschap dat elke open bal $B(a, r)$ samenhangend is. Dan heeft elke open deelverzameling E van X de samenhangende omgevings-eigenschap. Immers, zij $a \in E$. Omdat E open is in X, is er een $r > 0$ zo dat $B(a, r) \subset E$. Dan is $B(a, r)$ een open samenhangende omgeving van a in E.

Neem in het bijzonder $X := \mathbf{R}$. Dan is elke open bal, d.w.z. elk open interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ samenhangend. Dus elke open deelverzameling E van $\mathbf{R}$ heeft de samenhangende omgevings-eigenschap, dus is een disjuncte vereniging van samenhangscomponenten die open en gesloten zijn in E. Omdat E open is in $\mathbf{R}$, zullen deze samenhangscomponenten ook open zijn in $\mathbf{R}$ en tevens samenhangend, dus niet-lege open intervallen. Dit leidt tot:

Stelling S6.57 Elke open verzameling E in $\mathbf{R}$ is op een unieke manier de disjuncte vereniging van hoogstens aftelbaar veel niet-lege open intervallen. Deze open intervallen zijn de samenhangscomponenten van E.

$\star$ **Bewijs** We lieten al zien dat E disjuncte vereniging van niet-lege open intervallen is. Omgekeerd, als E een disjuncte vereniging is van niet-lege open intervallen dan is elk interval in die vereniging een samenhangscomponent van E (ga na), dus zo'n disjuncte vereniging gaat op een unieke manier. Tenslotte bevat elk open interval in de disjuncte vereniging een element van $\mathbf{Q}$, dus er kunnen hoogstens aftelbaar veel intervallen in de vereniging zijn. ∎

$\star$ **Voorbeeld S6.58** In een genormeerde lineaire ruimte zijn de open ballen samenhangend, dus hebben de open verzamelingen de samenhangende omgevings-eigenschap. Immers, zij V een genormeerde lineaire ruimte, $a \in V$ en $r > 0$. Zij $x \in B(a, r)$. Dan geldt:
de afbeelding $t \mapsto ta + (1-t)x \colon [0, 1] \to V$ is continu (ga na),
het beeld $[a, x] := \{ta + (1-t)x \mid 0 \le t \le 1\}$ is bevat in $B(a, r)$ (ga na),
$[a, x]$ is samenhangend als beeld van een samenhangende verzameling onder een continue afbeelding.
Omdat $B(a, r) = \cup_{x \in B(a,r)} [a, x]$, is $B(a, r)$ samenhangend (zie Proposition 6.78).

In het bijzonder is dus iedere open verzameling E in $\mathbf{R}^d$ een disjuncte vereniging van hoogstens aftelbaar veel open samenhangende verzamelingen, welke de samenhangscomponenten van E zijn.

Definition 6.82 Een topologische ruimte X heet *totaal onsamenhangend* als de uit één punt bestaande verzamelingen de enige samenhangende deelverzamelingen van X zijn.

Voorbeelden zijn X met de discrete topologie, en $\mathbf{Q}$.

Opgaven bij Chapter 6, deel 2

Opg. S6.27 Laten X en Y metrische ruimtes zijn. Bekijk de afbeelding $\pi_1 \colon (x, y) \mapsto x \colon X \times Y \to X$. Bewijs of weerleg door een tegenvoorbeeld de volgende bewering:

Als E gesloten is in $X \times Y$ dan is $\pi_1(E)$ gesloten in X.

Opg. S6.28 (a) Zij I een interval en $f \colon I \to \mathbf{R}$ continu. Zij $E := \{(x, f(x) \mid x \in I\}$. Bewijs dat E een gesloten verzameling is in $I \times \mathbf{R}$.

(b) Zij X een metrische ruimte en $f \colon X \to \mathbf{R}$ continu. Zij $E := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$. Bewijs dat E een gesloten verzameling is in $X \times \mathbf{R}$.

Opg. S6.29 We noemen een rij $\big((x_n, y_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbf{R}^2$ begrensd als er een $M > 0$ bestaat zodanig dat voor elke n: $x_n^2 + y_n^2 \le M$. Bewijs dat elke begrensde rij in $\mathbf{R}^2$ een convergente deelrij heeft.

Opg. S6.30 Laat $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ een deelverzameling zijn van de metrische ruimte (X, ρ). Zij $x \in X$. Bewijs dat $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ desda voor elke $\delta > 0$ de verzameling $\{n \in \mathbf{N}\colon 0 < \rho(x_n, x) < \delta\}$ oneindig is.

Opg. S6.31 Bepaal de afsluiting van de verzameling $\{(x, \sin x^{-1}) \mid x > 0\}$ in $\mathbf{R}^2$.

Opg. S6.32 Onderzoek de continuïteit van de afbeelding die $f \in C([0,1])$ stuurt naar $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Opg. S6.33 Laat zien dat door de formule $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ een inproduct op $C([0,1])$ wordt gedefinieerd, maar dat $C([0,1])$ met de bijbehorende norm niet volledig is.

Opg. S6.34 Zij X een metrische ruimte en $Y \subset X$ zo dat Y met de geïnduceerde metriek volledig is. Bewijs dat Y gesloten is in X.

Opg. S6.35 Exercise 3.17 in Browder.

Opg. S6.36 Onderzoek puntsgewijse en uniforme convergentie van de volgende rijen van functies op het aangegeven domein, voor $n \to \infty$. (Motiveer!)

(a) $f_n(x) = x^n$ op $[0, 1)$.

(b) $f_n(x) = x^n$ op $[0, 1/2]$.

(c) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ op $(0, 1]$.

Opg. S6.37 Zij X een verzameling, met daarop twee rijen (f_n) en (g_n) van functies die uniform convergeren naar de functies f resp. g op X. Bewijs dat

(a) $f_n + g_n$ uniform convergeert naar $f + g$,

(b) niet per se hoeft te gelden dat $f_n g_n$ uniform convergeert naar fg,

(c) maar dat $f_n g_n$ wel uniform convergeert naar fg als $f_n, g_n \in \mathcal{B}(X)$.

Opg. S6.38 Zij X een metrische ruimte, $a \in X$, en (x_n) en (y_n) twee rijen in X die convergeren naar a. Bewijs dat de rij $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots$ ook convergeert naar a.

Opg. S6.39

(a) Laten $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy-rijen zijn in de metrische ruimte (X, ρ). Bewijs dat $(\rho(x_n, y_n))_{n=1}^{\infty}$ een Cauchy-rij is in $\mathbf{R}$ (die dus convergeert).

(b) Definieer de afbeelding d werkend op twee Cauchy-rijen in X als $d\big((x_n), (y_n)\big) := \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$. Onderzoek welke eigenschappen van een metriek d heeft.

Opg. S6.40 Zij (X, ρ) een metrische ruimte, zij $A \subset X$ en zij $f\colon A \to \mathbf{R}$ uniform continu.

(a) Zij (x_n) een rij in A zo dat $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ bestaat in X. Bewijs dat de rij $(f(x_n))$ convergeert in $\mathbf{R}$.

Hint Bewijs dat de rij $(f(x_n))$ een Cauchy-rij is.

(b) Gegevens als in (a). Zij (y_n) een andere rij in A die ook naar x convergeert. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

(c) Zij $x \in \overline{A}$. Definieer:

$$F(x) := \lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad \text{als } (x_n) \text{ een rij in } A \text{ is met } \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

(Volgens Proposition 6.37 bestaat er een rij (x_n) in A die convergeert naar x en volgens (b) is de definitie van $F(x)$ onafhankelijk van de keuze van de rij (x_n).) Bewijs dat de zo gedefinieerde functie $F\colon \overline{A} \to \mathbf{R}$ een uitbreiding is van f, d.w.z., dat $F(x) = f(x)$ als $x \in A$.

(d) Er kan nu bewezen worden dat $f\colon \overline{A} \to \mathbf{R}$ uniform continu is. Als je dit in deze algemeenheid te moeilijk vindt om te bewijzen, probeer het dan voor het speciale geval dat $X := \mathbf{R}$, $A := (0, 1]$.

(e) Definieer een lineaire afbeelding Φ van $C([0,1])$ naar $C_b((0,1])$ door $\Phi(F)$ te definiëren als de beperking van een functie $F \in C([0,1])$ tot $(0,1]$. Bewijs dat Φ injectief maar niet surjectief is. Beschrijf de beeldruimte van Φ.

Opg. S6.41 Geef een voorbeeld van twee homeomorfe metrische ruimtes X en Y zo dat X volledig is en Y niet volledig. Concludeer hieruit dat volledigheid geen topologisch begrip is.

Opg. S6.42 Laat X een topologische Hausdorff-ruimte zijn met compacte deelverzamelingen F_α ($\alpha \in \mathcal{A}$). Bewijs dat $\cap_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha$ compact is, evenals een eindige vereniging van F_α's.

Opg. S6.43 Zij (X, ρ) een metrische ruimte, en $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij van *uniform continue* functies op X die uniform convergeert naar de functie f op X. Laat zien dat f weer *uniform continu* is.

Opg. S6.44 Zij X een verzameling en $\mathcal{B}(X)$ de genormeerde ruimte van begrensde functies op X met de sup-norm $\|\,.\,\|_{\mathrm{b}}$ Bewijs dat $\mathcal{B}(X)$ niet compact is.

Opg. S6.45 Zij X een metrische ruimte met de Bolzano-Weierstrass eigenschap. Bewijs, door alleen van deze eigenschap gebruik te maken en niet van de hiermee equivalente eigenschap van compactheid, het volgende:

Als $f\colon X \to \mathbf{R}$ continu is dan neemt f een maximum en minimum aan op X.

Opg. S6.46 Bewijs: als X en Y metrische ruimtes zijn met de Bolzano-Weierstrass eigenschap dan heeft ook $X \times Y$ de Bolzano-Weierstrass eigenschap.

Opg. S6.47 Bewijs dat, als E compact is in de metrische ruimte (X, ρ), je $x, y \in E$ kunt vinden waarvoor $\operatorname{diam} E = \rho(x, y)$.

Opg. S6.48 Laten X en Y compacte metrische ruimtes zijn. Bewijs dat de metrische ruimte $X \times Y$ compact is.

Hint Gebruik o.a. Theorem 6.67 in beide richtingen.

Opg. S6.49 Laten V en W genormeerde lineaire ruimtes zijn. Zij $f\colon V \to W$ lineair. Bewijs de equivalentie van de volgende twee uitspraken:

(a) f is continu.

(b) Er bestaat een $C \geq 0$ zo dat $\|f(v)\| \leq C\|v\|$ vor alle $v \in V$.

Opg. S6.50 Zij W een genormeerde lineaire ruimte. Bewijs het volgende:

(a) Als $f\colon \mathbf{R}^n \to W$ lineair is, dan is f continu.

(b) Als V een eindig-dimensionale genormeerde lineaire ruimte is en $f\colon V \to W$ lineair, dan is f continu.

Opg. S6.51 Zij (X, ρ) een metrische ruimte en $f\colon X \to X$ continu. Bewijs dat de grafiek van f, $\{(x, f(x)) \in X \times X \mid x \in X\}$, samenhangend is desda X samenhangend is.

Opg. S6.52 Laat $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ een familie samenhangende deelverzamelingen van de topologische ruimte X zijn, en veronderstel dat voor een zekere $\beta \in \mathcal{A}$ geldt dat $X_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$ voor elke $\alpha \in \mathcal{A}$. Bewijs dat $\cup_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$ samenhangend is. (Dit is een verscherping van Proposition 6.78.)

Opg. S6.53 Zij X een samenhangende topologische ruimte en veronderstel dat de afbeelding $f : X \to \mathbf{R}$ *locaal constant* is, d.w.z. voor elke $x \in X$ is er een omgeving U van x in X zodanig dat $y \in U \implies f(y) = f(x)$. Bewijs dat f constant is.

Opg. S6.54 Een metrische ruimte heeft de *dekpuntseigenschap* als voor iedere continue afbeelding $f : X \to X$ een $x \in X$ te vinden is waarvoor $f(x) = x$ (zo'n x heet wel een dekpunt van f).

(a) Bewijs dat iedere ruimte met de dekpuntseigenschap samenhangend is.

(b) Laat zien dat $[0, 1]$ de dekpuntseigenschap heeft.

Opg. S6.55 Exercise 20 in Browder.

Opg. S6.56 Exercise 23 in Browder.

Opg. S6.57 (Exercise 24 in Browder)
Zij $X := \mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{Q}^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \text{ of } y \text{ is irrationaal}\}$. Bewijs dat X samenhangend is.

Opg. S6.58 Zij $X := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \text{òf } x \text{ òf } y \text{ is irrationaal}\}$. Bewijs dat X totaal onsamenhangend is.

Opg. S6.59 Bewijs dat een topologische ruimte X samenhangend is desda X en $\emptyset$ de enige deelverzamelingen van X zijn met lege rand.

Opg. S6.60 Zij X een compacte metrische ruimte. Bewijs dat X een aftelbare dichte deelverzameling heeft.
Hint Overdek X voor elke $n \in \mathbf{N}$ met eindig veel open ballen van straal $1/n$. Bewijs dat de (aftelbare) verzameling van alle middelpunten van deze ballen dicht ligt in X.