Elementaire speciale functies

1. Differentieerbaarheid (zie syll. Calculus Ia, §II.1.1 of Browder, Ch. 4).
Zij I een interval, a een inwendig punt van I en $f\colon I \to \mathbb{R}$ een functie op I. Dan heet f *differentieerbaar* in a met *afgeleide* $f'(a)$ als onderstaande limiet bestaat:

$$f'(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,.$$

We brengen een paar resultaten in herinnering die al behandeld zijn in syll. Calculus Ia.

2. Propositie (syll. Calculus Ia, §II.1.2 of Browder, §4.3)
Als f differentieerbaar is in a dan is f continu in a.

3. Stelling (*Middelwaardestelling*) (zie syll. Calculus Ia, §II.3.1, II.3.2 of Browder, Theorem 4.22) Laat $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu zo dat f differentieerbaar is op (a,b). Dan is er een $\xi \in (a,b)$ zo dat $f(b)-f(a) = (b-a)\,f'(\xi)$.

4. Gevolg (zie syll. Calculus Ia, §II.3.1 of Browder, Corollary 4.23)
Laat $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu zo dat f differentieerbaar is op (a,b) en $f'(x) = 0$ voor alle $x \in (a,b)$. Dan is f constant op $[a,b]$.

Stelling 3 volgt vrij snel uit de stelling dat een continue functie op een gesloten begrensd interval een absoluut maximum en een absoluut minimum aanneemt (zie Browder, Theorem 3.14).

5. Machtreeksen
Zij $(a_n)_{n=0}^\infty$ een rij in $\mathbb{R}$ zo dat $R := 1/\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} > 0$. (Als de $\limsup$ gelijk aan 0 is, dan nemen we $R := \infty$.) Dan is R de convergentiestraal van onderstaande reeks:

$$f(x) := \sum_{k=0}^\infty a_k x^k \qquad (|x| < R). \tag{1}$$

De reeks convergeert dus absoluut voor $|x| < R$ en de functie $x \mapsto f(x)$ is dus goed gedefinieerd voor $|x| < R$.

We proberen nu de afgeleide van f uit te rekenen. Daartoe moeten we de reeks aan de rechterkant van (1) naar x differentiëren. Als probeersel doen we dit termsgewijs (we verwisselen dus oneindige sommatie en differentiatie; dit is niet zondermeer gerechtvaardigd). De termsgewijze differentiatie van de machtreeks in (1) levert een nieuwe machtreeks

$$g(x) := \sum_{k=1}^\infty k\,a_k\,x^{k-1} = \sum_{l=0}^\infty (l+1)\,a_{l+1}\,x^l. \tag{2}$$

Omdat

$$\limsup_{n\to\infty} |(n+1)\,a_{n+1}|^{1/n} = \left(\lim_{n\to\infty} (n+1)^{1/n}\right)\left(\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}|^{1/n}\right) = 1\cdot R^{-1} = R^{-1},$$

zien we dat de nieuwe machtreeks dezelfde convergentiestraal heeft als de oude machtreeks. Dus de functie $x \mapsto g(x)$ in (2) is goed gedefinieerd voor $|x| < R$. Er kan bewezen worden (zie Browder, Theorem 4.36) dat $g'(x) = f(x)$ als $|x| < R$. Dus f is differentieerbaar en in het bijzonder continu als $|x| < R$. Nu kunnen we de termsgewijze differentiatie herhalen voor de machtreeks in (2), en dit willekeurig vaak. Zo zien we in dat de functie f willekeurig vaak differentieerbaar is op $(-R, R)$ en dat alle afgeleiden $f^{(j)}$ dus ook continu zijn. Hiermee is f een zogenaamde C^∞-*functie* op $(-R, R)$. Samenvattend:

6. Stelling Laat de functie f op een interval $(-R, R)$ gedefinieerd zijn door een machtreeks (1) met convergentiestraal R. Dan is f willekeurig vaak differentieerbaar op $(-R, R)$ en f en al zijn afgeleiden $f^{(j)}$ ($j \in \mathbb{N}$) zijn continu op $(-R, R)$ (m.a.w., f is C^∞ op $(-R, R)$). Verder is voor elke $j \in \mathbb{N}$ de afgeleide $f^{(j)}$ gegeven door de machtreeks

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} k(k-1)\dots(k-j+1)\, a_k\, x^{k-j} = \sum_{l=0}^{\infty} (l+j)(l+j-1)\dots(l+1)\, a_{l+j}\, x^l \quad (3)$$

met convergentiestraal R.

7. Verband met Taylor-benaderingen
Laat f weer gegeven door de machtreeks (1) met convergentiestraal R. Dan volgt uit (3) dat

$$f^{(j)}(0) = j!\, a_j. \quad (4)$$

Dus de n-de orde Taylor-benadering f_n van f om 0 (zie syll. Calculus Ia, §II.4.1) wordt gegeven door

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k, \quad (5)$$

dus juist het beginstuk tot/met de n-de graads term van de machtreeks van f. In syll. Calculus Ia, §II.5.1 werd opgemerkt dat we (algemeen bij een Taylor-benadering) $f - f_n$ kunnen afschatten door $f(x) - f_n(x) = O(x^{n+1})$, $x \to 0$, d.w.z. dat er een $C > 0$ en $\rho > 0$ zijn zo dat $|f(x) - f_n(x)| \le C\, |x|^{n+1}$ als $0 < |x| < \rho$. In ons geval van een machtreeks kunnen we dit ook inzien door $f(x) - f_n(x)$ als de restsom van de machtreeks (1) schrijven:

$$f(x) - f_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\, x^k = x^{n+1} \sum_{l=0}^{\infty} a_{n+1+l}\, x^l = x^{n+1}\, h_n(x) \qquad (|x| < R),$$

waarbij de machtreeks $h_n(x) := \sum_{l=0}^{\infty} a_{n+1+l}\, x^l$ weer convergentiestraal R heeft, dus continu is op $(-R, R)$ dus begrensd is op elk interval $[-\rho, \rho]$ met $0 < \rho < R$ (zie Browder, §3.14). Hieruit volgt dat er voor elke ρ met $0 < \rho < R$ een $C > 0$ is zo dat $|f(x) - f_n(x)| \le C\, |x|^{n+1}$ als $|x| < \rho$.

8. De exponentiële reeks
We definiëren de *exponentiële reeks* door

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R}). \quad (6)$$

Omdat voor $a_n := 1/n!$ geldt dat $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}|/|a_n| = 0$, heeft de machtreeks in (6) convergentiestraal ∞. Met behulp van Stelling 6 zien we dat de functie exp een C^∞-functie is en dat zijn afgeleide $\exp'$ door dezelfde machtreeks in (6) gegeven wordt, dus

$$\exp'(x) = \exp(x), \quad \text{dus} \quad \exp^{(j)}(x) = \exp(x) \text{ voor alle } j \in \mathbb{N} \tag{7}$$

Er volgt uit (7) dat de afgeleide naar x van $\exp(x)\exp(-x)$ gelijk aan 0 is. Dus wegens Gevolg 4 is $\exp(x)\exp(-x)$ constant, dus identiek gelijk aan zijn waarde 1 voor $x = 0$, dus:

$$\exp(0) = 1, \qquad \exp(x)\exp(-x) = 1, \qquad (\exp(x))^{-1} = \exp(-x). \tag{8}$$

Uit (6) zien we dat $\exp(x) > 0$ als $x \ge 0$. Combinatie met (8) geeft dan dat $\exp(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

9. Functionaalvergelijking voor exp

We willen nu een formule afleiden voor $\exp(x+y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Merk op dat er uit (6) en de binomiaalformule volgt dat

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, x^k\, y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\, \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$= \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\, \frac{y^l}{l!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{l!}\right) = \exp(x)\,\exp(y).$$

Dus

$$\exp(x+y) = \exp(x)\,\exp(y) \tag{9}$$

Bovengenoemde afleiding is niet rigoureus en kan daarom niet als bewijs gelden voor (9). In het bijzonder zouden we preciezer moeten zeggen wat we met de dubbelsom $\sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{x^l}{l!}$ bedoelen en zouden we de overgang van deze dubbelsom naar het product van twee enkelsommen moeten motiveren. Een rigoureus bewijs van (9) kan verkregen worden met behulp van Definition 2.59 en Theorem 2.60 in Browder.

Een tweede bewijs van (9) gaat als volgt. Neem y vast en schrijf $f(x) := \exp(x+y)$, $g(x) := \exp(x)\,\exp(y)$. Dan:

$$f'(x) = f(x), \quad f(0) = y; \qquad g'(x) = g(x), \quad g(0) = y. \tag{10}$$

Dus f en g zijn oplossingen van dezelfde differentiaalvergelijking van orde 1 met dezelfde beginwaarde bij $x = 0$. Uit de uniciteitsstelling voor oplossingen van zulke differentiaalvergelijkingen (zie syll. Calculus Ib, §VI.1.1) volgt dan dat $f(x) = g(x)$ (om te beginnen in een voldoende kleine omgeving van 0, maar dit kan worden voortgezet tot alle $x \in \mathbb{R}$).

Een elementair bewijs uitgaande van (10) is als volgt. Merk op dat

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x)^2} = 0$$

(we gebruikten dat $g(x) \neq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$) en dat $f(0)/g(0) = 1$. Dus wegens Gevolg 4 is $f(x)/g(x) = 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

10. We zagen in §8 dat $\exp(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. In combinatie met (7) levert dit dat $\exp'(x) > 0$ ($x \in \mathbb{R}$), dus dat de functie exp strikt stijgend is op $\mathbb{R}$. Er volgt uit (6) dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $\exp(x) > x^n/n!$ als $x > 0$, dus

$$\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty \quad \text{en algemener} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

Dus $\exp(x)$ stijgt sneller dan elke positieve macht van x als $x \to \infty$.

Combinatie van de eerste limiet in (11) met (8) levert dat $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$. Samen met de continuïteit van exp levert dit met gebruik van Browder, Theorem 3.16 het volgende.

11. Stelling De strikt stijgende continue functie $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is een bijectieve afbeelding $\exp\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$. Schrijf $\log := \exp^{-1}$ voor de inverse afbeelding. Dan is de afbeelding $\log\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ bijectief en log is een strikt stijgende continue functie op $(0, \infty)$.

De formules (9) en (8) voor exp leiden nu tot formules voor log:

$$\begin{aligned} \log(xy) = \log(x) + \log(y) \quad (x, y > 0); \qquad & \log(1) = 0; \\ \log(x^{-1}) = -\log(x) \quad (x > 0); \qquad & \log(x) < x - 1 \quad (x > 1). \end{aligned} \tag{12}$$

Als we, als aanvulling op het vermelde in Stelling 11 ook gebruiken dat $\exp'(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, dan kunnen we concluderen dat log ook differentieerbaar is door gebruik te maken van Browder, Theorem 4.26:

12. Stelling Laten I en J open intervallen zijn en laat $f\colon I \to J$ bijectief en differentieerbaar op I zo dat $f'(x) > 0$ voor allle $x \in I$. Schrijf $g := f^{-1}$ voor de inverse afbeelding van f. Dan is $g\colon J \to I$ differentieerbaar op J en

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \qquad (y \in J). \tag{13}$$

Formule (13) volgt door $g(f(x)) = x$ naar x te differentiëren en de kettingregel toe te passen (zie syll. Calculus Ia, §II.2.1).

Wanneer we $f := \exp$, $g := \log$ substitueren in (13), vinden we dat

$$\log'(x) = \frac{1}{x}\,. \tag{14}$$

13. De machtreeks van $\log(1 + x)$

Uit (14) volgt dat $f(x) := \log(1 + x)$ als j-de afgeleide heeft: $f^{(j)}(x) = (-1)^{j-1} \frac{(j-1)!}{(1+x)^j}$, dus $\frac{f^{(j)}(0)}{j!} = \frac{(-1)^j}{j}$. Dus als $\log(1 + x)$ als machtreeks te schrijven is, dan moet dit de machtreeks

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k \tag{15}$$

zijn (dit volgt uit (4)). De machtreeks in (15) heeft convergentiestraal 1 (ga na), dus de functie g is goed gedefinieerd door (15) op $(-1,1)$. Uit Stelling 6 volgt dat g een C^∞-functie is op $(-1,1)$ en dat

$$g'(x) = \sum_{l=0}(-1)^l\, x^l = \frac{1}{1+x} = f'(x) \qquad (|x|<1).$$

Bovendien is $f(0) = 0 = g(0)$. Dan volgt uit Gevolg 4 dat $f(x) = g(x)$ voor alle $x \in (-1,1)$. We hebben dus bewezen dat

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k \qquad (|x|<1). \tag{16}$$

14. Een limietformule voor $\exp(x)$. We weten dat

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = \exp(1) \tag{17}$$

(zie Browder, Example 2.12 en Proposition 3.29 en syll. Abstracte Analyse). We bewijzen nu algemener:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n = \exp(x) \qquad (x\in\mathbb{R}). \tag{18}$$

Bewijs Het geval $x = 0$ is eveident. Laat nu $x > 0$. Dan geven we een bewijs analoog aan dat voor (17). Uit de binomiaalformule volgt dat

$$\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\tfrac{k-1}{n}\right) < \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} < \exp(x). \tag{19}$$

Hieruit zien we dat de rij $\left((1+\frac{x}{n})^n\right)_{n=1}^{\infty}$ stijgend en naar boven begrensd is, dus een limiet heeft en dat

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n \le \exp(x).$$

Ook zien we uit (19) dat voor elke vaste $m \ge 2$ geldt:

$$\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n \ge 1 + x + \sum_{k=2}^{m} \frac{x^k}{k!}\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\tfrac{k-1}{n}\right) \qquad (n \ge m).$$

Dus geldt voor elke m dat

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n \ge \sum_{k=0}^{m}\frac{x^k}{k!}\,.$$

De ongelijkheid blijft behouden als we in het rechter lid de limiet nemen voor $m \to \infty$, dus $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \ge \exp(x)$. We hadden al gezien dat $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le \exp(x)$, dus (18) geldt voor $x \ge 0$.

Om (18) voor $x < 0$ te bewijzen, vervangen we x door $-x$ en schrijven we voor $x > 0$ dat

$$(1-\tfrac{x}{n})^n = (1-\tfrac{x^2}{n^2})^n/(1+\tfrac{x}{n})^n \quad \text{en} \quad 1-\tfrac{x^2}{n} \le (1-\tfrac{x^2}{n^2})^n \le 1 \quad (n > x^2). \tag{20}$$

Hierbij gebruikten we dat $(1+t)^n \ge 1+nt$ als $t > -1$ (oefening in Browder, Lemma 2.5). Nu volgt uit (20) dat

$$\frac{1-\frac{x^2}{n}}{(1+\frac{x}{n})^n} \le (1-\tfrac{x}{n})^n \le \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n} \qquad (n > x^2,\ x > 0). \tag{21}$$

Het linker lid en het rechter lid van (21) convergeren naar $1/\exp(x)$ voor $n \to \infty$, dus met de knijpstelling convergeert ook $(1-\frac{x}{n})^n$ naar deze limiet als $n \to \infty$. ∎

15. $\exp(x)$ **als een macht van** e**.** We laten nu zien dat

$$\exp(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{Q}), \quad \text{d.w.z.} \quad \exp\big(\tfrac{p}{q}\big) = (e^p)^{\frac{1}{q}} \quad (p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}). \tag{22}$$

Bewijs Er volgt uit (9) en (8) dat $\exp(px) = (\exp(x))^p$ $(p \in \mathbb{Z})$, dus $\exp(x/q) = (\exp(x))^{1/q}$ $(q \in \mathbb{N})$, dus $\exp(p/q) = (\exp(1))^{p/q} = e^{p/q}$ $(p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N})$.

Formule (22) suggereert om e^x nu te definiëren als $\exp(x)$ voor willekeurige $x \in \mathbb{R}$ (niet noodzakelijk in $\mathbb{Q}$). Met deze definitie volgt uit de continuïteit en monotonie van de functie exp dat

$$e^x = \sup_{y\in\mathbb{Q};\ y<x} e^y. \tag{23}$$

16. Reële machten van willekeurig positief grondtal
Laat $a > 0$. Voor $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ hebben we

$$a^{\frac{p}{q}} = (\exp(\log a))^{\frac{p}{q}} = \exp\big(\tfrac{p}{q}\,\log a\big).$$

Dit suggereert voor $a > 0$ en $x \in \mathbb{R}$ de definitie

$$a^x := \exp(x \log a), \quad \text{dus} \quad a^x = \sup_{y<x;\ y\in\mathbb{Q}} a^y \quad \text{als } a > 1. \tag{24}$$

17. $\exp(z)$ **voor complexe** z**.** De theorie van machtreeksen

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k \tag{25}$$

gaat door als de coëfficiënten a_k en het argument z in $\mathbb{C}$ liggen. De convergentiestraal wordt ook dan gegeven door

$$R := 1/\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}, \tag{26}$$

en de machtreeks (25) convergeert dan absoluut voor $z \in \mathbb{C}$ met $|z| < R$, d.w.z.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k\, z^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\,|z|^k < \infty \qquad (|z| < R).$$

Absolute convergentie impliceert gewone convergentie van de reeks in (25) voor $|z| < R$, d.w.z. dat de reële reeksen

$$\mathrm{Re}\, f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}\,(a_k\, z^k) \quad \text{en} \quad \mathrm{Im}\, f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Im}\,(a_k\, z^k)$$

convergeren als $|z| < R$.

In het bijzonder convergeert de exponentiële reeks

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

voor alle $z \in \mathbb{C}$. We definiëren $e^z := \exp(z)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$.

18. De trigonometrische functies
We zullen nu de trigonometrische functies op een rigoureuze manier invoeren in termen van de functie

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\, z^n = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right). \tag{27}$$

We definiëren:

$$\cos z := \frac{1}{2}\,(e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \quad (z \in \mathbb{C}), \tag{28}$$

$$\sin z := \frac{1}{2i}\,(e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{29}$$

Merk op dat de machtreeksen in (28) en (29) convergentiestraal ∞ hebben. Dit volgt bijv. omdat de reeks in (27) absoluut convergeert voor alle z.

Er volgt onmiddellijk uit (27), (28) en (29) dat

$$e^{iz} = \cos z + i\,\sin z. \tag{30}$$

Wanneer we z reëel nemen in (28), (29) volgt er dat

$$\cos x = \mathrm{Re}\,(e^{ix}), \quad \sin x = \mathrm{Im}\,(e^{ix}) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{31}$$

Ook is het evident dat

$$\begin{aligned} &\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z \qquad (z \in \mathbb{C}),\\ &\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0. \end{aligned}$$

19. Opgave Bewijs, uitgaande van de definities (28), (29), en gebruik makend van de eerder bewezen formules voor de exponentiële functie, de volgende formules voor de cosinus- en sinus-functies:

$$\cos(z+w) = \cos z\,\cos w - \sin z\,\sin w \quad (z, w \in \mathbb{C}), \tag{32}$$

$$\sin(z+w) = \sin z\,\cos w + \cos z\,\sin w \quad (z, w \in \mathbb{C}), \tag{33}$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad (z \in \mathbb{C}), \tag{34}$$

$$-1 \le \sin x \le 1, \quad -1 \le \cos x \le 1 \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{35}$$

$$\frac{d}{dx}\,(e^{ix}) = i\,e^{ix} \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{36}$$

$$\frac{d}{dx}\,\sin x = \cos x \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{37}$$

$$\frac{d}{dx}\,\cos x = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{38}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{39}$$

Vreemd als het lijkt, zal nu bewezen moeten worden dat $\cos x$ de waarde 0 aanneemt voor zekere reële waarden van x. Dit resultaat zal vervolgens leiden tot de rigoureuze definitie van het getal π (tot nu toe slechts meetkundig gedefinieerd) en tot een bewijs dat de sinus- en cosinusfuncties periodiek zijn.

20. Propositie Er bestaat een $x > 0$ zo dat $\cos x = 0$.

Bewijs Stel dat $\cos x \neq 0$ voor alle $x > 0$. Omdat $\cos 0 = 1$, volgt er met behulp van de continuïteit van cos en de tussenwaardestelling dat $\cos x > 0$ voor alle $x > 0$. Dit resultaat, samen met (37), laat zien dat de functie $x \mapsto \sin x$ strikt stijgend is op $[0, \infty)$. Aangezien $\sin 0 = 0$, is $\sin x > 0$ als $x > 0$. Laat nu $0 < x < y$. Dan volgt er uit de middelwaardestelling (Stelling 3) samen met (38) dat er een $z \in (x, y)$ bestaat zo dat $\cos x - \cos y = (y - x) \sin z$, dus wegens genoemde eigenschappen van de sinus-functie en wegens (35) volgt er dat

$$0 < (y - x) \sin x < (y - x) \sin z = \cos x - \cos y \leq 2.$$

Neem $x > 0$ vast. Dan geldt er voor alle $y > x$ dat $0 < \sin x < 2/(y-x)$. Dit is onmogelijk.

∎

21. Definitie Laat x_0 het infimum zijn van de (niet-lege en naar beneden begrensde) verzameling van positieve nulpunten van cos. Dan is $\cos x_0 = 0$ (waarom?), dus $x_0 > 0$. Definieer $\pi := 2x_0$.

Wegens (34) geldt nu dat $\sin(\pi/2) = \pm 1$. Echter, omdat $\sin 0 = 0$ en sin monotoon stijgend is op $[0, \pi/2]$ (zie het bewijs van Propositie 20), zal $\sin(\pi/2) > 0$, dus $= 1$. Dus er volgt met behulp van (30) dat

$$e^{\frac{1}{2}\pi i} = i. \tag{40}$$

22. Opgave Bewijs, door gebruik te maken van (40), (9), (28) en (29), het volgende:

$$e^{\pi i} = -1, \quad e^{2\pi i} = 1, \tag{41}$$

$$e^{z+2\pi i} = e^z \quad (z \in \mathbb{C}), \tag{42}$$

$$\sin(z + \pi) = -\sin z, \quad \cos(z + \pi) = -\cos z \qquad (z \in \mathbb{C}), \tag{43}$$

$$\sin(\tfrac{1}{2}\pi - z) = \cos z, \quad \cos(\tfrac{1}{2}\pi - z) = \sin z \qquad (z \in \mathbb{C}). \tag{44}$$

23. Opgave

a) Zij $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $\cos x = 0$ desda $x = (k + \frac{1}{2})\pi$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$ en dat $\sin x = 0$ desda $x = k\pi$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$.

b) Zij $a \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $\cos(x + a) = \cos x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ desda $a = 2k\pi$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$. Bewijs dat evenzo $\sin(x+a) = \sin x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ desda $a = 2k\pi$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$.

24. Opgave Bewijs dat de afbeelding $\theta \mapsto e^{i\theta} \colon [0, 2\pi) \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ bijectief is.