Syllabus Analyse B2

door T. H. Koornwinder

Universiteit van Amsterdam, Faculteit WINS,

Vakgroep Wiskunde, cursus 1995/96

Ter inleiding

Deze syllabus sluit direct aan bij de syllabus Analyse B1. Veel van wat daar in de Inleiding werd geschreven is ook hier geldig. De hier te behandelen stof valt uiteen in drie delen:

I *Uniforme convergentie en erfelijkheidsstellingen.* Sommige van de hier te behandelen begrippen zijn reeds kort ter sprake geweest bij het vak Topogie A. Dit onderdeel zal later van groot belang zijn bij de vakken Functietheorie, Functionaalanalyse en Fourier-analyse.

II *Stellingen van de inverse functie, van de impliciete functie en van de multiplicatoren van Lagrange.* Deze stellingen zullen van groot belang zijn bij de theorie van *differentieerbare variëteiten*, te behandelen in het vak Differentiaalmeetkunde, maar ook terugkomend in bijv. het vak Liegroepen. In het vak Functietheorie komt er eveneens een toepassing van.

III *Integratie op $\mathbb{R}^n$, tranformaties in meervoudige integralen, integratie langs oppervlakken, integratiestellingen van Gauss en Stokes.* Deze theorie wordt vaak gebruikt in de Analyse, zeker ook in de toegepaste Analyse. De stellingen van Gauss, Green en Stokes zullen ook bij het vak Differentaalmeetkunde gebruikt worden. Dit deel is in de syllabus onevenredig lang vergeleken met de hiervoor beschikbare onderwijstijd. Slechts de hoofdzaken van de theorie zullen in het college behandeld kunnen worden. De toetsing van dit deel zal alleen de vaardigheid met vraagstukken betreffen.

Evenals in syllabus Analyse B1 gelden de volgende conventies: Paragraafnummers die cursief (i.p.v. vet) gedrukt zijn bevatten facultatieve stof. Dit geldt ook als het woord "Bewijs" cursief i.p.v. vet gedrukt is.

Inhoudsopgave

De aanvullende literatuur is als voor syllabus Analyse B1:

[1] J. H. J. Almering, *Analyse* (geheel herzien door H. Bavinck en R. W. Goldbach), Delftse Uitgeversmaatschappij, 6e druk, 1990.

[2] T. M. Apostol, *Calculus, Vol. II*, John Wiley & Sons, Second ed., 1969.

[3] J. J. Duistermaat & J. A. C. Kolk, *Syllabus Analyse C*, Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht, 1992.

[4] R. A. Kortram & A. van Rooij, *Analyse, functies van meer veranderlijken*, Epsilon Uitgaven 16, 1990.

[5] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, Third ed., 1976.

[6] W. Walter, *Analysis II* (in het Duits), Springer, 1990.

Dankwoord Voor de hoofdstukken 1, 2 en 3 heb ik veel ontleend aan de vroegere syllabus Analyse C van prof. dr. D. van Dulst uit 1984. Een aantal van de vraagstukken uit hoofdstukken 4, 5 en 6 zijn kleine variaties op vraagstukken uit Almering [1] en in mindere mate uit [3] en [4]. Dr. P. J. I. M. de Paepe zeg ik dank voor kritisch doorlezen van een eerdere versie van de hoofdstukken 4, 5 en 6.

1 Uniforme convergentie

1.1 Zij X een verzameling. Zij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij van functies $f_n\colon X \to \mathbb{C}$. We recapituleren hier een aantal definities en stellingen uit het vak Topologie A. Daar werden alleen rijen van reëelwaardige functies bekeken, maar de toen gegeven bewijzen gaan zondermeer door voor het complexwaardige geval.

Definitie (cf. syll. Topologie, Def. 3.11)
(a) De functierij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *convergeert puntsgewijs op* X naar een *limietfunctie* f op X als voor elke $x \in X$ geldt dat $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
(b) De functierij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *convergeert uniform op* X naar een *limietfunctie* f op X als er voor elke $\varepsilon > 0$ een natuurlijk getal N bestaat zo dat voor alle $n \geq N$ geldt dat $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ voor elke $x \in X$.

Soms wordt de limietfunctie niet vermeld bij een convergentie-uitspraak. Zo betekent
"De functierij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ convergeert uniform op X" dat:
"De functierij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ convergeert uniform op X naar een zekere functie f."

De definitie van puntsgewijze convergentie luidt met behulp van quantoren:

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \bigl[\, n \geq N \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \,\bigr], \tag{1.1}$$

of equivalent,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \bigl[\, n \geq N \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \,\bigr]. \tag{1.2}$$

De definitie van uniforme convergentie kunnen we als volgt schrijven:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \bigl[\, n \geq N \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \,\bigr], \tag{1.3}$$

of equivalent,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \bigl[\, n \geq N \Longrightarrow \forall x \in X \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \,\bigr]. \tag{1.4}$$

Merk op dat er in (1.1) en (1.2) bij iedere $\varepsilon > 0$ en bij iedere $x \in X$ een van ε en x afhangende $N = N(\varepsilon, x)$ is. Maar in (1.3) en (1.4) is er bij iedere $\varepsilon > 0$ een slechts van ε afhangende $N = N(\varepsilon)$.

1.2 Elke uniform convergente rij functies is dus puntsgewijs convergent (cf. syll. Topologie, §3.12). Immers (1.3) impliceert (1.2). Het komt simpelweg neer op de volgende logische waarheid:

$$[\, \exists N \quad \forall x \quad B(x, N)\,] \implies [\, \forall x \quad \exists N \quad B(x, N)\,]. \tag{1.5}$$

Hier is $B(x, n)$ een bewering die, afhankelijk van parameters x en N, al of niet waar is. De omgekeerde implicatie in (1.5) hoeft echter niet noodzakelijkerwijs te gelden.

In syll. Topologie, Opgave 1.12.10 werd reeds een voorbeeld gegeven van een puntsgewijs convergente rij functies die niet uniform convergent is. We komen straks op dit voorbeeld terug.

1.3 Een toepassing van de logische waarheid (1.5) ben je ook tegengekomen bij het begrip uniforme continuïteit van een afbeelding $f\colon X \to Y$ met X en Y metrische ruimtes (cf. syll. Topologie, Def. 4.6 voor het algemene geval; syll. Analyse A3, Def. 3.33 voor een speciaal geval). Daar zag je met behulp van (1.5) dat uniforme continuïteit gewone continuïteit impliceert.

1.4 In onderstaande Stelling wordt een criterium voor uniforme convergentie gegeven dat in de praktijk van groot nut is.

Stelling (*sup-criterium voor uniforme convergentie*)
Zij X een verzameling, zij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ een functierij op X en zij f een functie op X. Dan convergeert de functierij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uniform op X naar f desda

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x)| \Big) = 0. \tag{1.6}$$

Bewijs Uniforme convergentie van $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ naar f op X is equivalent met bewering (1.4), dus ook equivalent (ga na) met de bewering

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big[n \geq N \Longrightarrow \forall x \in X \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \,\big]. \tag{1.7}$$

Bewering (1.7) is equivalent (pas definitie van supremum toe) met de bewering

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big[\, n \geq N \Longrightarrow \sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \,\big], \tag{1.8}$$

en (1.8) is per definitie equivalent is met (1.6). $\square$

In de praktijk passen we het criterium van (1.6) als volgt toe. Stel er is een rij functies $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ op X gegeven, waarvan we moeten nagaan of die rij uniform convergeert. Eerst bepalen we voor elke $x \in X$ de limiet $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Als de limiet voor sommige x niet bestaat, dan is er zeker geen uniforme convergentie. Nu bepalen we voor iedere $n \in \mathbb{N}$ het getal

$$M_n := \sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x)|. \tag{1.9}$$

Dan is M_n òf een reëel getal ≥ 0 òf $M_n = \infty$. Vervolgens gaan we na of

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0 \tag{1.10}$$

(dus er moet simpelweg de limiet van een getallenrij worden uitgerekend). Merk op dat er drie mogelijke redenen zijn waarom de limiet (1.10) niet hoeft te gelden:
(a) Er zijn willekeurig grote n waarvoor $M_n = \infty$.
(b) Weliswaar is M_n eindig voor voldoende grote n maar de rij $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ convergeert niet.
(c) Weliswaar is M_n eindig voor voldoende grote n en convergeert de rij $(M_n)_{n=1}^{\infty}$, maar de limiet is niet gelijk aan 0.

1.5 Voorbeeld We nemen voor X een van de drie intervallen $X_1 := [0, \frac{1}{2}]$, $X_2 := [0, 1)$, $X_3 := [0, 1]$ en we definiëren $f_n(x) := x^n$ ($x \in X_i$, $n \in \mathbb{N}$). Als $i = 1$ of 2 dan geldt

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad (x \in X_i).$$

Op X_1 berekenen we dat

$$M_n(x) := \sup_{x\in X_1} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{0\le x\le \frac{1}{2}} x^n = 2^{-n}.$$

Dan $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$, dus $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ convergeert uniform naar f op X_1.

Echter, op X_2 geldt

$$M_n(x) := \sup_{x\in X_2} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{0\le x<1} x^n = 1.$$

Dan $\lim_{n\to\infty} M_n = 1 \neq 0$, dus $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ convergeert niet uniform op X_2, maar convergeert wel puntsgewijs op X_2 naar f. (Dit voorbeeld werd ook gegeven in syll. Topologie, Opgave 1.12.10.)

Omdat $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ niet uniform convergeert op X_2 zal deze rij zeker niet uniform convergeren op de grotere verzameling X_3 (waarom?). Wel geldt er puntsgewijze convergentie op X_3, met limietfunctie

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{als } x = 1. \end{cases}$$

Dus de limietfunctie is niet continu op $[0, 1]$, hoewel alle functies f_n wel continu zijn op $[0, 1]$.

1.6 Voorbeeld Zij $X := [0, 1]$ en

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx & \text{als } 0 \le x < n^{-1}, \\ 0 & \text{als } n^{-1} \le x \le 1. \end{cases}$$

Dan

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x = 0, \\ 0 & \text{als } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Dus

$$|f(x) - f_n(x)| = \begin{cases} 0 & \text{als } x = 0 \text{ of } n^{-1} \le x \le 1, \\ 1 - nx & \text{als } 0 < x < n^{-1}. \end{cases}$$

Dus $M_n(x) := \sup_{0\le x\le 1} |f(x) - f_n(x)| = 1$ en $\lim_{n\to\infty} M_n = 1 \neq 0$. De functierij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ convergeert dus niet uniform op $[0, 1]$, maar convergeert wel puntsgewijs naar f. De functie f is niet continu op $[0, 1]$.

1.7 Opmerking In §1.5 en §1.6 hebben we niet-continue limietfuncties ontmoet van functierijen bestaande uit continue functies. In beide gevallen was de convergentie niet uniform. In het geval van uniforme convergentie zou f wel continu geweest zijn, want een nog te behandelen stelling zegt: Als een rij continue functies op een metrische ruimte uniform convergeert, dan is de limietfunctie ook continu. In het geval van een rij begrensde continue functies werd deze stelling reeds behandeld in syll. Topologie, Gevolg 3.14.

1.8 Opmerking Het criterium (1.6) voor uniforme convergentie kan, voor het geval van begrensde functies, in verband worden gebracht met convergentie t.o.v. de sup-norm. Inderdaad, laat $\mathcal{B}(X)$ de complexe (of reële) lineaire ruimte van alle begrensde functies $f\colon X \to \mathbb{C}$ (of $f\colon X \to \mathbb{R}$) zijn. Dit wordt een genormeerde lineaire ruimte t.o.v. de *sup-norm* $\|f\|_s := \sup_{x\in X} |f(x)|$ en dus ook een metrische ruimte t.o.v. de bijbehorende *sup-metriek* ρ, gegeven door $\rho(f,g) := \|f-g\|_s$. Deze genormeerde ruimte werd ingevoerd in syll. Topologie, §4.5, Voorbeeld 2, echter alleen voor het reëelwaardige geval. Zoals bewezen in syll. Topologie, §3.11, is de limiet f van een uniform convergente rij begrensde functies f_n op X weer een begrensde functie. Vervolgens werd in syll. Topologie, §3.12 de volgende stelling geformuleerd, die ook direct duidelijk is uit onze Stelling 1.4.

Stelling (*uniforme convergentie en convergentie in sup-metriek*)
Zij X een verzameling, zij $(f_n)_{n=1}^\infty$ een rij van begrensde functies op X en zij f een functie op X. Dan zijn de twee volgende uitspraken equivalent:
(i) De functierij $(f_n)_{n=1}^\infty$ convergeert uniform op X naar f.
(ii) f is begrensd en $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $(\mathcal{B}(X), \rho)$.

1.9 Terminologie In plaats van te zeggen

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ uniform op } X$$

kunnen we ook zeggen:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ uniform voor } x \text{ in } X.$$

Dan kunnen we het geval $X = X_1$ van Voorbeeld 1.5 bijvoorbeeld uitdrukken door te zeggen dat $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ uniform voor $0 \le x \le \frac{1}{2}$, zonder dat we de notatie $f_n(x) := x^n$, $f(x) := 0$ hoeven in te voeren.

1.10 Opgave De rij functies $(f_n)_{n=1}^\infty$ convergeert uniform op X naar f en de rij $(g_n)_{n=1}^\infty$ convergeert uniform op X naar g.
(a) Geldt: $(f_n + g_n)_{n=1}^\infty$ convergeert uniform op X naar $f+g$?
(b) Geldt: $(f_n g_n)_{n=1}^\infty$ convergeert uniform op X naar fg?

(Geef bewijs of tegenvoorbeeld.)

1.11 Opgave
(a) Voor de functies $f_n\colon X\cup Y \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ en $f\colon X \cup Y \to \mathbb{R}$ geldt dat $(f_n)_{n=1}^\infty$ uniform op X naar f convergeert en ook uniform op Y naar f convergeert.
Bewijs dat $(f_n)_{n=1}^\infty$ uniform op $X \cup Y$ naar f convergeert.
(b) Voor de functies $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ geldt dat de rij $(f_n)_{n=1}^\infty$ uniform op (a,b) convergeert en dat de rijen $(f_n(a))_{n=1}^\infty$ en $(f_n(b))_{n=1}^\infty$ convergeren.
Bewijs dat $(f_n)_{n=1}^\infty$ uniform op $[a,b]$ convergeert.

1.12 Opgave
(a) Zij $(f_n)_{n=1}^\infty$ een puntsgewijs convergente rij functies op een eindige verzameling X. Bewijs dat de functierij uniform convergeert op X.

(b) Laten X en Y verzamelingen zijn zo dat $X \subset Y$ en het complement $Y \backslash X$ slechts eindig veel punten bevat. Zij $(f_n)_{n=1}^\infty$ een puntsgewijs convergente rij functies op Y die uniform convergeert op X. Bewijs dat de functierij ook uniform convergeert op Y.

1.13 Opmerking (*meetkundige beschrijving van uniforme convergentie*)
Voor het goede begrip van uniforme convergentie helpt een meetkundige beschrijving. Neem voor het gemak aan dat X een interval in $\mathbb{R}$ is en dat de functies f_n op X reëelwaardig zijn. Zij f een reëelwaardige functie op X. Voor $\varepsilon > 0$ definiëren we de *epsilonband* om de grafiek van f als de verzameling

$$\mathcal{G}_\varepsilon(f) := \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid |y - f(x)| < \varepsilon\}.$$

Dan convergeert de functierij $(f_n)_{n=1}^\infty$ uniform op X naar f desda er voor elk positief reëel getal ε een natuurlijk getal N bestaat zo dat voor $n \geq N$ geldt dat de grafiek $\mathcal{G}(f_n) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ van f_n geheel in de epsilonband $\mathcal{G}_\varepsilon(f)$ bevat is.

Dus we kunnen ook zeggen dat de functierij $(f_n)_{n=1}^\infty$ niet uniform op X naar f convergeert desda als er een positief reëel getal ε bestaat zo dat er willekurig grote n bestaan waarvoor de grafiek van f_n niet geheel bevat is in de epsilonband $\mathcal{G}_\varepsilon(f)$.

Opgave Teken voor het geval X_2 uit Voorbeeld 1.5 en voor Voorbeeld 1.6 een epsilonband om de grafiek van f zo dat voor willekeurig grote n de grafiek van f_n niet geheel bevat is in die epsilonband.

1.14 Soms is het criterium voor uniforme convergentie van Stelling 1.4 niet goed bruikbaar omdat de suprema in (1.9) niet expliciet kunnen worden uitgerekend. Dan zijn er wel andere technieken beschikbaar. Als men al vermoedt dat er uniforme convergentie geldt dan kan men proberen $|f(x) - f_n(x)|$ te majoreren met een naar 0 convergerende rij getallen M_n:

Opgave (*majorantencriterium voor uniforme convergentie*)
Zij $(f_n)_{n=1}^\infty$ een functierij en f een functie op een verzameling X. Bewijs het volgende. Als er reële getallen $M_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$) bestaan zo dat $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$ en $|f(x) - f_n(x)| \leq M_n$ ($x \in X$, $n \in \mathbb{N}$) dan geldt dat $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ uniform op X.

1.15 Opgave Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2 + x^2} = 0 \quad \text{uniform voor } x \in [0, \infty).$$

1.16 Als het criterium voor uniforme convergentie van Stelling 1.4 niet goed bruikbaar is en als we al vermoeden dat er geen uniforme convergentie geldt, dan kunnen we proberen om reeds voor een geschikte aftelbare deelverzameling van X te bewijzen dat daarop geen uniforme convergentie is:

Opgave Zij $(f_n)_{n=1}^\infty$ een functierij en f een functie op een verzameling X. Bewijs dat de volgende drie uitspraken equivalent zijn.
(a) Er geldt niet dat $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ uniform op X.
(b) Er is een $\varepsilon > 0$ en er is een rij $(x_k)_{k=1}^\infty$ in X en er zijn $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ in $\mathbb{N}$ zo dat $|f(x_k) - f_{n_k}(x_k)| \geq \varepsilon$ voor $k = 1, 2, \ldots$.
(c) Er is een aftelbare deelverzameling X_1 van X zo dat niet $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ uniform op X_1.

1.17 Opgave Bewijs dat onderstaande limiet wel puntsgewijs maar niet uniform geldt.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x\,\cos(nx)}{x+n} = 0 \quad \text{voor } x \in [0,\infty).$$

1.18 Opgave Gegevens als in Opgave 1.16. Bewijs het volgende. Als voor zekere rij $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in X geldt dat $\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f_n(x_n)| = c$ met $c \neq 0$, dan geldt niet dat $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ uniform op X.

1.19 De welbekende stelling van Cauchy maakt het mogelijk om convergentie van een getallenrij te karakteriseren zonder melding te maken van de limiet van die rij. Dit is van groot theoretisch belang en soms ook van praktisch belang. Evenzo zullen we nu uniforme convergentie van een rij functies karakteriseren met behulp van de z.g. uniforme Cauchy-voorwaarde, zonder dat de limietfunctie bekend hoeft te zijn.

Definitie Een functierij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ op een verzameling X voldoet aan de *uniforme Cauchy-voorwaarde* als er voor elke $\varepsilon > 0$ een natuurlijk getal N bestaat zo dat voor alle $n, m \geq N$ geldt dat $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ voor elke $x \in X$.

De uniforme Cauchy-voorwaarde kan in logische symbolen als volgt worden uitgedrukt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad \big[n, m \geq N \Longrightarrow \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\,\big]. \tag{1.11}$$

Vergelijk dit met de uitspraak dat voor iedere $x \in X$ de getallenrij $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ een Cauchy-rij is:

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad \big[n, m \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\,\big]. \tag{1.12}$$

Netzo als gold dat (1.4) $\Rightarrow$ (1.1), zo geldt dat (1.11) $\Rightarrow$ (1.12): de uniforme Caucy-voorwaarde impliceert de puntsgewijze Cauchy-voorwaarde. Dit berust weer op de logische waarheid (1.5).

Stelling (*uniform Cauchy-criterium*)
Zij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ een functierij op een verzameling X. Dan convergeert de functierij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uniform op X naar een zekere functie f op X desda aan de uniforme Cauchy-voorwaarde voldaan is.

Bewijs Neem eerst aan dat de convergentie uniform is. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat voor $n, m \geq N$ geldt dat voor alle $x \in X$:

$$|f(x) - f_n(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad |f(x) - f_m(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

dus ook (met behulp van de driehoeksongelijkheid):

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Dit bewijst de uniforme Cauchy-voorwaarde.

Neem omgekeerd aan dat aan de uniforme Cauchy-voorwaarde voldaan is. Dan is aan de puntsgewijze Cauchy-voorwaarde (1.12) voldaan. Vanwege de Stelling van Cauchy voor rijen in $\mathbb{C}$ heeft de rij $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ voor iedere x een limiet in $\mathbb{C}$, die we $f(x)$ zullen noemen.

We moeten nu nog bewijzen dat de rij $(f_n)_{n=1}^\infty$ uniform convergeert naar f convergeert op X. Zij $\varepsilon > 0$. Vanwege de uniforme Cauchy-voorwaarde is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat, voor elke $x \in X$ en voor alle $n \geq N$ geldt dat:

$$|m \geq N| \Longrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

dus ook, omdat $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Dit bewijst de uniforme convergentie. □

1.20 Opgave Bewijs dat de uniforme Cauchy-voorwaarde (1.11) equivalent is met de volgende bewering.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad \big[n, m \geq N \Longrightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \,\big].$$

1.21 Opmerking (*uniform Cauchy-criterium en volledigheid van $\mathcal{B}(X)$*)
Het bewijs van Stelling 1.19 zal bekend voorkomen aan de lezer die syll. Topologie, §5.5, Voorbeeld 1 bekeken heeft. Inderdaad, merk met behulp van Opgave 1.20 op dat voor een rij $(f_n)_{n=1}^\infty$ in de genormeerde lineaire ruimte $\mathcal{B}(X)$ van begrensde complexwaardige functies op X (cf. Opmerking 1.8) de uniforme Cauchy-voorwaarde juist wil zeggen dat deze rij een Cauchy-rij is in de metrische ruimte $\mathcal{B}(X)$ t.o.v. de sup-metriek ρ. Stelling 1.19, gecombineerd met Stelling 1.8, wil dan zeggen dat de ruimte $\mathcal{B}(X)$ volledig is t.o.v. de sup-metriek ρ. Stelling 1.19 werd in deze vorm geformuleerd en bewezen in syll. Topologie, §5.5, Voorbeeld 1. Zie Definitie 5.1 aldaar voor de definitie van een volledige metrische ruimte.

1.22 We gaan nu uniforme convergentie voor reeksen van functies bekijken. Laat voor elke $n \in \mathbb{N}$ een functie $f_n : X \to \mathbb{C}$ gegeven zijn. Net zoals dat bij getallenreeksen het geval was, heeft de *functiereeks*

$$\textstyle\sum_{k=1}^\infty f_k \tag{1.13}$$

tweeërlei betekenis:

(a) De functierij $(s_n)_{n=1}^\infty$ op X, waarbij de functie s_n op X gedefinieerd is door

$$s_n := \textstyle\sum_{k=1}^n f_k. \tag{1.14}$$

(b) De functie f gedefinieerd door

$$f := \lim_{n\to\infty} s_n \quad \text{op } X,$$

onder de stilzwijgende veronderstelling dat de functierij $(s_n)_{n=1}^\infty$ puntsgewijs convergeert op X.

Definitie Met notatie als boven zeggen we:

(a) De functiereeks (1.13) *convergeert puntsgewijs op* X met *somfunctie* f als de functierij $(s_n)_{n=1}^\infty$ puntsgewijs op X convergeert naar f.

(b) De functiereeks (1.13) *convergeert uniform op* X met *somfunctie* f als de functierij $(s_n)_{n=1}^\infty$ uniform op X naar f convergeert.

Soms wordt de somfunctie niet vermeld bij een convergentie-uitspraak over een functiereeks. Zo betekent
"De functiereeks (1.13) convergeert uniform op X" dat:
"De functiereeks (1.13) convergeert uniform op X met een zekere somfunctie f."

1.23 Gezien bovenstaande definitie kunnen we Propositie 1.4 herformuleren voor functiereeksen. Hierin zullen we de somfunctie niet meer zo expliciet opvoeren, maar in het bewijs speelt die somfunctie uiteraard wel een rol.

Propositie *sup-criterium voor uniforme convergentie van reeksen*
De functiereeks $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ van functies f_k op X convergeert uniform op X desda:
(a) De functiereeks convergeert puntsgewijs op X.
(b) Er geldt dat

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in X}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right|\right)=0.$$

Bewijs Laat s_n gegeven zijn door (1.14). Als $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ uniform op X convergeert met somfunctie f dan volgen (a) en (b) direct met behulp van Definitie 1.22 uit de soortgelijke eigenschappen voor $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

Omgekeerd, als (a) en (b) gelden, dan volgt uit (a) dat $f(x) := \lim_{n=1}^{\infty} s_n(x)$ goed gedefinieerd is voor alle $x \in X$, dus er geldt voor elke $x \in X$ dat $f(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$, waarbij de reeks convergeert. Dus er volgt uit (b) dat $\lim_{n\to\infty}\big(\sup_{x\in X} |f(x)-s_n(x)|\big) = 0$. Dus Propositie 1.4 levert de gevraagde uniforme convergentie. $\square$

1.24 We kunnen (b) ook beschrijven met behulp van functies R_n gegeven door

$$R_n(x) := \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \quad (x \in X) \tag{1.15}$$

(welgedefinieerd als som van een wegens (a) convergente reeks) en getallen M_n (≥ 0 of $= \infty$) gegeven door

$$M_n := \sup_{x\in X} |R_n(x)|. \tag{1.16}$$

Het gaat er dan om of de getallenrij $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ al of niet convergeert met limiet 0.

Voorbeeld Zij X een van de intervallen $[0, \frac{1}{2}]$ of $[0, 1)$ en $f_n(x) := x^n$ $(x \in X)$. Dan convergeert de functiereeks (1.13) puntsgewijs op X met somfunctie $f(x) = x/(1 - x)$. Dan geeft (1.15) dat $R_n(x) = x^{n+1}/(1 - x)$. Merk op dat R_n een monotoon stijgende niet-negatieve functie is op $[0, 1)$. Voor M_n gedefinieerd door (1.16) verkrijgen we in het geval $X = [0, \frac{1}{2}]$ dat $M_n = 2^{-n}$ en $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$, dus uniforme convergentie, en in het geval $X = [0, 1)$ dat $M_n = \infty$ dus niet $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$, dus geen uniforme convergentie.

1.25 De volgende stelling is een rechtstreekse herformulering van Stelling 1.19.

Stelling (*uniform Cauchy-criterium voor reeksen*)
De functiereeks $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ convergeert uniform op X desda er voor iedere $\varepsilon > 0$ een natuurlijk getal N bestaat zo dat voor alle $m > n \geq N$ geldt dat $|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)| < \varepsilon$ voor elke $x \in X$.

1.26 Van groot praktisch belang is de Weierstrass-toets, geformuleerd in onderstaande propositie.

Propositie (*Weierstrass-toets*) De functiereeks $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ convergeert uniform op X als er niet-negatieve reële getallen M_n $(n \in \mathbb{N})$ bestaan zo dat

$$|f_n(x)| \le M_n \quad (x \in X,\ n \in \mathbb{N}) \tag{1.17}$$

en de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convergeert.

Bewijs Er gelden de ongelijkheden

$$\sup_{x\in X}\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \le \sup_{x\in X}\left(\sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)|\right) \le \sum_{k=n+1}^{m}\left(\sup_{x\in X}|f_k(x)|\right) \le \sum_{k=n+1}^{m} M_k. \tag{1.18}$$

Omdat de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ convergeert, is de getallenrij $(\sum_{k=1}^{n} M_k)_{n=1}^{\infty}$ een Cauchy-rij. Dus de functierij $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, met s_n gegeven door (1.14), voldoet aan de uniforme Cauchy-voorwaarde, dus de functiereeks $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ convergeert uniform op X. □

Voorbeeld De Weierstrass-toets kan bijvoorbeeld direct toegepast worden in het geval $X = [0, \frac{1}{2}]$ van Voorbeeld 1.24. We zien dat dat dan $|f_n(x)| \le 2^{-n}$ voor $x \in X$ en dat $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty$.

Waarschuwing De omkering van de Weierstrass-toets geldt niet. We zullen zien dat er uniform convergente functiereeksen zijn (met zelfs alle f_n niet-negatief) zonder dat er getallen M_n gevonden kunnen worden met eigenschappen als in Propositie 1.26.

1.27 Laten we, om in te zien dat de Weierstrass-toets niet omgekeerd mag worden, het bewijs van Propositie 1.26 verder analyseren. Bekijk de ongelijkheden (1.18). Zij $\varepsilon > 0$. Het gaat er om een N te vinden zo dat voor $m > n \ge N$ het meest linker lid van de ongelijkheden kleiner dan ε is. Dit lukt als we een N kunnen vinden zo dat voor $m > n \ge N$ het meest rechter lid van de ongelijkheden kleiner dan ε is en dit laatste is weer het geval als de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convergeert, zoals wordt aangenomen in Propositie 1.26. Het is echter best denkbaar, gezien de richting van de ongelijkheden in (1.18), dat de gewenste N wel voor het meest linker lid gevonden kan worden, maar niet voor het meest rechter lid.

Definieer

$$M_{f,n} := \sup_{x\in X} |f_n(x)| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Als ook (1.17) geldt dan zien we dat

$$|f_n(x)| \le M_{f,n} \le M_n \quad (x \in X,\ n \in \mathbb{N}).$$

Dus als de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convergeert dan convergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} M_{f,n}$ eveneens. De getallen $M_{f,n}$ zijn de "zuinigste" getallen M_n waarvoor mogelijkerwijs aan de gegevens van Propositie 1.26 voldaan is. Bij een voorbeeld dat de omkering van Propositie 1.26 niet geldt kunnen we dus werken met $M_n := M_{f,n}$.

Als $M_n := M_{f,n}$ dan kunnen de eerste twee ongelijkheden in (1.18) nog verantwoordelijk zijn voor de onjuistheid van de omkering van Propositie 1.26. Als $f_n(x) \ge 0$ voor alle n en x dan wordt de eerste ongelijkheid een gelijkheid. Het draait dan dus om de tweede ongelijkheid.

De onjuistheid van de omkering van Propositie 1.26 is eenvoudig in te zien wanneer $f_n(x)$ als functie van n niet tekenvast is. Neem bijv. $f_n(x) := (-1)^n\, n^{-1}$ (identiek in x) dan convergeert de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ uniform op X terwijl $M_{f,n} = n^{-1}$, dus $\sum_{n=1}^{\infty} M_{f,n} = \infty$.

We geven nu een voorbeeld van de onjuistheid van de omkering van Propositie 1.26 als bovendien gegeven is dat $f_n(x) \geq 0$ voor alle $x \in X$ en $n \in \mathbb{N}$. In ons tegenvoorbeeld zal de kardinaliteit van X minstens gelijk moeten zijn aan aftelbaar oneindig, want als X een eindige verzameling is dan impliceert puntsgewijze convergentie van $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ dat $\sum_{k=1}^{\infty} M_{f,k}$ convergeert.

Zij $X := \mathbb{N}$, zij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij van reële getallen $a_n \geq 0$ zo dat $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ maar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ (neem bijv. $a_n := n^{-1}$). Definieer $f_n(m) := \delta_{n,m}\, a_n$ $(n, m \in \mathbb{N})$. Dan convergeert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ puntsgewijs op $\mathbb{N}$. Ook geldt dat $\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(m) = a_m$ als $m > n$ en $= 0$ als $m \leq n$. Dus $\sup_{m\in\mathbb{N}} |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(m)| = \sup_{m>n} a_m$ en $\lim_{n\to\infty}(\sup_{m>n} a_m) = 0$. Op grond van Propositie 1.23 concluderen we tot uniforme convergentie. Anderzijds geldt er dat $M_{n,f} = a_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, dus de Weierstrass-toets is onder geen beding toepasbaar.

1.28 Van de theorie van getallenreeksen weten we dat alternerende reeksen convergeren indien de termen in absolute waarde monotoon naar 0 dalen. Een soortgelijk resultaat geldt voor uniforme convergentie.

Propositie (*Criterium voor uniforme convergentie bij alternerende reeksen*)
Zij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ een functierij op X zo dat

$$f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N},\ x \in X) \tag{1.19}$$

en $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ uniform op X. Dan convergeert de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f_k$ uniform op X.
Bewijs Laat $n, m \in \mathbb{N}$ zo dat $m > n$. Met volledige inductie naar $m - n$ volgt er uit (1.19) dat

$$0 \leq (-1)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{m} (-1)^k f_k(x) \leq f_{n+1}(x) \quad (x \in X).$$

Dus

$$\sup_{x\in X} \left| \sum_{k=n+1}^{m} (-1)^k f_k(x) \right| \leq \sup_{x\in X} |f_{n+1}(x)|.$$

Pas nu Stellingen 1.19 en 1.25 toe. □

Opgave Zij $a > 0$, $X := [a, \infty)$. Definieer $f_n(x) := (-1)^n\, n^{-x}$ $(x \in X)$. Bewijs dat de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ uniform convergeert op X.

1.29 **Opmerking** Het begrip uniforme convergentie kan ook gebruikt worden als de n in $f_n(x)$ "continu" i.p.v. discreet loopt. Meestal zal er dan een andere letter dan n gebruikt worden en zal die ook niet als subindex worden geschreven. We geven een concrete definitie.

Definitie (*Uniforme convergentie van $f(x, y)$ voor $x \to x_0$*)
Zij (X, d) een metrische ruimte, Y een willekeurige verzameling en zij x_0 een punt in X. Laten gegeven zijn functies $f\colon X\backslash\{x_0\} \times Y \to \mathbb{C}$ en $f_0\colon Y \to \mathbb{C}$. We zeggen dat

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y) = f_0(y) \quad \text{uniform voor } y \in Y$$

als er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x \in X$ met $0 < d(x, x_0) < \delta$ geldt dat $|f(x, y) - f_0(y)| < \varepsilon$ voor alle $y \in Y$.

Opgave Zij $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$. Bewijs dat $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ desda $\lim_{r\downarrow 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$ uniform voor $0 \le \theta < 2\pi$.

1.30 *praktische methodes voor onderzoek van uniforme convergentie*
We vatten nog eens samen welke methodes men in de praktijk kan gebruiken om voor een gegeven functierij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de uniforme convergentie op X te onderzoeken. Je kunt dit lezen als een aantal achtereenvolgens te doorlopen stappen. Meestal zal het echter niet nodig zijn om deze stappen zo schools te volgen en zul je al veel eerder zien welke techniek je moet toepassen.

1. Convergeert de functierij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ puntsgewijs op X? Zoja, ga naar 2, zonee dan geen uniforme convergentie.

2. Probeer de puntsgewijze limiet $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ expliciet uit te rekenen. Ga naar 3 als dit lukt, ga anders naar 8.

3. Bereken $g_n(x) := |f(x) - f_n(x)|$. Probeer $M_n := \sup_{x\in X} g_n(x)$ expliciet uit te rekenen. Ga naar 4 als dit lukt, ga anders naar 5 of 6 of 7.

4. Ga na of $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$. Zoja, dan uniforme convergentie, zonee, dan geen uniforme convergentie.

5. Probeer getallen a_n te vinden zo dat $g_n(x) \le a_n$ en $a_n \to 0$ voor $n \to \infty$. Als dit lukt dan is er uniforme convergentie

6. Ga over naar een deelverzameling X_1 van X, waarop M_n wel expliciet uitgerekend kan worden. Als daar niet $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$ dan geldt er ook geen uniforme convergentie op X.

7. Probeer een rij $x_1, x_2, \ldots$ in X en $n_1 < n_2 < \ldots$ in $\mathbb{N}$ te vinden zo dat $g_{n_k}(x_k) \ge \varepsilon > 0$ voor $k = 1, 2, \ldots$. Dan geldt er geen uniforme convergentie op X.

8. Probeer met behulp van de uniforme Cauchy-voorwaarde (cf. §1.19) na te gaan of er uniforme convergentie geldt.

1.31 *praktische methodes voor onderzoek van uniforme convergentie bij reeksen*
Analoge stappen als in §1.30 kunnen worden doorlopen als we van een gegeven functiereeks $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ de uniforme convergentie op X willen onderzoeken. Toch is er genoeg verschil met het rijgeval om de stappen voor het reeksgeval apart te vermelden:

1. Convergeert de functiereeks $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ puntsgewijs op X? Zoja, ga naar 2, zonee dan geen uniforme convergentie.

2. Is de reeks alternerend en is aan de voorwaarden van Propositie 1.28 voldaan? Zo ja, dan uniforme convergentie, zonee, ga naar 3.

3. Probeer $\mu_n := \sup_{x\in X} |f_n(x)|$ expliciet uit te rekenen. Lukt dit, ga dan naar 4, ga anders naar 5.

4. Ga na of $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$. Zoja, dan uniforme convergentie op grond van de Weierstrass-toets, ga anders naar 5.

5. Probeer de puntsgewijze sommen $g_n(x) := \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ expliciet uit te rekenen. Ga naar 6 als dit lukt, ga anders naar 8 of 12.

6. Probeer $M_n := \sup_{x\in X} g_n(x)$ expliciet uit te rekenen. Ga naar 7 als dit lukt, ga anders naar 8 of 9 of 10 of 11 of 12.

7 Ga na of $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$. Zoja, dan uniforme convergentie, zonee, dan geen uniforme convergentie.

8. Probeer getallen b_n te vinden zo dat $|f_n(x)| \leq b_n$ en $\sum_{n=1}^{\infty} b_k < \infty$. Als dit lukt dan is er uniforme convergentie op grond van de Weierstrass-toets.

9. Probeer getallen a_n te vinden zo dat $g_n(x) \leq a_n$ en $a_n \to 0$ voor $n \to \infty$. Als dit lukt dan is er uniforme convergentie

10. Ga over naar een deelverzameling X_1 van X, waarop M_n wel expliciet uitgerekend kan worden. Als daar niet $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$ dan geldt er ook geen uniforme convergentie op X.

11. Probeer een rij $x_1, x_2, \cdots$ in X en $n_1 < n_2 < \ldots$ in $\mathbb{N}$ te vinden zo dat $g_{n_k}(x_k) \geq \varepsilon > 0$ voor $k = 1, 2, \ldots$. Dan geldt er geen uniforme convergentie op X.

12. Probeer met behulp van de uniforme Cauchy-voorwaarde (cf. §1.25) na te gaan of er uniforme convergentie geldt.

Verdere vraagstukken

V1.1 Bepaal voor welke reële x de rij $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ convergeert en voor welke reële x de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ convergeert als

a) $f_n(x) = x^n$

b) $f_n(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^n$

c) $f_n(x) = \left(\frac{1}{nx}\right)^n$

d) $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$

e) $f_n(x) = \log(1 + x^{2n})$

f) $f_n(x) = \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right) n^x$

g) $f_n(x) = n^{-1} \log(1 + x^n)$.

V1.2 Onderzoek puntsgewijze en uniforme convergentie van de rij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ met

a) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ op $(0, 1]$

b) $f_n(x) = \dfrac{x}{nx + 1}$ op $[0, \infty)$

c) $f_n(x) = nx^n\,(1 - x)$ op $[0, 1]$

d) $f_n(x) = nx\,e^{-nx}$ op $[0, \infty)$

e) $f_n(x) = x\,e^{-nx^2}$ op $[0, \infty)$

f) $f_n(x) = \dfrac{1}{x^n} - \dfrac{1}{x^{2n}}$ op $[1, \infty)$

g) $f_n(x) = \dfrac{x \cos nx}{x + \sqrt{n}}$ op $[0, \infty)$

h) $f_n(x) = nx\,(1 - x^2)^n$ op $[0, 1]$.

V1.3 Onderzoek puntsgewijze en uniforme convergentie van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ als

a) $f_n(x) = x^n$ op $(-1, 1)$

b) $f_n(x) = x^n$ op $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

c) $f_n(x) = \left(\dfrac{\log x}{x}\right)^n$ op $[1, \infty)$

d) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1 + x^2)^n}$ op $\mathbb{R}$

e) $f_n(x) = x^n\,(1 - x)^2$ op $[0, 1]$

f) $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$ op $[a, \infty)$ $(a \in \mathbb{R})$

g) $f_n(x) = (-1)^n\,\dfrac{1}{n + x^2}$ op $\mathbb{R}$.

V1.4 De hieronder gegeven rijen $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ van functies convergeren alle puntsgewijs naar 0. Ga voor elke rij na of hij ook uniform convergeert.

a) $f_n(x) := e^{-|x+n|}$ op $\mathbb{R}$.

b) $f_n(x) := x^n - x^{n+1}$ op $[0,1]$.

c) $f_n(x) := x^n - x^{2n}$ op $[0,1]$.

V1.5 Zij $f_n(x) := n^a\, x\, e^{-n^2x^2}$ $(n = 1, 2, \ldots$ en $x \in \mathbb{R})$.

a) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ is de rij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ puntsgewijs convergent op $\mathbb{R}$?

b) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ is de rij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uniform convergent op $\mathbb{R}$?

V1.6 Zij $f_n(x) := n^a\, x^n\, (1-x)$ $(n = 1, 2, \ldots$ en $x \in [0,1])$.
Voor welke $a \in \mathbb{R}$ is de rij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uniform convergent op $[0,1]$?

V1.7 Bepaal de verzameling X van alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor de reeks $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)x^n}{n}$ convergeert. Convergeert de reeks ook uniform voor $x \in X$?

V1.8

a) Gegeven is een continue functie $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ met $g(1) = 0$. Zij $f_n(x) := g(x)\, x^n$ $(n = 1, 2, \ldots$ en $x \in [0,1])$. Bewijs dat de rij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uniform convergeert op $[0,1]$.

b) Bewijs dat de rij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ met $f_n(x) := x^n \log x$ uniform convergeert op $(0,1]$.

V1.9 Zij $f_n(x) := \dfrac{x^n \log x}{1 + x^n}$.

a) Bepaal $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor elke $x \in (0,\infty)$.

b) Bewijs dat $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uniform convergeert op $(0,\infty)$.

V1.10 Zij $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$. Definieer de functies $f_n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ door $f_n(m) := (1+n^{-2}m)^{-1}$ $(n, m \in \mathbb{N})$. Onderzoek de puntsgewijze en uniforme convergentie van de functierij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ op $\mathbb{N}$.

2 Erfelijkheidsstellingen

Zij X een verzameling met een zekere structuur, op zijn minst die van een metrische ruimte. Stel $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ is een functierij op X die puntsgewijs convergeert naar een functie f op X. We spreken van een *erfelijkheidsstelling* als een bepaalde eigenschap die alle functies f_n in de rij bezitten, "geërfd" wordt door de limietfunctie f. Bij deze eigenschappen kan men denken aan continuïteit, Riemann-integreerbaarheid, differentieerbaarheid, etc. Doorgaans is puntsgewijze convergentie een te zwakke vorm van convergentie om het erven van de eigenschap te garanderen. Uniforme convergentie blijkt in dit opzicht betere papieren te hebben. We zullen beginnen met een erfelijkheidsstelling voor continue functies op een metrische ruimte. Deze stelling is het prototype van alle erfelijkheidsstellingen. Bij soortgelijke stellingen voor het erven van andere eigenschappen speelt nog een ander aspect een rol, nl. of een operatie zoals Riemann-integratie of differentiatie verwisseld mag worden met het nemen van de limiet.

2.1 Het erven van continuïteit

2.1 Stelling (*Erfelijkheidsstelling voor continuïteit*)
Zij (X, d) een metrische ruimte. Zij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij van continue functies op X die uniform op X convergeert naar een functie f. Dan is f continu.

Bewijs Zij $x_0 \in X$. We moeten de continuïteit van f in x_0 bewijzen. Neem daartoe $\varepsilon > 0$. We moeten bewijzen dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ als $d(x, x_0) < \delta$. Voor willekeurige $x \in X$ en $n \in \mathbb{N}$ geldt er met behulp van de driehoeksongelijkheid dat

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Vanwege de uniforme convergentie van de rij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ kunnen we n zeker zo nemen dat $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ voor voor alle $x \in X$. Voor deze, nu vaste n, geldt dus voor nog steeds willekeurige x dat

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f_n(x) - f_n(x_0)| + 2\varepsilon.$$

Omdat f_n continu is op X bestaat er een $\delta > 0$ zo dat $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$ als $d(x, x_0) < \delta$. Dus er geldt dat $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$ als $d(x, x_0) < \delta$. Dit was wat we moesten bewijzen; het is niet van wezenlijk belang dat we op 3ε i.p.v. ε uitkomen. □

2.2 Stelling 2.1 werd onder de extra aanname dat de functies f_n reëelwaardig en begrensd zijn, reeds gegeven in syll. Topologie, Gevolg 3.14. In syll. Topologie, Stelling 3.13 werd een formulering in termen van functieruimten gegeven: Zij (X, d) een metrische ruimte. Zij $\mathcal{B}(X)$ de t.o.v. de sup-norm genormeerde complexe (of reële) lineaire ruimte van begrensde functies op X, en zij ρ de bijbehorende sup-metriek (zie §1.8). Definieer $C(X)$ als de lineaire deelruimte van alle continue begrensde functies op X (complex- of reëelwaardig). Dan geldt (cf. syll. Topologie, Stelling 3.13 en §4.5, Voorbeeld 2):

Stelling (*verband Erfelijkheidsstelling met volledigheid van* $C(X)$)
(a) $C(X)$ is t.o.v. de sup-metriek een gesloten deelruimte van $\mathcal{B}(X)$.
(b) De metrische ruimte $(C(X), \rho)$ is volledig.

Bewijs Gebruik Stelling 2.1 samen met Opmerking 1.21. □

2.3 Als $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij continue functies op (X,d) is die puntsgewijs naar een functie f convergeert, maar niet uniform op X dan kan f al of niet continu zijn. Beide mogelijkheden komen voor. Zie Voorbeeld 1.6 voor het geval dat f niet continu is. Zie het volgende voorbeeld voor het geval dat f wel continu is.

Voorbeeld Zij $X := [0,1]$, en f_n op X gegeven door

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{als } 0 \leq x \leq (2n)^{-1}, \\ 2 - 2nx & \text{als } (2n)^{-1} < x \leq n^{-1}, \\ 0 & \text{als } n^{-1} < x \leq 1. \end{cases}$$

Dan is $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ puntsgewijs voor $x \in [0,1]$, maar de convergentie is niet uniform (ga na). De limietfunctie, identiek 0, is echter continu.

2.4 Opmerking (*Erfelijkheidsstelling voor continuïteit bij functiereeksen*)
Er is een evidente variant van Stelling 2.1 voor functiereeksen. Zij $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ een reeks van continue functies op een metrische ruimte (X,d) die uniform op X convergeert naar een functie f. Dan is f continu.

2.5 **Opgave** Bewijs het volgende. Zij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij van uniform continue functies op een metrische ruimte (X,d) die uniform op X convergeert naar een functie f. Dan is f uniform continu op X.

2.6 Uit Voorbeeld 2.3 blijkt dat de omkering van Stelling 2.1 niet zondermeer geldt. De omkering geldt wel als we meer gegevens toevoegen over X (compactheid) en de aard van de functierij (monotonie):

Stelling (*Stelling van Dini*) Zij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij van continue functies op een compacte metrische ruimte (X,d) die puntsgewijs naar een continue functie f convergeert zo dat $f_n(x) - f_{n+1}(x) \geq 0$ voor alle n en x of $f_n(x) - f_{n+1}(x) \leq 0$ voor alle n en x. Dan is de convergentie uniform op X.

Bewijs Het is voldoende om de stelling te bewijzen in het geval dat $f_n(x) - f_{n+1}(x) \geq 0$ en $f = 0$ (waarom?). Dus we nemen aan dat de functierij (f_n) monotoon zwak dalend is en puntsgewijs convergeert naar de nulfunctie. We moeten bewijzen dat deze convergentie uniform is op X. Stel dat de convergentie niet uniform is. Dan is er een $\varepsilon > 0$ zo dat $X_n := \{x \in X \mid f_n(x) \geq \varepsilon\}$ niet leeg is voor elke $n \in \mathbb{N}$. Kies voor elke $n \in \mathbb{N}$ een element $x_n \in X_n$. Omdat X compact is heeft de rij (x_n) een limietpunt x_0 in X (limiet van een convergente deelrij), zie syll. Topologie, Stelling 6.10. Als $m \leq n$ dan $f_m(x_n) \geq f_n(x_n) \geq \varepsilon$ vanwege de monotonie van de rij (x_n). Vanwege de continuïteit van f_m geldt dus dat ook $f_m(x_0) \geq \varepsilon$ voor alle $m \in \mathbb{N}$. Dus $0 = \lim_{m\to\infty} f_m(x_0) \geq \varepsilon$. Dit is een tegenspraak. $\square$

2.2 Het erven van integreerbaarheid

2.7 Ten behoeve van een erfelijkheidsstelling over Riemann-integreerbaarheid recapituleren we een paar zaken betreffende Riemann-integratie, zie syll. Analyse A3, Hst. 7. Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie.

- Een *partitie* is een verzameling $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ met $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

- $m_i := \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x), \quad M_i := \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x).$
- $\omega_i := M_i - m_i = \sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]} |f(x)-f(y)|.$
- $s(P) := \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \quad$ (*ondersom*).
- $S(P) := \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \quad$ (*bovensom*).
- $S(P) - s(P) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x_i - x_{i-1}).$
- $\sup_P s(P) \le \inf_P S(P).$
- De functie f heet *(Riemann)-integreerbaar* over $[a,b]$ als er in bovenstaande ongelijkheid gelijkheid geldt. Dan schrijven we

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sup_P s(P) = \inf_P S(P).$$

- f is integreerbaar desda er voor elke $\varepsilon > 0$ een partitie P bestaat zo dat $S(P) - s(P) < \varepsilon \quad$ (*criterium van Riemann*).
- Iedere continue functie op $[a,b]$ is integreerbaar.
- Als f integreerbaar is dan is $|f|\colon x\mapsto |f(x)|$ integreerbaar en

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le (b-a) \sup_{a\le x\le b} |f(x)|.$$

2.8 Stelling (*Erfelijkheidsstelling voor integreerbaarheid*)
Zij $[a,b]$ een begrensd interval. Zij $(f_n)_{n=1}^\infty$ een rij van integreerbare functies over $[a,b]$ die uniform convergeert naar een functie f. Dan is f integreerbaar over $[a,b]$ en

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2.1}$$

Bewijs Het eerste deel van de stelling bewijzen we eerst slechts onder de aanname dat alle f_n continu zijn (zie het bewijs voor het algemene geval in de paragraaf hieronder). Dan is f continu vanwege Stelling 2.1 en f is dus ook integreerbaar.

Voor het bewijs van (2.1) nemen we weer $\varepsilon > 0$. Vanwege de uniforme convergentie is er $N \in \mathbb{N}$ zo dat $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ voor alle x als $n \ge N$. Dus er geldt voor $n \ge N$ dat

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \le \varepsilon\,(b-a). \qquad \square$$

2.9 Nu geven we het bewijs van het eerste deel van Stelling 2.8 in het algemene geval. Zij $\varepsilon > 0$. Voor de integreerbaarheid van f moeten we een partitie P met $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ vinden zo dat

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f)\,(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon, \quad \text{waarbij} \quad \omega_i(f) := \sup_{t_1,t_2\in[x_{i-1},x_i]} |f(t_1) - f(t_2)|.$$

Zij P een willekeurige partitie met $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, zij $t_1, t_2 \in [x_{i-1}, x_i]$ en zij $n \in \mathbb{N}$ willekeurig. Dan

$$\begin{aligned} |f(t_1) - f(t_2)| &\leq |f(t_1) - f_n(t_1)| + |f_n(t_1) - f_n(t_2)| + |f_n(t_2) - f(t_2)| \\ &\leq 2 \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - f_n(x)| + \omega_i(f_n). \end{aligned}$$

Dus

$$\omega_i(f) \leq 2 \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - f_n(x)| + \omega_i(f_n),$$

dus

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\,(x_i - x_{i-1}) \leq 2(b-a) \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - f_n(x)| + \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f_n)\,(x_i - x_{i-1}).$$

Wegens de uniforme convergentie kunnen we een $n \in \mathbb{N}$ nemen zo dat $\sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Wegens de integreerbaarheid van f_n (voor de net gekozen n) kunnen we een partitie P nemen zo dat $\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f_n)\,(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$. Er volgt dat

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\,(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon\,(2(b-a) + 1).$$

Dus P is de bij de gegeven ε gezochte partitie. (Het is alleen een kosmetische zaak dat we op een constante maal ε i.p.v. ε zijn uitgekomen.) $\square$

2.10 Opmerking Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. We noemen de complexwaardige functie f *integreerbaar* over $[a,b]$ als $\operatorname{Re} f$ en $\operatorname{Im} f$ integreerbaar zijn over $[a,b]$ en we definiëren dan

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx$$

(zie syll. Analyse A3, §7.14). Dan blijven de uitspraken van Stelling 2.8 ook voor complexwaardige functies geldig.

2.11 Opgave Formuleer het analogon van Stelling 2.8 voor functiereeksen.

2.12 **Opmerking** Zij $\mathcal{R}([a,b])$ de (reële of complexe) lineaire ruimte van integreerbare functies over $[a,b]$. Dan is $\mathcal{R}([a,b])$ een lineaire deelruimte van $\mathcal{B}([a,b])$ (cf. §1.8). Zij ρ de sup-metriek. Dan kan Stelling 2.8 als volgt herformuleerd worden (zie ook syll. Topologie, §4.5, Voorbeeld 4):

Stelling (*verband Erfelijkheidsstelling met volledigheid van* $\mathcal{R}([a,b])$)
(a) $\mathcal{R}([a,b])$ is t.o.v. de metriek ρ een gesloten deelruimte van $\mathcal{B}([a,b])$.
(b) De metrische ruimte $(\mathcal{R}([a,b]), \rho)$ is volledig.
(c) De lineaire afbeelding $I\colon f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx\colon \mathcal{R}([a,b]) \to \mathbb{C}$ (of $\mathbb{R}$) is continu t.o.v. de metriek ρ.

2.13 Als $(f_n)_{n=1}^\infty$ een rij van integreerbare functies over $[a,b]$ is die puntsgewijs maar niet uniform convergeert naar een functie f, dan kunnen de volgende drie mogelijkheden alle voorkomen:

1. f is niet integreerbaar over $[a,b]$.
2. f is integreerbaar over $[a,b]$, maar (2.1) geldt niet.
3. f is integreerbaar over $[a,b]$ en (2.1) geldt.

We zullen voorbeelden van alle drie de gevallen geven.

2.14 Voorbeeld Er zijn aftelbaar oneindig veel rationale getallen in het interval $[0,1]$. Nummer ze als $r_1, r_2, \ldots$. Definieer de functie f_n op $[0,1]$ door

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{als } x = r_1, r_2, \ldots, r_n, \\ 0 & \text{voor andere waarden van } x. \end{cases}$$

Dan heeft de rij $(f_n)_{n=1}^\infty$ een puntsgewijze limiet f op $[0,1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor rationale } x, \\ 0 & \text{voor irrationale } x. \end{cases}$$

De convergentie is niet uniform (ga na). De functies f_n zijn alle Riemann-integreerbaar (continu op eindig veel punten na), terwijl f niet Riemann-integreerbaar is (voor alle partities P geldt dat $S(P) = 1$ en $s(P) = 0$).

Er kan nog opgemerkt worden dat de functie f wel Lebesgue-integreerbaar is (zie syll. Analyse A3, Opmerking 8.15): $f(x) = 0$ behalve op een aftelbare deelverzameling, dus behalve op een verzameling van Lebesgue-maat 0.

2.15 Voorbeeld Definieer functies f_n op $[0,1]$ door

$$f_n(x) := \begin{cases} n & \text{als } 0 < x \le n^{-1} \\ 0 & \text{als } x = 0 \text{ of } n^{-1} < x \le 1. \end{cases}$$

Dan heeft de rij $(f_n)_{n=1}^\infty$ een puntsgewijze limiet gegeven door $f(x) = 0$ $(0 \le x \le 1)$, maar de convergentie is niet uniform (ga na). Zowel alle f_n als f zijn Riemann-integreerbaar over $[0,1]$, maar (2.1) geldt niet (ga na).

2.16 Formule (2.1) kan voor het geval van Voorbeeld 2.15 gered worden door ook z.g. maten of zelfs z.g. distributies in het spel te brengen. We kunnen dan zeggen dat de limiet van f_n niet zondermeer 0 is, maar de z.g. *delta-functie* van Dirac: een gegeneraliseerde functie f die men zich simplistisch kan voorstellen als een functie die overal 0 is behalve in het punt 0, waar hij de waarde ∞ aanneemt en wel zodanig dat we $\int_0^1 f(x)\,dx$ gelijk aan 1 mogen stellen. Deze vage uitspraak kan op een indirecte manier precies worden gemaakt als volgt.

Opgave Zij f_n als boven. Bewijs dat voor elke continue functie g op $[0,1]$ geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, g(x)\, dx = g(0).$$

2.17 Voorbeeld Definieer functies f_n op $[0,1]$ door

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{als } 0 < x \le n^{-1} \\ 0 & \text{als } x = 0 \text{ of } n^{-1} < x \le 1. \end{cases}$$

Dan heeft de rij $(f_n)_{n=1}^\infty$ een puntsgewijze limiet gegeven door $f(x) = 0$ $(0 \le x \le 1)$, maar de convergentie is niet uniform (ga na). Zowel alle f_n als f zijn Riemann-integreerbaar over $[0,1]$ en (2.1) geldt (ga na).

2.18 **Opmerking** De theorie van de Lebesgue-integratie (cf. syll. Analyse A3, Opmerking 8.15) stelt ons een veel krachtiger stelling ter beschikking dan Stelling 2.8. Deze stelling staat bekend als de *Stelling van de gedomineerde convergentie* en luidt, toegespitst op het geval van Rieman-integreerbare functies, als volgt.
Zij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij van integreerbare functies over $[a,b]$ die puntsgewijs convergeert naar een integreerbare functie f. Neem aan dat er een (mogelijk oneigenlijk) integreerbare functie g bestaat over $[a,b]$ zo dat $|f_n(x)| \le g(x)$ $(x \in [a,b],\ n \in \mathbb{N})$. Dan geldt (2.1).

Deze stelling (voor het geval dat g constant is) gaat terug op Arzelà, 1885. Zie W. A. J. Luxemburg, "Arzelà's dominated convergence theorme for the Riemann integral", Amer. Math. Monthly 78 (1971), 970–979 voor de geschiedenis van deze stelling en een elementair bewijs (zonder Lebesgue-integratietheorie).

Opgave De zuinigst mogelijke g in de stelling van de gedomineerde convergentie wordt geleverd door $g(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|$. Bereken deze g in het geval van Voorbeelden 2.15 en 2.17 en bewijs dat g niet integreerbaar is in het geval van Voorbeeld 2.15 en wel in het geval van Voorbeeld 2.17.

2.3 Het erven van differentieerbaarheid

2.19 We bespreken we nu een erfelijkheidsstelling voor differentieerbaarheid. De formulering is niet zo eenvoudig als die voor continuïteit en voor integreerbaarheid. De gegevens gaan over uniforme convergentie van de rij van afgeleiden van f_n, terwijl voor de rij van functies f_n slechts convergentie in één speciaal punt gegeven hoeft te zijn.

Stelling (*Erfelijkheidsstelling voor differentieerbaarheid*)
Zij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij van differentieerbare functies op een begrensd interval $[a,b]$ (rechts differentieerbaar in a, links differentieerbaar in b). Neem aan dat de rij $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ van afgeleiden uniform convergeert op $[a,b]$, terwijl voor zekere $x_0 \in [a,b]$ geldt dat de getallenrij $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ convergeert. Dan convergeert de functierij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uniform op $[a,b]$ naar een differentieerbare functie f en $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$ op $[a,b]$. Als bovendien alle afgeleiden f_n' continu zijn dan is ook f' continu.

Bewijs We bewijzen de stelling eerst onder de verdere aanname dat de functies f_n reëelwaardig zijn en continue afgeleiden hebben. (Het bewijs in het algemene geval wordt in de volgende paragraaf gegeven.) Zij g de uniforme limiet van de rij (f_n'). Dan is g continu wegens Stelling 2.1. Wegens de Hoofdstelling van de integraalrekening (syll. Analyse A3, Stelling 7.24(b)) geldt er dat

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \quad (a \le x \le b). \tag{2.2}$$

Wegens Stelling 2.8 en de gegeven convergentie van de rij $(f_n(x_0))$ convergeert het rechterlid van (2.2) als $n \to \infty$, en dus ook het linkerlid. Schrijf $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Dan volgt uit (2.2) en Stelling 2.8 dat

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \quad (a \le x \le b). \tag{2.3}$$

Wegens de continuïteit van g volgt er met behulp van syll. Analyse A3, Stelling 7.24(a) dat f differentieerbaar is op $[a,b]$ met afgeleide g, dus $g = f'$. Er rest nog om te bewijzen dat de convergentie van (f_n) naar f uniform is. Hiertoe gebruiken we dat

$$|(f(x) - f_n(x)) - (f(a) - f_n(a))| \leq (x-a) \sup_{t \in [a,x]} |f'(t) - f_n'(t)|.$$

(cf. syll. Analyse A3, Prop. 3.36). Dus

$$|(f(x) - f_n(x))| \leq |f(a) - f_n(a)| + (b-a) \sup_{t \in [a,b]} |f'(t) - f_n'(t)|,$$

dus

$$\sup_{x \in [a,b]} |(f(x) - f_n(x))| \leq |f(a) - f_n(a)| + (b-a) \sup_{t \in [a,b]} |f'(t) - f_n'(t)|. \tag{2.4}$$

Pas nu toe dat (f_n') uniform naar f' convergeert en dat (f_n) puntsgewijs naar f convergeert. Daarom convergeert het rechterlid van (2.4) naar 0 voor $n \to \infty$, en dus ook het linkerlid. Dit levert de gevraagde uniforme convergentie. □

2.20 Nu zullen we het bewijs van Stelling 2.19 in het algemene geval geven. Bij het bewijs hebben we de middelwaardestelling nodig. Omdat we ook met complexwaardige functies willen werken gebruiken we de variant uit syll. Analyse B1, (5.2) van de middelwaardestelling. Op grond van syll. Analyse B1, Prop. 5.4 is deze variant ook geldig voor complexwaardige functies.

Bewijs Laat $y \in [a,b]$. Definieer de hulpfuncties

$$\phi_{y,n}(x) := \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(y)}{x-y}, & x \in [a,b], x \neq y, \\ f_n'(y), & x = y. \end{cases}$$

Omdat f_n differentieerbaar is, is de functie $\phi_{y,n}$ continu op $[a,b]$. We zullen bewijzen dat de functierij $(\phi_{y,n})_{n=1}^{\infty}$ aan de uniforme Cauchy-voorwaarde voldoet. Door toepassing van de middelwaardestelling (syll. Analyse B1, Prop. 5.4) op de differentieerbare functie $f_n - f_m$ vinden we dat, voor $x \neq y$,

$$|\phi_{y,n}(x) - \phi_{y,m}(x)| = \left| \frac{(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)}{x-y} \right| \leq |(f_n - f_m)'(\xi_{x,y})| \tag{2.5}$$

voor zekere $\xi_{x,y}$ tussen x en y gelegen. Voor $x = y$ hebben we

$$\phi_{y,n}(y) - \phi_{y,m}(y) = (f_n - f_m)'(y). \tag{2.6}$$

Zij $\varepsilon > 0$. Omdat de functierij $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ uniform convergeert op $[a,b]$ bestaat er $N \in \mathbb{N}$ zo dat voor alle $z \in [a,b]$ geldt dat $|f_n'(z) - f_m'(z)| < \varepsilon$ als $n, m \geq N$. Dus wegens (2.5) en (2.6) geldt dan ook voor alle $x \in [a,b]$ dat $|\phi_{y,n} - \phi_{y,m}(x)| < \varepsilon$ als $n, m \geq N$. Dus de functierij $(\phi_{y,n})_{n=1}^{\infty}$ convergeert uniform op $[a,b]$ naar een zekere functie ϕ_y. Omdat de functies $\phi_{y,n}$ continu zijn, is ook ϕ_y continu op $[a,b]$.

Voor alle $x \in [a,b]$ geldt de identiteit

$$f_n(x) = (x - x_0)\,\phi_{x_0,n}(x) + f_n(x_0).$$

Omdat de functie $x \mapsto x - x_0$ begrensd is op $[a,b]$, de functierij $(\phi_{y,n})_{n=1}^{\infty}$ uniform convergeert op $[a,b]$, en de getallenrij $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ convergeert, convergeert de rij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uniform op $[a,b]$ (ga na) naar een zekere limietfunctie f.

Voor $x \neq y$ geldt dat

$$\phi_y(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_{y,n}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}\,.$$

Voor $x = y$ geldt enerzijds

$$\phi_y(y) = \lim_{n\to\infty} \phi_{y,n}(y) = \lim_{n\to\infty} f_n'(y),$$

anderzijds, wegens de continuïteit van ϕ_y,

$$\phi_y(y) = \lim_{x\to y} \phi_y(x) = \lim_{x\to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}\,.$$

Dus f is differentieerbaar in y en $f'(y) = \lim_{n\to\infty} f_n'(y)$.

Tenslotte, als de functies f_n' bovendien continu zijn, dan is f' ook continu omdat de functiereeks $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ uniform convergeert. $\square$

2.21 Opmerking Als de aanname in Stelling 2.19 over de convergentie van de rij $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ voor zekere x_0 zou worden weggelaten dan zou de uniforme of zelfs puntsgewijze convergentie van de functierij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ niet gegarandeerd zijn. Immers, neem een niet convergente getallenrij $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ en definieer $g_n(x) := f_n(x) + c_n$. Als $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ aan de overige gegevens van Stelling 2.19 voldoet dan geldt dit ook voor $(g_n)_{n=1}^{\infty}$, maar de twee functierijen kunnen niet allebei puntsgewijs convergeren op $[a,b]$.

Anderzijds, als een gegeven functierij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ aan de overige gegevens van Stelling 2.19 voldoet en als we, voor zekere $x_0 \in [a,b]$ definiëren dat $g_n(x) := f_n(x) - f_n(x_0)$, dan voldoet $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ aan alle gegevens van Steling 2.19.

2.22 Opgave Formuleer het analogon van Stelling 2.19 voor functiereeksen.

2.23 Opgave Zij I een mogelijk onbegrensd interval. Zij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij van differentieerbare functies op I zo dat voor elk gesloten begrensd deelinterval $[a,b] \subset I$ aan de gegevens van Stelling 2.19 voldaan is. Bewijs dat de functierij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ puntsgewijs convergeert op I naar een differentieerbare functie f en dat $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$ puntsgewijs op I.

2.24 We geven nu twee voorbeelden van een rij $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ van differentieerbare functies op $\mathbb{R}$ die uniform convergeert op $\mathbb{R}$ naar een limietfunctie f, maar zo dat f òf niet overal differentieerbaar is òf f wel differentieerbaar is, maar niet $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$ puntsgewijs op $\mathbb{R}$. In beide voorbeelden zijn er noodzakelijkerwijs gesloten begrensde intervallen $[a,b]$ te vinden waarop de functierij $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ niet uniform convergeert.

Voorbeeld Zij $f_n(x) := \sqrt{x^2 + n^{-2}}$ $(x \in \mathbb{R})$. Dan is f_n continu differentieerbaar op $\mathbb{R}$ en $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = |x|$, dus f is niet differentieerbaar in 0 (wel links en rechts differentieerbaar). Ga na dat $(f_n)_{n=1}^\infty$ uniform convergeert op $\mathbb{R}$, maar dat $(f_n')_{n=1}^\infty$ niet uniform convergeert op enig interval $[-a, a]$ $(a > 0)$.

2.25 Voorbeeld Zij $f_n(x) := n^{-1} \arctan(nx)$ $(x \in \mathbb{R})$. Dan is f_n continu differentieerbaar op $\mathbb{R}$ en $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, dus f is differentieerbaar op $\mathbb{R}$, maar $f_n'(0) = 1$, dus $f'(0) \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(0)$. Ga na dat $(f_n)_{n=1}^\infty$ uniform convergeert op $\mathbb{R}$, maar dat $(f_n')_{n=1}^\infty$ niet uniform convergeert op enig interval $[-a, a]$ $(a > 0)$.

Een soortgelijk voorbeeld kan algemener gegeven worden met $f_n(x) := n^{-1} g(nx)$, waarbij g een begrensde continu differentieerbare functie is op $\mathbb{R}$ en $g'(0) = 1$.

2.26 **Opgave** (*verband Erfelijkheidsstelling met volledigheid van $C^1([a, b])$*)
Zij $C^1([a, b])$ de vectorruimte van continu differentieerbare functies op $[a, b]$. Bewijs dat dit een genormeerde vectorruimte wordt wanneer we een norm $||\,.\,||$ definiëren door

$$||f|| := \sup_{a\le x\le b} |f(x)| + \sup_{a\le x\le b} |f'(x)| \quad (f \in C^1([a, b])).$$

Bewijs met behulp van Stelling 2.19 dat deze genormeerde vectorruimte ruimte volledig is.

2.4 Machtreeksen

2.27 In hoofdstuk 1 hebben we uniforme convergentie van functiereeksen $\sum_{n=1}^\infty f_n$ op een verzameling X behandeld. Uiteraard doet de ondergrens van de sommatie hierbij niet zo ter zake. Als $n_0 \in \mathbb{Z}$ dan zeggen we dat de functiereeks $\sum_{n=n_0}^\infty f_n$ uniform convergeert op X als de functierij $(s_n)_{n=1}^\infty$ uniform convergeert op X, waarbij $s_n(x) := \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} f_k(x)$.

We zeggen dat een functiereeks $\sum_{n=n_0}^\infty f_n$ op X *uniform absoluut op X convergeert* als de functiereeks $\sum_{n=n_0}^\infty |f_n|$ uniform op X convergeert, waarbij $|f_n|(x) := |f_n(x)|$. Merk op dat de gegevens van de Weierstrass-toets (cf. Propositie 1.26) uniforme absolute convergentie impliceren en dat uniforme absolute convergentie op haar beurt weer uniforme convergentie impliceert.

2.28 Machtreeksen werden behandeld in syll. Analyse A3, §5.25–5.35. We brengen het volgende resultaat in herinnering. Er is een unieke R $(0 \le R \le \infty)$ zo dat de *machtreeks* $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ absoluut convergeert voor $|z| < R$ en divergeert voor $|z| > R$. Deze R, die bekend straat als de *convergentiestraal* van de machtreeks, wordt gegeven door

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \right)^{-1}.$$

Bijvoorbeeld, de machtreeksen $\sum_{n=0}^\infty z^n/n!$, $\sum_{n=0}^\infty z^n$ en $\sum_{n=0}^\infty n!\, z^n$ hebben convergentiestraal ∞, 1 en 0, respectievelijk.

De volgende stelling is een mooie en belangrijke toepassing van de verschillende erfelijkheidsstellingen op het geval van convergente machtreeksen. De onderdelen (b) en (c) werden echter reeds eerder op andere wijze bewezen in syll. Analyse A3, §5.31, 5.32. In de formulering gebruiken we de notatie $B_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ en $\overline{B_r(a)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \le r\}$ voor open en gesloten schijven in $\mathbb{C}$.

Stelling (*implicaties van de erfelijkheidsstellingen voor machtreeksen*)
Zij

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n \quad (z \in B_R(0)), \tag{2.7}$$

waarbij R de convergentiestraal van de machtreeks in het rechter lid is. Dan geldt:
(a) Als $0 \leq R_1 < R$ dan convergeert de machtreeks in (2.7) uniform absoluut op $\overline{B_{R_1}(0)}$.
(b) f is continu op $B_R(0)$.
(c) f is een C^∞-functie op het interval $(-R, R)$. Ook geldt, voor $x \in (-R, R)$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n\, x^{n-k}, \quad f^{(k)}(0) = k!\, a_k.$$

(d) Als $[a, b] \subset (-R, R)$ dan is f integreerbaar over $[a, b]$. Als $x \in (-R, R)$ dan

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, x^{n+1}}{n+1}.$$

Bewijs (a) De reeks $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, R_1^n$ convergeert en $|a_n\, z^n| \leq |a_n|\, R_1^n$ als $|z| \leq R_1$. Pas nu de Weierstrass-toets toe (cf. Propositie 1.26 en §2.27).

(b) Dit volgt direct uit Stelling 2.1 en Opmerking 2.4.

(c) Er geldt $\frac{d}{dx}(a_n\, x^n) = n\, a_n\, x^{n-1}$ en de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1}$, ook te schrijven als $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, z^n$, heeft wederom convergentiestraal R. Pas nu Stelling 2.19 en Opgaven 2.22 en 2.23 toe om het resultaat voor f' te verkrijgen. Iteratie geeft het resultaat voor $f^{(k)}$.

(d) Dit volgt direct uit Stelling 2.8 en Opgave 2.11. □

Het zal bij het college Functietheorie blijken dat onderdeel (c) geldig blijft op $B_R(0)$ wanneer we met complexe differentiatie werken.

Verdere vraagstukken

V2.1 Bewijs dat $\displaystyle\lim_{x \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n^3 x^2}}{2^n} = 2.$

V2.2 Toon aan dat $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^3}.$

V2.3 Bereken: a) $\displaystyle\int_1^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right) dx,$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, \sin nx}{e^n} \right) dx.$

V2.4 Zij $f_n(x) := x^n(1-x)$ $(n = 1, 2, \ldots$ en $x \in [0, 1])$.
a) Bewijs dat $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ niet uniform convergeert op $[0, 1]$.
b) Geldt $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$?

V2.5 Zij $f_n(x) := \dfrac{n-1}{x^n}$ $\quad (n = 1, 2, \ldots$ en $x \geq 1)$.

Bestaan $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty f_n(x)\, dx$ en $\displaystyle\int_1^\infty \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\, dx$?
Zo ja, zijn ze gelijk?

V2.6 Zij $f(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3 + n^4 x^2}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$.

Bewijs dat $f'(x) = -2x \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n + n^2 x^2)^2}$.

V2.7 Zij $f_n(x) := 2nx\, e^{-nx^2}$ $\quad (n = 1, 2, \ldots$ en $x \in \mathbb{R})$.

a) Bewijs dat voor elke $\delta > 0$ geldt dat $\sum_{n=1}^\infty f_n$ uniform convergeert op $[\delta, \infty)$.
b) Bereken $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$.

V2.8 Zij $f_n(x) := (-1)^n \dfrac{1}{n^x}$. Bewijs dat $\sum_{n=1}^\infty f_n$ continu en differentieerbaar is op $(0, \infty)$.

V2.9 Zij $f_n(x) := \dfrac{nx^2}{n^3 + x^3}$.

a) Bewijs dat $\sum_{n=1}^\infty f_n$ niet uniform convergeert op $[0, \infty)$.
b) Bewijs dat $\sum_{n=1}^\infty f_n$ continu is op $[0, \infty)$.

V2.10 Als Vraagstuk V2.9 met $f_n(x) := \dfrac{nx}{n^3 + x^3}$.

V2.11 Definieer de functies $f_n\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ door $f_n(x) := (n + x)^{-2} \sin(nx)$ $(x \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N})$.

a) Bewijs dat de functiereeks $\sum_{n=1}^\infty f_n$ op $[0, \infty)$ puntsgewijs convergeert op $[0, \infty)$ en schrijf de somfunctie als $f(x) := \sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ $(x \in [0, \infty))$.
b) Bewijs dat $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continu is.

3 Stellingen van de inverse en de impliciete functie

3.1 Stelling van de inverse functie

3.1 Zij $[c, d]$ een eindig interval en $f: [c, d] \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie (rechts differentieerbaar in c en links differentieerbaar in d). Neem aan dat $f'(x) > 0$ voor alle $x \in [c, d]$. Dan is f monotoon stijgend op $[c, d]$, dus f beeldt het interval $[c, d]$ bijectief af op het interval $[f(c), f(d)]$. Dan heeft f een inverse functie g, gedefinieerd op $[f(c), f(d)]$, en g is differentieerbaar met afgeleide

$$g'(y) = (f'(g(y))^{-1} \quad (f(c) \le y \le f(d)). \tag{3.1}$$

Een soortgelijke conclusie (met dalend i.p.v. stijgend) kan worden getrokken als $f'(x) < 0$ op $[c, d]$. Deze zaken worden bekend verondersteld.

Neem nu aan dat $I \subset \mathbb{R}$ een open interval is en $f: I \to \mathbb{R}$ een C^1-functie en dat $f'(a) \neq 0$ voor een zekere $a \in I$. Voor het gemak nemen we aan dat $f'(a) > 0$; een soortgelijke redenering zal gelden als $f'(a) < 0$. Nu zal er een open interval U om a bestaan en een open interval V om $f(a)$ zo dat f het interval U bijectief op V afbeeldt en de inverse functie $g: V \to U$ van $f: U \to V$ ook een C^1-functie is.

Het bewijs is gemakkelijk. Omdat f' continu is en $f'(a) > 0$, kunnen we een begrensd open interval (c, d) om a kiezen zo dat het gesloten interval $[c, d]$ nog binnen I ligt en $f'(x) > 0$ als $x \in [c, d]$. Dan beeldt f het interval $[c, d]$ monotoon af op het interval $[f(c), f(d)]$, dus f beeldt ook het open interval (c, d) monotoon af op het open interval $(f(c), f(d))$ (dat $f(a)$ bevat). Er volgt nu uit (3.1) dat de inverse functie g van f een C^1-functie is.

We zien dus dat het niet nul zijn van $f'(a)$ *lokale* inverteerbaarheid van f in een omgeving van a impliceert.

3.2 Zij nu $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ en $a, b \in \mathbb{R}^n$. Bekijk de affiene afbeelding $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gedefinieerd door

$$f(x) := b + A\,(x - a) \quad (x \in \mathbb{R}^n). \tag{3.2}$$

Dan geldt dat $f(a) = b$ en $f'(x) = A$. Als de lineaire afbeelding A inverteerbaar is dan is f inverteerbaar met inverse $g(y) = A^{-1}(y - b) + a$. De afbeelding f is dan dus *globaal* inverteerbaar.

Als echter $E \subset \mathbb{R}^n$ open en $f: E \to \mathbb{R}^n$ een C^1-functie is maar niet noodzakelijk affien, en als $a \in E$, $b := f(a)$ en $A := f'(a)$, dan geldt er een gestoorde variant van (3.2):

$$f(x) = b + A\,(x - a) + o(|x - a|) \quad \text{als } x \to a \text{ in } E.$$

Naar analogie met het affiene geval is het plausibel om te veronderstellen dat inverteerbaarheid van A lokale inverteerbaarheid van f rond a impliceert. Dit zal inderdaad bewezen kunnen worden in de z.g. stelling van de inverse functie.

Een laatste aanwijzing voor de rol die inverteerbaarheid van $f'(a)$ speelt bij lokale inverteerbaarheid van f rond a wordt gegeven door de uitspraak van syll. Analyse B1, Opgave 3.5(b): Als f lokaal inverteerbaar is rond a met als inverse een C^1-functie g dan volgt uit $(g \circ f)(x) = x$ dat $g'(f(a))\, f'(a) = I$, dus $f'(a)$ is inverteerbaar.

3.3 De *contractiestelling van Banach* (zie hieronder) werd behandeld in syll. Topologie, Stelling 5.7. Deze stelling levert een belangrijk stuk gereedschap voor de Analyse. Zodadelijk zullen we hem gebruiken in het bewijs van de stelling van de inverse functie.

Definitie Zij (X,d) een metrische ruimte. Een afbeelding $\phi\colon X \to X$ heet een *contractie* als er een constante C bestaat met $0 \le C < 1$ zo dat

$$d(\phi(x),\phi(y)) \le C\,d(x,y) \quad (x,y \in X).$$

Een punt $x \in X$ heet een *dekpunt* van ϕ als $\phi(x) = x$.

Stelling (*contractiestelling van Banach*) Zij (X,d) een volledige metrische ruimte en zij $\phi\colon X \to X$ een contractie. Dan heeft ϕ precies één dekpunt in X.

Lees het bewijs van deze stelling nog eens door in syll. Topologie.

3.4 Als $a \in \mathbb{R}^n$ en $r > 0$ dan noteren we

$$B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| < r\}, \quad \overline{B_r(a)} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| \le r\},$$

voor de open resp. gesloten bal in $\mathbb{R}^n$ met straal r en middelpunt a.

Stelling (*stelling van de inverse functie*) Zij $a \in E \subset \mathbb{R}^n$ met E open, zij $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ een C^1-afbeelding en zij de lineaire afbeelding $f'(a)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ inverteerbaar. Dan is er een open omgeving U van a in E en een open omgeving V van $f(a)$ in $\mathbb{R}^n$ zo dat:
(a) f beeldt de verzameling U bijectief op de verzameling V af.
(b) De inverse $g\colon V \to U$ van $f\colon U \to V$ is een C^1-afbeelding met afgeleide

$$g'(y) = (f'(g(y)))^{-1} \quad (y \in V). \tag{3.3}$$

Bewijs Na wat voorbereidingen, waarin we de open omgeving U van a al kiezen, geven we het bewijs in vier stappen. In Stap 1 bewijzen we dat f op U injectief is. In Stap 2 bewijzen we dat $V := f(U)$ open is in $\mathbb{R}^n$. Bij deze stap wordt de contractiestelling toegepast. In Stap 3 bewijzen we dat de inverse afbeelding g van f op V differentieerbaar is met afgeleide als boven gegeven. In stap 4 bewijzen we dat g' continu is op V. Vanaf het begin wordt gebruikt dat f differentieerbaar is op een omgeving van a en dat f' continu is in a. Maar pas in Stap 4 wordt gebruikt dat f' continu is op een omgeving van a.

Schrijf $b := f(a)$ en $A := f'(a)$. Dus A is een inverteerbare lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^n$. Definieer de hulpfunctie

$$\phi_0(x) := x - A^{-1}f(x) \quad (x \in E).$$

Dit is een C^1-functie. Dan:

$$\phi_0'(x) = I - A^{-1}\,f'(x) \quad (x \in E), \qquad \phi_0'(a) = 0. \tag{3.4}$$

Omdat $\phi_0'\colon E \to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ continu is in a, bestaat er $r > 0$ zo dat $B_r(a) \subset E$ en

$$\|\phi_0'(x)\| \le \tfrac{1}{2} \quad \text{als} \quad x \in B_r(a). \tag{3.5}$$

Neem $U := B_r(a)$ voor deze r.

Stap 1. Er geldt dat:

(i) $|\phi_0(x_1) - \phi_0(x_2)| \leq \frac{1}{2}\,|x_1 - x_2|$ voor alle $x_1, x_2 \in U$.
(ii) Er is een $C > 0$ zo dat $|f(x_1) - f(x_2)| \geq C\,|x_1 - x_2|$ voor alle $x_1, x_2 \in U$.
(iii) $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ is injectief.
(iv) $f'(x)$ is inverteerbaar voor alle $x \in U$.

Uitspraak (i) volgt met behulp van syll. Analyse B1, Prop. 5.4, vanwege (3.5) en het feit dat U open en convex is. De ongelijkheid in (i) kan worden herschreven als

$$|x_1 - x_2 - A^{-1}\,(f(x_1) - f(x_2))| \leq \tfrac{1}{2}\,|x_1 - x_2| \quad (x_1, x_2 \in U).$$

Dus voor $x_1, x_2 \in U$ geldt dat

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|\,|f(x_1) - f(x_2)| &\geq |A^{-1}\,(f(x_1) - f(x_2))| \\ &\geq |x_1 - x_2| - |x_1 - x_2 - A^{-1}\,(f(x_1) - f(x_2))| \\ &\geq |x_1 - x_2| - \tfrac{1}{2}|x_1 - x_2| = \tfrac{1}{2}\,|x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

Dus uitspraak (ii) geldt voor $C := 1/(2\|A^{-1}\|)$. Uitspraak (iii) volgt onmiddellijk uit (ii). Voor het bewijs van (iv) laten we zien dat, als $x \in U$, de lineaire afbeelding $f'(x)$ nulruimte $\{0\}$ heeft. Zij $x \in U$, en zij $h \in \mathbb{R}^n$ zo dat $f'(x)\,h = 0$. Dan volgt uit (3.4) dat $\phi_0'(x)\,h = h$. Dus $|h| \leq \|\phi_0'(x)\|\,|h| \leq \frac{1}{2}\,|h|$, dus $h = 0$.

Stap 2. Schrijf $V := f(U)$. We bewijzen nu:

(v) De verzameling V is open in $\mathbb{R}^n$.

Daarmee zal onderdeel (a) van de Stelling bewezen zijn.

Als hulpmiddel bij het bewijs van (v) definiëren we voor elke $y \in \mathbb{R}^n$ een hulpfunctie

$$\phi_y(x) := \phi_0(x) + A^{-1}\,y = x + A^{-1}\,(y - f(x)) \quad (x \in E). \tag{3.6}$$

Dan volgt er uit (i) dat

$$|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)| \leq \tfrac{1}{2}\,|x_1 - x_2| \quad \text{voor alle } x_1, x_2 \in U. \tag{3.7}$$

We zien uit (3.6) dat

$$|\phi_y(x) - x| = |(A^{-1}\,(y - f(x))| \leq \|A^{-1}\|\,|y - f(x)|. \tag{3.8}$$

Merk ook op uit (3.6) dat, voor gegeven $y \in \mathbb{R}^n$, geldt:

$$\phi_y(x) = x \Longleftrightarrow f(x) = y.$$

Zij x_0 willekeurig in U. Dan is $y_0 := f(x_0)$ willekeurig in V. We willen bewijzen dat y_0 een inwendig punt van V is. Omdat x_0 een inwendig punt van U is, kunnen we $\rho > 0$ kiezen zo dat $\overline{B_\rho(x_0)} \subset U$. Nu kunnen we het volgende bewijzen:

(vi) Als $|y - y_0| < \rho/(2\|A^{-1}\|)$ dan $\phi_y(\,\overline{B_\rho(x_0)}\,) \subset \overline{B_\rho(x_0)}$.

Want, laat $|x - x_0| \leq \rho$ en $|y - y_0| < \rho/(2\|A^{-1}\|)$. Dan

$$\begin{aligned}|\phi_y(x) - x_0| &\leq |\phi_y(x) - \phi_y(x_0)| + |\phi_y(x_0) - x_0| \\ &\leq \tfrac{1}{2}\,|x - x_0| + \|A^{-1}\|\,|y - y_0| \leq \rho,\end{aligned}$$

waarbij we in de tweede ongelijkheid formules (3.7) en (3.8) toepasten. Dit bewijst (vi).

Voor de in (vi) beschouwde waarden van y geldt dat ϕ_y een contractie is van de volledige (want gesloten en begrensde) metrische ruimte $\overline{B_\rho(x_0)}$. Wegens Stelling 3.3 moet ϕ_y dan een uniek dekpunt x hebben in $\overline{B_\rho(x_0)}$, dus $f(x) = y$ voor deze x. Dan hebben we dus een open omgeving van y_0 in $\mathbb{R}^n$ gevonden die geheel in $f(U)$ ligt. Daarmee is (v) bewezen.

Stap 3. Op grond van (a) bestaat er een unieke afbeelding $g\colon V \to U$ zo dat $g(f(x)) = x$ als $x \in U$. We bewijzen nu:

(vii) Zij $x_0 \in U$, $y_0 := f(x_0) \in V$. Dan is g differentieerbaar in y_0 met afgeleide $g'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$, m.a.w.,

$$\lim_{y \to y_0} \frac{|g(y) - g(y_0) - (f'(x_0))^{-1}\,(y - y_0)|}{|y - y_0|} = 0. \tag{3.9}$$

We gebruiken bij het bewijs uitspraken (ii) en (iv). Uitspraak (iv) is al nodig om uitspraak (vii) zinvol te maken. Er geldt dat

$$\begin{aligned}|g(y) - g(y_0) - (f'(x_0))^{-1}\,(y - y_0)| &= |-(f'(x_0))^{-1}\,(y - y_0 - f'(x_0)\,(g(y) - g(y_0)))| \\ &= |(f'(x_0))^{-1}\,(f(g(y)) - f(x_0) - f'(x_0)\,(g(y) - x_0))| \\ &\leq \|(f'(x_0))^{-1}\|\,|f(g(y)) - f(x_0) - f'(x_0)\,(g(y) - x_0)|\end{aligned}$$

en (wegens (ii))

$$|y - y_0| = |f(g(y)) - f(x_0)| \geq C\,|g(y) - x_0|.$$

Dus

$$\frac{|g(y) - g(y_0) - (f'(x_0))^{-1}\,(y - y_0)|}{|y - y_0|} \leq \frac{\|(f'(x_0))^{-1}\|}{C}\,\frac{|f(g(y) - f(x_0) - f'(x_0)\,(g(y) - x_0)|}{|g(y) - x_0|}. \tag{3.10}$$

Zij $\varepsilon > 0$. Omdat f differentieerbaar is in x_0 kunnen we een $\delta > 0$ kiezen zo dat:

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow x \in U \;\&\; \frac{|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0)|}{|x - x_0|} < \varepsilon. \tag{3.11}$$

Omdat, wegens (ii), voor $y \in V$ geldt dat

$$|y - y_0| = |f(g(y)) - f(x_0)| \geq C\,|g(y) - x_0|,$$

kunnen we een $\gamma > 0$ kiezen zo dat

$$|y - y_0| < \gamma \Longrightarrow y \in V \;\&\; |g(y) - x_0| < \delta.$$

In combinatie met (3.11) en (3.10) zien we dus dat, als $|y - y_0| < \gamma$ dan

$$\frac{|g(y) - g(y_0) - (f'(x_0))^{-1}\,(y - y_0)|}{|y - y_0|} < \frac{\|(f'(x_0))^{-1}\|\,\varepsilon}{C}.$$

Dit bewijst (3.9).

Stap 4 We bewijzen tenslotte:

(viii) $g'\colon V \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ is continu.

Voor het bewijs vatten we g' op als een samenstelling van drie afbeeldingen. Eerst een intermezzo.

Zij $GL(\mathbb{R}^n) := \{T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \mid T \text{ is inverteerbaar}\}$. Dan is $GL(\mathbb{R}^n)$ open in $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, want $GL(\mathbb{R}^n) = \det^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, de afbeelding $\det\colon L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ is continu (want $\det T$ is polynomiaal in de matrixelementen van T), en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ is open in $\mathbb{R}$. Nu is de afbeelding $T \mapsto T^{-1}\colon GL(\mathbb{R}^n) \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ continu, want, volgens een bekende formule uit de lineaire algebra, geldt er dat

$$(T^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det T_{(ji)}}{\det T} \quad (T \in GL(\mathbb{R}^n)), \tag{3.12}$$

waarbij $T_{(ij)}$ gedefinieerd is als de $(n-1) \times (n-1)$-matrix verkregen uit de $n \times n$-matrix $(T_{kl})_{k,l=1,\ldots,n}$ door de i-de rij en de j-de kolom uit deze matrix weg te schrappen. Dus $(T^{-1})_{ij}$ is een quotient van twee polynomen in de matrixelementen $T_{11}, \ldots, T_{nn}$ van T, terwijl de noemer niet 0 wordt voor $T \in GL(\mathbb{R}^n)$. Dus $T \mapsto (T^{-1})_{ij}$ is een continue afbeelding.

We schrijven nu de afbeelding $g'\colon y \mapsto (f'(g(y)))^{-1}\colon V \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ als

$$y \mapsto g(y) \mapsto f'(g(y)) \mapsto (f'(g(y)))^{-1}\colon V \xrightarrow{g} U \xrightarrow{f'} GL(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{T \mapsto T^{-1}} L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Alle drie de samenstellende afbeeldingen zijn continu: g is continu omdat g differentieerbaar is, f' is continu omdat f C^1 is en $T \mapsto T^{-1}$ is continu zoals we boven zagen. Dus g' is continu. Dit bewijst uitspraak (viii). □

3.5 Opgave Zij $E \subset \mathbb{R}^n$ open en zij $a \in E$. Zij $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ differentieerbaar. zo dat f' continu is in a en $f'(a)$ inverteerbaar is. Bewijs dat er voor elke twee constanten C_1, C_2 met $0 < C_1 < \|(f'a))^{-1}\|^{-1}$ en $C_2 > \|f'(a)\|$ een open omgeving U van a in E te vinden is zo dat

$$C_1\,|x_1 - x_2| \le |f(x_1) - f(x_2)| \le C_2\,|x_1 - x_2| \quad \text{als} \quad x_1, x_2 \in U.$$

Aanwijzing Voor het bewijs van de eerste ongelijkheid kan het bewijs van (i) in Stelling 3.4 wat gevarieerd worden.

3.6 Definitie Zij $E \subset \mathbb{R}^n$ open en $f\colon E \to \mathbb{R}^n$. Als f differentieerbaar is in een punt x van E dan is de *Jacobiaan* van f in x (notatie $J_f(x)$) gedefinieerd door

$$J_f(x) := \det f'(x) = \begin{vmatrix} (D_1 f_1)(x) & \ldots & (D_n f_1)(x) \\ \vdots & & \vdots \\ (D_1 f_n)(x) & \ldots & (D_n f_n)(x) \end{vmatrix}.$$

Dus $f'(x)$ is inverteerbaar desda $J_f(x) \neq 0$.

3.7 Definitie Laten U en V open deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}^n$. Zij $f\colon U \to V$ een bijectieve afbeelding. Noteer de inverse afbeelding van f als $g\colon V \to U$.

(a) De afbeelding f heet een *homeomorfisme* (van U op V) als $f\colon U \to V$ en $g\colon V \to U$ beide continu zijn.

(b) De afbeelding f heet een *diffeomorfisme* (van U op V) als $f\colon U \to V$ en $g\colon V \to U$ beide C^1 zijn.

(c) Als f en g beide C^p zijn dan noemen we f een C^p-*diffeomorfisme*.

3.8 Als onmiddellijk gevolg van Stelling 3.4 verkrijgen we het volgende resultaat.

Stelling Zij $E \subset \mathbb{R}^n$ open. Zij $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ een C^1-afbeelding zo dat $f'(x)$ inverteerbaar is voor alle $x \in E$.
(a) Dan is $f(E)$ open in $\mathbb{R}^n$.
(b) Als bovendien f injectief is dan is de inverse afbeelding $g\colon f(E) \to E$ van f een C^1-afbeelding, dus f is een diffeomorfisme.

Het is interessant om deze Stelling te vergelijken met een stelling van L. E. J. Brouwer: Zij $E \subset \mathbb{R}^n$ open en $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ continu en injectief. Dan is $f(E)$ open in $\mathbb{R}^n$ en f is een homeomorfisme. Zie L. E. J. Brouwer, *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl*, Math. Ann. 70 (1911), 161–165, ook opgenomen in Brouwer's Collected Works, Vol. 2, pp. 430–434.

3.9 Stelling 3.8(b) heeft het volgende analogon voor C^p-afbeeldingen ($1 \le p \le \infty$). Vooral het geval $p = \infty$ is van belang.

Stelling Zij $E \subset \mathbb{R}^n$ open. Zij $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ een injectieve C^p-afbeelding zo dat $f'(x)$ inverteerbaar is voor alle $x \in E$. Dan is f een C^p-diffeomorfisme.

Bewijs We geven alleen een schets van het bewijs. Zij $g\colon f(E) \to E$ de inverse van f. Er volgt uit (3.3) en (3.12) dat

$$(D_j g_i)(y) = \frac{(-1)^{i+j} \det(f'(g(y))_{(ji)}}{\det f'(g(y))} \,. \tag{3.13}$$

Als f een C^2-afbeelding is, dan volgt uit (3.13) met behulp van de kettingregel dat $(D_{kj} g)(y)$ bestaat en gelijk is aan

$$(D_{kj} g)(y) = \frac{P(y)}{(\det f'(g(y)))^2} \,,$$

waarbij $P(y)$ een polynoom is in $(D_{rs} f_t)(g(y))$, $(D_s f_t)(g(y))$ en $(D_s g_t)(y)$ $(r, s, t = 1, \ldots, n)$. Dit impliceert dat $D_{kj} g$ continu is. Dus g is een C^2-afbeelding. Met volledige inductie naar p kan men dan op een soortgelijke manier het geval van algemene p bewijzen.

3.10 Voor een concreet gegeven C^1-afbeelding $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ (E open in $\mathbb{R}^n$) kunnen we lokale inverteerbaarheid rond een punt $a \in E$ van f nagaan met behulp van de stelling van de inverse functie. Als we echter ook globale inverteerbaarheid willen bewijzen met behulp van Stelling 3.8(b) dan is het niet voldoende om de inverteerbaarheid van $f'(x)$ ($x \in E$) na te gaan. We moeten dan de globale injectiviteit van f met andere middelen nagaan. In concreto kunnen we voor elke $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ alle oplossingen $x = (x_1, \ldots, x_n)$ in E van het stelsel van n vergelijkingen $f_i(x_1, \ldots, x_n) = y_i$ ($i = 1, \ldots, n$) bepalen. De punten y waarvoor de oplossingsverzameling niet leeg is vormen het beeld $f(E)$ van E. Als er voor iedere $y \in \mathbb{R}^n$ hoogstens één oplossing is dan hebben we de globale injectiviteit van f bewezen. De gevonden oplossing x bij gegeven y is dan $g(y)$, waarbij g de inverse is van f.

3.2 Stelling van de impliciete functie

3.11 Ter inleiding op de stelling van de impliciete functie bekijken we voor een gegeven C^1-afbeelding $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de vergelijking

$$f(x,y) = 0. \tag{3.14}$$

We willen deze vergelijking oplossen door x als functie van y te geven, d.w.z. door een op zijn minst continue functie $g\colon I \to \mathbb{R}$ op zeker open interval I in $\mathbb{R}$ te vinden zo dat

$$f(g(y),y) = 0 \quad (y \in I). \tag{3.15}$$

Laat bijvoorbeeld

$$f(x,y) := x^2 + y^2 - 1.$$

Dan beschrijft de vergelijking (3.14) de cirkel met straal 1 en middelpunt $(0,0)$. Voor gegeven y vinden we twee oplossingen $x = \pm\sqrt{1-y^2}$ van (3.14) als $-1 < y < 1$, één oplossing $x = 0$ als $y = \pm 1$, en geen oplossingen als $|y| > 1$. Dus (3.15) geldt bijvoorbeeld als we nemen $I := (-1,1)$ en $g(y) := \sqrt{1-y^2}$ of $g(y) := -\sqrt{1-y^2}$. Het is echter onmogelijk om een open interval I met daarop gedefinieerde functie g te kiezen zo dat I het punt 1 of -1 bevat en (3.15) geldt. We kunnen zeggen dat de vergelijking (3.14) *lokaal oplosbaar* is voor x als functie van y in een omgeving van alle punten (a,b) waarvoor $f(a,b) = 0$ behalve in een omgeving van de punten $(0,\pm 1)$. Wat is de diepere reden hiervan? Merk op dat $(D_1 f)(x,y) = 2x$. Dus voor punten (x,y) op de cirkel (3.14) geldt dat $(D_1 f)(x,y) \neq 0$ behalve als $(x,y) = \pm(0,1)$.

De Opgave en Propositie hieronder laten zien dat ook voor meer algemene f lokale oplosbaarheid in de vorm (3.15) van vergelijking (3.14) nabij een punt (a,b) veel te maken heeft met het niet nul zijn van $(D_1 f)(a,b)$.

3.12 Opgave Zij $E \subset \mathbb{R}^2$ open en $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^1-functie. Zij $I \subset \mathbb{R}$ een open interval en $g\colon I \to \mathbb{R}$ een C^1-functie zo dat, voor $y \in I$, geldt dat $(g(y),y) \in E$ en $f(g(y),y) = 0$. Bewijs dat voor elke $y \in I$ geldt dat òf $(D_1 f)(g(y),y) \neq 0$ òf $f'(g(y),y) = 0$ (i.e., $(g(y),y)$ is een stationair punt van f). Bewijs dat in het geval van het eerste alternatief geldt dat

$$g'(y) = -((D_1 f)(g(y),y))^{-1}\,(D_2 f)(g(y),y).$$

Geef een voorbeeld van functies f en g waarbij het tweede alternatief voorkomt voor precies één $y \in I$.

3.13 Propositie Zij $E \subset \mathbb{R}^2$ open en $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^1-functie. Zij $(a,b) \in E$ zo dat $f(a,b) = 0$ en $(D_1 f)(a,b) \neq 0$. Dan zijn er open omgevingen U van (a,b) in E en W van b in $\mathbb{R}$ zo dat er voor iedere $y \in W$ een uniek element x (aan te duiden met $g(y)$) in $\mathbb{R}$ is waarvoor $(x,y) \in U$ en $f(x,y) = 0$.

Bewijs Neem voor het gemak aan dat $(D_1 f)(a,b) > 0$ (het bewijs als $(D_1 f)(a,b) < 0$ gaat analoog). Omdat $D_1 f$ continu is op E kunnen we $\delta_1 > 0$ kiezen zo dat $(x,y) \in E$ en $(D_1 f)(x,y) > 0$ als $x \in [a-\delta_1, a+\delta_1]$ en $y \in [b-\delta_1, b+\delta_1]$. Dan $f(a+\delta_1, b) > 0$ en $f(a-\delta_1, b) < 0$. Dus er is een $\delta_2 \in (0,\delta_1]$ zo dat $f(a+\delta_1, y) > 0$ en $f(a-\delta_1, y) < 0$ als $y \in [b-\delta_2, b+\delta_2]$. Voor iedere $y \in [b-\delta_2, b+\delta_2]$ is de functie $x \mapsto f(x,y)\colon [a-\delta_1, a+\delta_1] \to \mathbb{R}$ dan monotoon stijgend en heeft deze functie een uniek nulpunt. Kies nu $U := (a-\delta_1, a+\delta_1) \times (b-\delta_2, b+\delta_2)$ en $W := (b-\delta_2, b+\delta_2)$. Dan geldt de conclusie van de propositie. $\square$

Deze Propositie zal een speciaal geval blijken te zijn van de Stelling van de impliciete functie, waarvoor we een andere bewijsmethode zullen volgen. Er zal dan ook blijken dat de functie g in bovenstaande Propositie C^1 is.

3.14 Zij nu $A_{(1)} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ en $A_{(2)} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Het directe product $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ bestaande uit de elementen (x, y) $(x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m)$ kan als lineaire ruimte geïdentificeerd worden met $\mathbb{R}^{n+m}$ volgens $(x, y) \leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$. Bekijk de lineaire afbeelding $f\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ gedefinieerd door

$$f(x, y) := A_{(1)}x + A_{(2)}y, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m.$$

Merk op dat we dit ook kunnen schrijven als een blokmatrix werkend op een blokvector:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} A_{(1)} & A_{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De vergelijking $f(x, y) = 0$ staat in korte notatie voor een stelsel van n homogene lineaire vergelijkingen met $n + m$ onbekenden. In het generieke geval kunnen we dus een m-dimensionale oplossingsruimte verwachten. We willen deze oplossingsruimte parametriseren door parameters $y = (y_1, \ldots, y_m)$, d.w.z., we willen de vergelijking $f(x, y) = 0$ oplossen door x als functie van y te geven. Als de lineaire afbeelding $A_{(1)}$ inverteerbaar is dan is deze oplossing gemakkelijk uniek en globaal te geven. Want dan:

$$f(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = -(A_{(1)})^{-1} A_{(2)}\, y.$$

3.15 Als generalisatie van het lineaire geval in §3.14 en van het niet-lineaire geval $n = m = 1$ in §3.11–3.13 bekijken we nu het niet-lineaire geval voor algemene n en m, d.w.z. het oplossen van een stelsel van n vergelijkingen

$$f_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

met $n+m$ onbekenden $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$, door de x_i te geven als functies van $y_1, \ldots, y_m$ zo dat aan de vergelijkingen voldaan is.

Ter voorbereiding wat notatie. Neem vaste natuurlijke getallen n en m. Zij $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ open en $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ een C^1-afbeelding. Schrijf

$$Df := f' = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & \ldots & D_{n+m} f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n & \ldots & D_{n+m} f_n \end{pmatrix}$$

als de blokmatrix

$$Df = \begin{pmatrix} D_{(1)}f & D_{(2)}f \end{pmatrix},$$

waarbij

$$D_{(1)}f := \begin{pmatrix} D_1 f_1 & \ldots & D_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_1 f_n & \ldots & D_n f_n \end{pmatrix}, \quad D_{(2)}f := \begin{pmatrix} D_{n+1} f_1 & \ldots & D_{n+m} f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ D_{n+1} f_n & \ldots & D_{n+m} f_n \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Gezien het lineaire geval en het geval $n = m = 1$ is in onderstaande stelling de inverteerbaarheid van $(D_{(1)}f)(a, b)$ een natuurlijke eis.

Stelling (*stelling van de impliciete functie*) Zij $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ open en $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ een C^1-afbeelding. Zij $(a,b) \in E$ zo dat $f(a,b) = 0$ en neem aan dat $(D_{(1)}f)(a,b)$ (met notatie (3.16)) als lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^n$ inverteerbaar is. Dan zijn er open omgevingen U van (a,b) in E en W van b in $\mathbb{R}^m$ zo dat:

(a) Voor elke $y \in W$ bestaat er een unieke $x \in \mathbb{R}^n$ (genoteerd $x = g(y)$) zo dat $(x,y) \in U$ en $f(x,y) = 0$.

(b) $(D_{(1)}f)(g(y),y)$ is inverteerbaar voor $y \in W$, de afbeelding $g\colon W \to \mathbb{R}^n$ is C^1 en

$$g'(y) = -((D_{(1)}f)(g(y),y))^{-1}\,(D_{(2)}f)(g(y),y) \quad (y \in W). \tag{3.17}$$

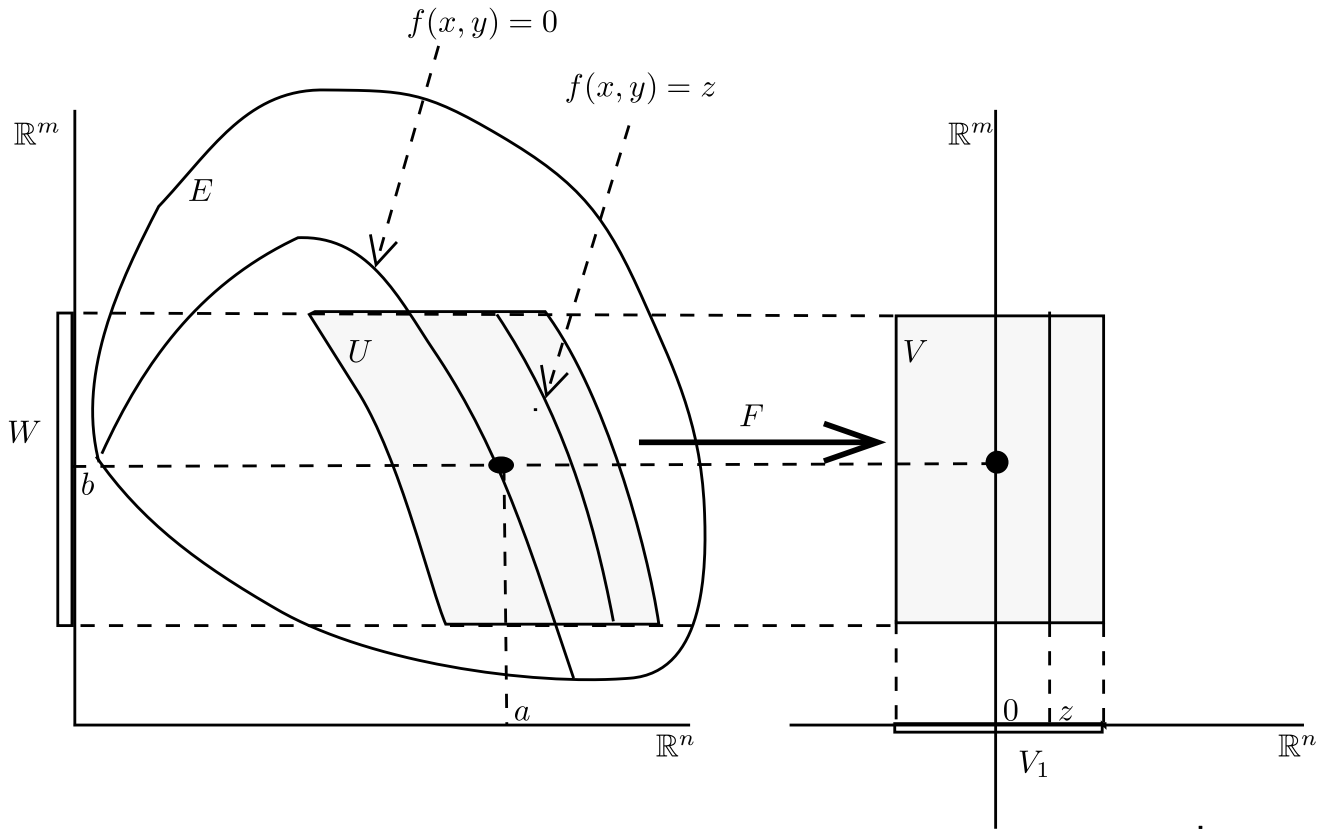

Fig. 1

Bewijs De stelling blijkt een gevolg te zijn van de stelling van de inverse functie, toegepast op een hulpafbeelding F. Het bewijs wordt geïllustreerd door Figuur 1. De twee coördinaatassen stellen $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ voor. Voor $n, m > 1$ is hier wat fantasie bij nodig, maar voor $n = m = 1$ is het volledig realistisch.

Definieer $F\colon E \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ door

$$F(x,y) := (f(x,y), y) \quad ((x,y) \in E). \tag{3.18}$$

Dan is F een C^1-afbeelding en $F'(x,y) \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^{n+m})$ kan worden uitgedrukt door de blokmatrix

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} (D_{(1)}f)(x,y) & (D_{(2)}f)(x,y) \\ 0_{m\times n} & I_{m\times m} \end{pmatrix} \quad ((x,y) \in E).$$

(Ga dit na door de partiële afgeleiden $(D_jF_i)(x,y)$ uit te rekenen.) Dus

$$J_F(x,y) = \det F'(x,y) = \det(D_{(1)}f)(x,y) \quad ((x,y) \in E). \tag{3.19}$$

In het bijzonder is $J_F(a,b) \neq 0$. Merk op dat $F(a,b) = (0,b)$. Toepassing van Stelling (van de inverse functie) 3.4 geeft dan open omgevingen U van (a,b) in E en $V := F(U)$ van $(0,b)$ in $\mathbb{R}^{n+m}$ zo dat $F{:}\, U \to V$ bijectief is met C^1-inverse $G{:}\, V \to U$ en zo dat $F'(x,y)$ inverteerbaar is als $(x,y) \in U$. Door eventueel op kleinere omgevingen over te gaan mogen we aannemen dat V van de vorm $V = V_1 \times W$ is met V_1 open omgeving van 0 in $\mathbb{R}^n$ en W open omgeving van b in $\mathbb{R}^m$.

Zij nu $y \in W$. Dan $(0,y) \in V$. Dus $G(0,y) = (x,y)$ voor zekere $x \in \mathbb{R}^n$ zo dat $(x,y) \in U$ (wegens (3.18) hebben origineel en beeld van G dezelfde tweede coördinaat). Dus $F(x,y) = (0,y)$. Combinatie met (3.18) levert dat $f(x,y) = 0$. Dit bewijst het existentiedeel van (a).

Voor het bewijs van het uniciteitsdeel van (a) nemen we weer $y \in W$ en we veronderstellen dat $x \in \mathbb{R}^n$ zo dat $(x,y) \in U$ en $f(x,y) = 0$. Dan zal $F(x,y) \in V$, terwijl uit (3.18) volgt dat $F(x,y) = (0,y)$. Dus $(x,y) = G(0,y)$. Dus x is uniek bepaald door y.

We gaan verder met het bewijs van (b). Omdat $F'(x,y)$ inverteerbaar is als $(x,y) \in U$, volgt er met behulp van (3.19) dat $(D_{(1)}f)(g(y),y)$ inverteerbaar is als $y \in W$. We zagen al dat $G(0,y) = (g(y),y)$ als $y \in W$. Omdat G een C^1-afbeelding is, zal ook g C^1 zijn. Om $g'(y)$ te bepalen nemen we de totale afgeleide t.o.v. y in de vergelijking

$$f(g(y),y) = 0 \quad (y \in W).$$

Zij $\Phi(y) := (g(y),y)$ $(y \in W)$. Dan vinden we met behulp van de kettingregel en door uitschrijven in blokmatrices dat

$$\begin{aligned} 0 = f'(g(y),y)\,\Phi'(y) &= \begin{pmatrix} (D_{(1)}f)(g(y),y) & (D_{(2)}f)(g(y),y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'(y) \\ I_{m\times m} \end{pmatrix} \\ &= (D_{(1)}f)(g(y),y)\,g'(y) + (D_{(2)}f)(g(y),y). \end{aligned}$$

Hieruit volgt onmiddellijk (3.17). □

3.16 Propositie Zij $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ open en $f{:}\, E \to \mathbb{R}^n$ een C^1-afbeelding. Zij $(a,b) \in E$ zo dat $f(a,b) = 0$ en neem aan dat $(D_{(1)}f)(a,b)$ inverteerbaar is. Dan is er een open omgeving W van b in $\mathbb{R}^m$ zo dat er een unieke C^1-afbeelding $g{:}\, W \to \mathbb{R}^n$ bestaat met de eigenschappen dat $g(b) = a$ en dat $(g(y),y) \in E$ en $f(g(y),y) = 0$ als $y \in W$.

Bewijs Neem open omgevingen U van (a,b) in E en W van b in $\mathbb{R}^m$ zo dat de conclusies van Stelling 3.15 gelden. Uit het bewijs van 3.15 zien we dat we (door eventueel naar kleinere omgevingen U en V over te gaan) mogen veronderstellen dat $W = B_r(b)$ (open bal om b) voor zekere $r > 0$. Neem de afbeelding $g{:}\, W \to \mathbb{R}^n$ als in Stelling 3.15. Dit bewijst het existentiegedeelte van de Propositie. Zij $h{:}\, W \to \mathbb{R}^n$ ook een C^1-afbeelding met de eigenschappen dat $h(b) = a$ en dat $(h(y),y) \in E$ en $f(h(y),y) = 0$ als $y \in W$. Als $h \neq g$ dan is er een $y \in W$ zo dat $g(y) \neq h(y)$. Vanwege de vorm van W zal dan $b + t(y-b) \in W$ voor alle $t \in [0,1]$. De verzameling

$$I_0 := \{t \in [0,1] \mid g(b+t(y-b)) = h(b+t(y-b))\}$$

is niet leeg (want bevat 0) en heeft vanwege de continuïteit van g en h een maximaal element $t_0 \in [0,1)$. Dus voor iedere $t \in (t_0,1]$ geldt er dat $g(b+t(y-b)) \neq h(b+t(y-b))$. Maar $g(b+t(y-b))$ is het unieke element $x \in \mathbb{R}^n$ zo dat $(x, b+t(y-b)) \in U$ en $f(x, b+t(y-b)) = 0$. Dus $(h(b+t(y-b)), b+t(y-b)) \notin U$ als $t_0 < t \leq 1$. Maar wegens de continuïteit van h is

$(h(b+t(y-b)), b+t(y-b)) \in U$ voor t in een voldoende kleine omgeving van t_0. Dit is een tegenspraak.
[Merk op dat we bewezen hebben dat de verzameling I_0 een niet-lege open en gesloten deelverzameling is van $[0,1]$. We hadden dus ook de samenhangendheid van $[0,1]$ kunnen aanroepen om te concluderen dat de deelverzameling gelijk moet zijn aan $[0,1]$, cf. syll. Topologie, Stelling 7.3.] $\square$

Merk op dat we in de formulering van bovenstaande Propositie geen uitspraak meer doen over een open omgeving U van (a,b), zoals wel in Stelling 3.15 gedaan werd. In Propositie 3.16 voorzien de continuïteit van f en g op de achtergrond in zo'n omgeving U.

3.17 Opmerking Het bewijs van Stelling 3.15 bevat meer informatie dan we in de formulering van de stelling expliciet hebben gemaakt. Gebruik de notatie van dat bewijs. Neem een vaste $z \in V_1$. Laat $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dan gelden er de equivalenties

$$(x,y) \in U \;\&\; f(x,y) = z \iff (z,y) \in V \;\&\; (x,y) = G(z,y) \iff y \in W \;\&\; (x,y) = G(z,y).$$

Dus G beeldt de deelverzameling $\{z\} \times W$ van V bijectief af op de deelverzameling $U_z := \{(x,y) \in U \mid f(x,y) = z\}$ van U. Omgekeerd beeldt F de verzameling U_z bijectief af op $\{z\} \times W$ (cf. Fig. 1). We kunnen U_z op vatten als een "niveauverzameling" van de afbeelding f. Omdat V de disjuncte vereniging is van de verzamelingen $\{z\} \times W$ $(z \in V_1)$, is U de disjuncte vereniging van de verzamelingen U_z $(z \in V_1)$. Merk op dat, voor elke $z \in V_1$, de afbeelding $y \mapsto G(z,y) \colon W \to U_z$ een m-dimensionale C^1-parametrisering van U_z geeft.

3.18 Opmerking Als in Stelling 3.15 bovendien gegeven is dat f een C^p-afbeelding is, dan zal, met de notatie van het bewijs van die stelling, ook F een C^p-afbeelding zijn. Gezien Stelling 3.9 zal dan de inverse afbeelding G van F een C^p-afbeelding zijn, dus dan is g uit Stelling 3.15 ook een C^p-afbeelding.

3.19 Voorbeeld We nemen $n := 2$ en $m := 3$ en bekijken de afbeelding $f \colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ met componentfuncties

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) &:= 2e^{x_1} + y_1 x_2 - 4y_2 + 3, \\ f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) &:= x_2 \cos x_1 - 6x_1 + 2y_1 - y_3. \end{aligned}$$

Zij $a := (0,1)$ en $b := (3,2,7)$. Dan $f(a,b) = 0$. We berekenen

$$f'(a,b) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{dus}$$

$$A_1 := (D_{(1)}f)(a,b) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A_2 := (D_{(2)}f)(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De matrix A_1 is inverteerbaar. Er bestaat dus volgens Propositie 3.16 een open omgeving W van $(3,2,7)$ in $\mathbb{R}^3$ met daarop een unieke C^1-afbeelding g naar $\mathbb{R}^2$ zo dat $g(3,2,7) = (0,1)$ en $f(g(x),x) = 0$ voor $x \in W$. Verder is volgens formule (3.17) $g'(3,2,7) = -A_1^{-1} A_2$. Men rekent gemakkelijk na dat

$$A_1^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix},$$

zodat

$$g'(3,2,7) = \frac{-1}{20}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/5 & -3/20 \\ -1/2 & 6/5 & 1/10 \end{pmatrix}.$$

3.20 Opmerking In Stelling 3.15 wordt er een open omgeving U van (a,b) in $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ gegeven zo dat er voor de deelverzameling $U_0 := \{(x,y) \in U \mid f(x,y) = 0\}$ een C^1-parametrisering is d.m.v. y, dus met behulp van de laatste m coördinaten van (x,y). Algemener kunnen we ons de vraag stellen of we U_0 op de een of andere manier m-dimensionaal kunnen parametriseren, bijv. met een ander m-tal uit de $m+n$ coördinaten van (x,y). Neem hiertoe aan dat $c \in E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ met E open, dat $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ een C^1-afbeelding is, dat $f(c) = 0$ en de $n \times (n+m)$ matrix van $f'(c)$ (maximale) rang n heeft. Dan zijn er dus n lineair onafhankelijke kolomvectoren met zekere rangnummers $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ te vinden in de matrix van $f'(c)$, maar het is niet gezegd dat de eerste n kolomvectoren lineair onafhankelijk zijn, zoals in Stelling 3.15. We kunnen nu een hernummering van coördinaten uitvoeren zo dat in de nieuwe nummering de eerste n kolomvectoren lineair onafhankelijk zijn en Stelling 3.15 toepasbaar is.

Laten daartoe $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$ de rangnummers zijn van de kolommen die nog geen rangnummer $i_1, \ldots, i_n$ hebben. Definieer

$$\begin{aligned}
&\widetilde{f}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}) := f(x_1, \ldots, x_{n+m}) \quad ((x_1, \ldots, x_{n+m}) \in E), \\
&\widetilde{E} := \{(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}) \mid (x_1, \ldots, x_{n+m}) \in E)\}, \\
&\widetilde{c} := (c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}, c_{j_1}, \ldots, c_{j_m}).
\end{aligned}$$

Dan kan Stelling 3.15 worden toegepast op de afbeelding $\widetilde{f}\colon \widetilde{E} \to \mathbb{R}^n$ rond het punt $\widetilde{c}$. Tenslotte kunnen de resultaten weer worden terugvertaald in termen van $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ rond het punt c.

3.21 Voorbeeld Laat de afbeelding $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ met componentfuncties f_1, f_2 gegeven zijn door

$$\begin{aligned}
f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &:= x_2^2 + x_4^2 - 2x_1x_3, \\
f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &:= x_2^3 + x_4^3 + x_1^3 - x_3^3.
\end{aligned}$$

Zij $c := (1,-1,1,1)$. Dan $f(c) = 0$ en

$$f'(c) = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Deze matrix heeft rang 2, maar de eerste twee kolommen zijn niet lineair onafhankelijk, wel de eerste en de derde kolom. Daarom hernummeren we:

$$\widetilde{f}(x_1,x_3,x_2,x_4) := f(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

en

$$\widetilde{c} := (1,1,-1,1) = (a,b) \quad \text{met} \quad a = (1,1) \quad \text{en} \quad b = (-1,1).$$

Dus

$$A_1 := (D_{(1)}\widetilde{f})(a,b) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A_2 := (D_{(2)}\widetilde{f})(a,b) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Er bestaat dus volgens Propositie 3.16 een open omgeving W van $(-1,1)$ in $\mathbb{R}^2$ met daarop een unieke C^1-afbeelding g naar $\mathbb{R}^2$ zo dat $g(-1,1) = (1,1)$ en $\widetilde{f}(g(x),x) = 0$ voor $x \in W$. We kunnen $\widetilde{f}(g(x),x) = 0$ terugvertalen naar $f(g_1(x_2,x_4),x_2,g_2(x_2,x_4),x_4) = 0$ voor $(x_2,x_4) \in W$. Tenslotte rekenen we met behulp van (3.17) uit dat

$$g'(-1,1) = -A_1^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3 Multiplicatorenregel van Lagrange

Ter inleiding formuleren we de Stelling van de impliciete functie nog eens voor $n = m = 1$ en passen deze dan toe om de extrema te bepalen van een functie op $\mathbb{R}^2$ onder een nevenvoorwaarde.

3.22 Propositie

(a) Zij $E \subset \mathbb{R}^2$ open en $f\colon E \to \mathbb{R}$ een C^1-functie. Zij $c \in E$ zo dat $f(c) = 0$ en neem aan dat $(\nabla f)(c) \neq 0$. Dan is er een interval I rond 0 en een C^1-kromme (i.e. C^1-afbeelding) $\gamma\colon I \to E$ zo dat $\gamma(0) = c$, $\gamma'(0) \neq 0$, en $f(\gamma(t)) = 0$ als $t \in I$. Ook geldt dat $\gamma'(0) \perp (\nabla f)(c)$ (de twee vectoren in $\mathbb{R}^2$ staan loodrecht op elkaar).

(b) Zij nu $M := \{z \in E \mid f(z) = 0\}$ (niveauverzameling van f bij waarde 0). Zij $\phi\colon E \to \mathbb{R}$ een C^1-functie. Stel dat $\phi|_M$ een lokaal extremum aanneemt in c. Dan is er een $\lambda \in \mathbb{R}$ zo dat $(\nabla\phi)(c) = \lambda\,(\nabla f)(c)$.

Bewijs We bewijzen eerst (a) door dit terug te brengen tot Stelling 3.15. Omdat $(\nabla f)(c) \neq 0$ zullen $(D_1 f)(c)$ en $(D_2 f)(c)$ niet beide nul zijn. Zonder verlies van algemeenheid mogen we veronderstellen dat $(D_1 f)(c) \neq 0$, want anders verwisselen we de twee coördinaten in $\mathbb{R}^2$. Zij $c = (a,b)$. Nu volgt er uit Stelling 3.15 het bestaan van een interval W rond b en een C^1-functie $g\colon W \to \mathbb{R}$ zo dat $g(b) = a$ en zo dat voor $y \in W$ geldt dat $(g(y),y) \in E$ en $f(g(y),y) = 0$. Laat nu $I := W - b$ en $\gamma(t) := (g(b+t), b+t)$. Dan $\gamma(0) = c$, $f(\gamma(t)) = 0$, en $\gamma'(0) = (g'(b),1) \neq (0,0)$. Tenslotte volgt de orthogonaliteit van $\gamma'(0)$ en $(\nabla f)(c)$ door differentiatie van $f(\gamma(t)) = 0$ (cf. syll. Analyse B1, §4.12).

Voor het bewijs van (b) merken we op dat $\gamma(t) \in M$ $(t \in I)$ en dat $\gamma(0) = c$. Laat nu E_0 een open omgeving van c in E zijn zo dat de functie ϕ beperkt to $E_0 \cap M$ haar absolute maximum of minimum aanneemt in c. Omdat γ C^1 dus continu is, is er dan een interval I_0 rond 0 zo dat $\gamma(I_0) \subset E_0$, dus de functie $t \mapsto \phi(\gamma(t))\colon I_0 \to M$ neemt haar absolute maximum of minimum aan in 0, dus

$$0 = (\phi \circ \gamma)'(0) = \langle \gamma'(0), (\nabla\phi)(c) \rangle.$$

Omdat ook $\langle \gamma'(0), (\nabla f)(c) \rangle = 0$ en $\gamma'(0)$ en $(\nabla f)(c)$ vectoren $\neq 0$ in $\mathbb{R}^2$ zijn, volgt er dat $(\nabla\phi)(c) = \lambda\,(\nabla f)(c)$ voor zekere $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

3.23 Zij nu $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ open en $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ een C^1-afbeelding. Definieer $M := \{z \in E \mid f(z) = 0\}$. We willen Propositie 3.22 voor deze situatie generaliseren. Zij $c \in M$. Als de $n \times (n+m)$ matrix van $f'(c)$ (maximale) rang n heeft dan noemen we c een *regulier punt* van M (anders noemen we het punt *singulier*). De aanname dat c regulier is generaliseert de eis $(\nabla f)(c) \neq 0$ uit Propositie 3.22).

Propositie Neem E, f en M als boven en zij c een regulier punt van M. Zij $T_c(M)$ de verzameling van alle raakvectoren $\gamma'(0)$, waarbij $t \mapsto \gamma(t)$ een willekeurige C^1-kromme is in E die geheel in M ligt en waarvoor $\gamma(0) = c$. Dan geldt:

(a) $T_c(M)$ is een m-dimensionale lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^{n+m}$ (de zogenaamde *raakruimte aan M in c*).

(b) Schrijf $f(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z))$ $(z \in E)$. Dan vormen de vectoren $(\nabla f_i)(c)$ $(i = 1, \ldots, n)$ een lineair onafhankelijk stelsel in $\mathbb{R}^{n+m}$ en hun lineaire opspansel vormt een n-dimensionale lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^{n+m}$ die loodrecht staat op $T_c(M)$.

(c) Zij $v \in \mathbb{R}^{n+m}$. Dan $v \perp T_c(M)$ desda $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i\, (\nabla f_i)(c)$ voor zekere $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Bewijs Omdat c een regulier punt is, zijn er in de $n \times (n+m)$ matrix van $f'(c)$ n lineair onafhankelijke kolomvectoren te vinden. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat de eerste n kolomvectoren lineair onafhankelijk zijn (anders hernummeren we de coördinaten van $\mathbb{R}^{n+m}$). Nu zijn we in de situatie van Stelling 3.15. Dus $c = (a, b)$ $(a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m)$ en we kunnen open omgevingen U van c in E en W van b in $\mathbb{R}^m$ nemen en een C^1-afbeelding $g\colon W \to \mathbb{R}^n$ zo dat de conclusies van Stelling 3.15 gelden. I.h.b. geldt er dan dat iedere $(x, y) \in U \cap M$ met $y \in W$ geschreven kan worden als $(g(y), y)$.

Zij γ nu een C^1-kromme in E die geheel ligt in M en waarvoor $\gamma(0) = c$. Voor t voldoende dicht bij 0 zal $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in U \cap M$ en $\gamma_2(t) \in W$, dus dan $\gamma(t) = (g(\gamma_2(t)), \gamma_2(t))$. Dus $\gamma'(0) = (g'(b)\, \gamma_2'(0), \gamma_2'(0))$ en deze vector uit $\mathbb{R}^{n+m}$ ligt in de m-dimensionale lineaire deelruimte $\{(g'(b)w, w) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid w \in \mathbb{R}^m\}$. Omgekeerd kunnen we elke vector $(g'(b)\, w, w)$ in deze lineaire deelruimte realiseren als raakvector in c aan een geheel in M liggende C^1-kromme. Neem simpelweg $\gamma(t) := (g(b + tw), b + tw)$ met t voldoende dicht bij 0 zo dat $b + tw \in W$ en $(g(b + tw), b + tw) \in U$. Dit bewijst (a).

Merk voor het bewijs van (b) eerst op dat de vectoren $(\nabla f_i)(c)$ $(i = 1, \ldots, n)$ de rijvectoren zijn in de matrix van $f'(c)$. Omdat de matrix rang n heeft, vormen de rijvectoren ook een stelsel van rang n. Zij γ een C^1-kromme in E die geheel ligt in M en waarvoor $\gamma(0) = c$. Dan $f(\gamma(t)) = 0$, dus $f_i(\gamma(t)) = 0$, dus $\langle \gamma'(0), (\nabla f_i)(c)\rangle = 0$. Gezien (a) is (b) hiermee bewezen.

De uitspraak in (c) volgt nu door simpele lineaire algebra, omdat we te maken hebben met een m-dimensionale lineaire deelruimte $T_c(M)$ en een n-dimensionale deelruimte $\mathrm{Span}\{(\nabla f_i)(c)\}$ van $\mathbb{R}^{n+m}$ die loodrecht op elkaar staan. $\square$

3.24 Stelling (*multiplicatorenregel van Lagrange*)
Zij $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ open en laat $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ een C^1-afbeelding zijn. Zij $M := \{x \in E \mid f(x) = 0\}$. Zij $\phi\colon E \to \mathbb{R}$ een C^1-functie. Dan geldt: als $\phi|_M$ in een punt $c \in M$ een lokaal extremum aanneemt en als c een regulier punt is van M, dan bestaan er $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ zo dat

$$(\nabla\phi)(c) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, (\nabla f_i)(c).$$

Bewijs Zij γ een C^1-kromme in E die geheel ligt in M en waarvoor $\gamma(0) = c$. Laat nu E_0 een open omgeving van c in E zijn zo dat de functie ϕ beperkt to $E_0 \cap M$ haar absolute maximum of minimum aanneemt in c. Dan is er een interval I_0 rond 0 zo dat $\gamma(I_0) \subset E_0$, dus de functie $t \mapsto \phi(\gamma(t))\colon I_0 \to M$ neemt haar absolute maximum of minimum aan in 0, dus

$$0 = (\phi \circ \gamma)'(0) = \langle \gamma'(0), (\nabla\phi)(c)\rangle.$$

Dus $(\nabla\phi)(c) \perp T_c(M)$. Pas nu Propositie 3.23(c) toe. $\square$

Opmerking Als alle punten van M regulier zijn, dan kunnen we bovenstaande stelling gebruiken om de lokale extrema van $\phi|_M$ te vinden. Immers, als in c een lokaal extremum wordt aangenomen dan voldoen de $n+m$ coordinaten c_i en de n multiplicatoren λ_i aan de vergelijkingen

$$(D_j\phi)(c) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,(D_jf_i)(c) \quad (j=1,\ldots,n+m) \qquad \text{en} \qquad f_i(c)=0 \quad (i=1,\ldots,n).$$

Voor $2n{+}m$ onbekenden hebben we dus in totaal $2n{+}m$ (i.h.a. niet-lineaire) vergelijkingen. We kunnen proberen deze vergelijkingen op te lossen, waarbij we de gevonden waarden van de λ_i's niet hoeven te onthouden. Voor de gevonden punten c moeten we dan nog nagaan of daar inderdaad een lokaal extremum wordt aangenomen. Soms weten we a priori al dat er absolute maxima en/of minima moeten zijn, bijv. als M compact is.

Je zult je herinneren van syll. Analyse B1, hst. 7 dat voor het bepalen van extrema van een functie $f\colon E\to\mathbb{R}$, waarbij E een gesloten deelverzameling is van $\mathbb{R}^n$ met niet-lege rand, je bij je analyse ook de rand-extrema moet bekijken. Bovenstaande stelling van Lagrange zou daarbij ook als gereedschap kunnen dienen.

Waarschuwing Ga bij de toepassing van Stelling 3.24 altijd na of de punten van M regulier zijn en ga voor de gevonden kandidaat-extrema altijd door een nadere analyse na of dit echt wel extrema zijn.

3.25 Voorbeeld We bekijken de reëelwaardige C^1-functie

$$\phi(x,y,z) := x - y + 2z$$

op de ellipsoïde

$$M := \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+2z^2 = 2\}.$$

M is het nulniveau van de C^1-functie

$$f(x,y,z) := x^2+y^2+2z^2-2$$

en elk punt van M is regulier (ga na). Om de extrema van ϕ op M te vinden lossen we x,y,z en λ op uit de vergelijkingen $(\nabla\phi)(x,y,z) = \lambda\,(\nabla f)(x,y,z)$ en $f(x,y,z)=0$, dus

$$1 = \lambda\,(2x), \quad -1 = \lambda\,(2y), \quad 2 = \lambda\,(4z), \quad x^2+y^2+2z^2-2=0.$$

We vinden twee oplossingen:

$$\lambda = 2^{-\frac{1}{2}}, \quad (x,y,z) = (2^{-\frac{1}{2}}, -2^{-\frac{1}{2}}, 2^{-\frac{1}{2}})$$

en

$$\lambda = -2^{-\frac{1}{2}}, \quad (x,y,z) = (-2^{-\frac{1}{2}}, 2^{-\frac{1}{2}}, -2^{-\frac{1}{2}}).$$

Daar ϕ continu is en M compact, neemt ϕ op M een absoluut minimum en een absoluut maximum aan. Omdat

$$\phi(2^{-\frac{1}{2}}, -2^{-\frac{1}{2}}, 2^{-\frac{1}{2}}) = 2\sqrt{2}, \quad \phi(-2^{-\frac{1}{2}}, 2^{-\frac{1}{2}}, -2^{-\frac{1}{2}}) = -2\sqrt{2},$$

neemt ϕ in de gevonden twee punten een absoluut maximum resp. minimum aan.

3.26 Voorbeeld We beschouwen op $\mathbb{R}^n$ de functie

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) := x_1 \ldots x_n.$$

We zoeken de lokale extrema van ϕ onder de nevenvoorwaarden

$$x_1 + \cdots + x_n = n, \quad x_1 > 0, \ldots, x_n > 0. \tag{3.20}$$

De verzameling $M := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = n\}$ is het nulniveau van de functie f gegeven door

$$f(x_1, \ldots, x_n) := x_1 + \cdots + x_n - n$$

en alle punten van M zijn reguliere punten van f. Merk op dat de nevenvoorwaarden (3.20) een open deelverzameling M^+ van M bepalen. Hieruit volgt dat de punten waar $\phi|_{M^+}$ een lokaal extremum heeft (hiernaar zoeken we) precies de punten van M^+ zijn waar $\phi|_M$ een lokaal extremum heeft. De laatste volgen uit het $(n+1)$-tal vergelijkingen $(\nabla\phi)(x) = \lambda(\nabla f)(x)$ (n vergelijkingen) en $f(x) = 0$, ofwel ($x_i \neq 0$ wegens (3.20))

$$x_1 \cdots x_n = \lambda x_i \quad (i = 1, \ldots, n), \qquad x_1 + \cdots + x_n = n.$$

Als enige oplossing binnen M^+ vinden we dat $\lambda = x_1 = \ldots = x_n = 1$. Daar is $\phi(1, 1, \ldots, 1) = 1$. De verzameling

$$\overline{M^+} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = n,\ x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}$$

is compact en ϕ is continu op $\overline{M^+}$ en neemt daar dus een absoluut maximum aan. Omdat ϕ overal op de rand van M^+ nul is, zal dit maximum worden aangenomen in $(1, 1, \ldots, 1)$. De ongelijkheid

$$x_1 \ldots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n \quad (x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0) \tag{3.21}$$

is nu bewezen voor het geval dat $x_1 + \cdots + x_n = n$. Om homogeniteitsredenen is hij dan ook algemeen waar. Verder treedt het gelijkteken op desda $x_1 = \ldots = x_n$. Ongelijkheid (3.21) kan equivalent geschreven worden als de bekende *ongelijkheid tussen het geometrisch en aritmetisch gemiddelde*:

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \tfrac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \quad (x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0). \tag{3.22}$$

Men kan (3.22) ook bewijzen door van beide leden de logaritme te nemen en gebruik te maken van het feit dat log een concave functie is op $(0, \infty)$ (cf. syll. Analyse A3, Vraagstuk V6.1).

3.27 **Voorbeeld** We laten tenslotte nog zien hoe men de multiplicatorenregel van Lagrange kan gebruiken om de *ongelijkheid van Cauchy-Schwarz* te bewijzen:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) \quad (x, y \in \mathbb{R}^n). \tag{3.23}$$

Om homogeniteitsredenen is het voldoende te laten zien dat voor een vaste $y \in \mathbb{R}^n$ met $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$ geldt dat

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \le 1 \quad (x \in M), \tag{3.24}$$

waarbij $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$. Omdat $M = -M$ en de functie $x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$ oneven is, is (3.24) equivalent met

$$\phi(x) := \sum_{i=1}^n x_i y_i \le 1 \quad \text{op } M. \tag{3.25}$$

Nu is M het nulniveau van de functie $f(x) := \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1$ ($x \in \mathbb{R}^n$) en alle punten van M zijn reguliere punten van f. De functie ϕ moet in een zeker punt x op de compacte verzameling M een absoluut maximum aannemen. Daar wordt dan ook een lokaal extremum aangenomen, dus $(\nabla\phi)(x) = \lambda(\nabla f)(x)$ en $f(x) = 0$, ofwel

$$y_i = 2\lambda x_i \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad \text{en} \qquad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1.$$

We vinden oplossingen $\lambda = \frac{1}{2}$, $x_i = y_i$ en $\lambda = -\frac{1}{2}$, $x_i = -y_i$, met $\phi(x) = 1$ resp. $\phi(x) = -1$. Alleen de eerste oplossing levert een maximum. Hiermee is (3.25) bewezen, en het gelijkteken geldt daar desda $x = y$. Dus ook (3.24) is bewezen en daar geldt gelijkteken desda $x = \pm y$. Tenslotte is (3.23) bewezen met gelijkteken desda $y = \text{const.}\, x$ of $x = 0$.

Verdere vraagstukken

V3.1 Zij $U \subset \mathbb{R}^2$ open en $f\colon U \to \mathbb{R}^2$. Beantwoord voor elk van de onderstaande gegeven U en f de volgende vragen:
(i) Toon aan dat f injectief is.
(ii) Bepaal $f(U)$ en f^{-1}.
(iii) Bereken $J_f(x, y)$ (Jacobiaan van f) voor $(x, y) \in U$.
(iv) Zij $V := f(U)$. Ga na of $f\colon U \to V$ een diffeomorfisme is.

a) $U := \mathbb{R}^2$ en $f(x, y) := (x, y + x^2 + x^3)$

b) $U := \{(x, y) \mid x + y \neq -1\}$ en $f(x, y) := \left(\dfrac{x}{x+y+1}, \dfrac{y}{x+y+1}\right)$

c) $U := \mathbb{R}^2$ en $f(x, y) := (x^3, y^3)$

d) $U := \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ en $f(x, y) := \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$

e) $V := \{(x, y) \mid 0 < y < 2\pi\}$ en $f(x, y) := (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

V3.2 Ga in elk van de volgende gevallen na of de functie $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ injectief is op een omgeving U van het punt $a \in \mathbb{R}^n$ en bepaal de afgeleide van de inverse van $f|_U$ in het punt $f(a)$, zo deze bestaat:

a) $n := 2, \quad f(x,y) := (x^2 + y^2, 2xy), \qquad a := (2,2)$

b) $n := 2, \quad f(x,y) := (\arctan(x+y), \arctan(x-y)), \qquad a := (-1,1)$

c) $n := 3, \quad f(x,y,z) := (x+y+z, x^2+y^2+z^2, x^3+y^3+z^3), \quad a := (2,1,0).$

V3.3 De functie $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door $f(r,\phi) := (r\cos\phi, r\sin\phi)$.

a) Laat zien dat elk punt (r_0, ϕ_0) met $r_0 \neq 0$ een omgeving U heeft waarop f injectief is.

b) Bepaal de afgeleide (zo die bestaat) van de inverse van $f|_U$ in het punt $f(r_0,\phi_0)$. Neem i.h.b. als voorbeelden $(r_0,\phi_0) := (1,\pi)$ en $(r_0,\phi_0) := (-1, 4\pi)$.

c) Laat zien dat f injectief is op $A := \{(r,\phi) \mid r > 0,\ 0 \le \phi < 2\pi\}$. Wat is $f(A)$?

V3.4 De afbeelding $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wordt gegeven door $f(x,y) := (x^2 - y^2, xy)$.

a) Is f inverteerbaar?

b) In welke punten $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ heeft f een lokale inverse, d.w.z., voor welke punten (a,b) is er een omgeving U van (a,b) waarop f injectief is?

c) Concludeer uit b) dat f een lokale inverse g heeft in (a,b) als $(a,b) := (-1,1)$ of als $(a,b) := (1,-1)$. Bepaal voor deze twee gevallen de afgeleide van g (zo die bestaat) in het punt $f(a,b)$.

V3.5 Zij $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$. Definieer $f\colon E \to \mathbb{R}^2$ door $f(x,y) := (x^2+y^2, xy^{-1})$.

a) Toon aan dat f op een omgeving U van $(1,2)$ injectief is. Bepaal de afgeleide (zo die bestaat) van de inverse van $f|_U$ in $f(1,2)$.

b) Zij $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^1-functie. Definieer $\Phi\colon E \to \mathbb{R}$ door $\Phi := \phi \circ f$. Druk de partiële afgeleiden van ϕ in $(5, \frac{1}{2})$ uit in de partiële afgeleiden van Φ in $(1,2)$.

V3.6 Zij $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Definieer $f\colon E \to \mathbb{R}^2$ door

$$f(x,y) := (x^{-1}\, e^{-y}, x^{-1}\, e^{-2y}).$$

a) Toon aan dat f op een omgeving U van $(2,1)$ injectief is. Bepaal de afgeleide (zo die bestaat) van de inverse van $f|_U$ in $(\frac{1}{2}e^{-1}, \frac{1}{2}e^{-2})$.

b) Zij $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^1-functie. Definieer $\Phi\colon E \to \mathbb{R}$ door $\Phi := \phi \circ f$. Druk de partiële afgeleiden van ϕ in $(\frac{1}{2}e^{-1}, \frac{1}{2}e^{-2})$ uit in de partiële afgeleiden van Φ in $(2,1)$.

V3.7 De C^1-afbeelding $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$f(x,y,z) := (x + y^2 e^z + 1,\ 2\sin x + y,\ 3x + y - \sin z).$$

(a) Bewijs dat er een open omgeving U van $(0,0,\pi)$ in $\mathbb{R}^3$ is en een open omgeving V van $(1,0,0)$ in $\mathbb{R}^3$ zo dat f de verzameling U bijectief op V afbeeldt met een inverse afbeelding $g\colon V \to U$ die C^1 is.

b) Bepaal $g'(1,0,0)$.

c) Geef een voorbeeld van een C^1-afbeelding $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zodanig dat $\phi(1,0,0) = 2$ en $(\phi \circ f)'(0,0,\pi) = (1,0,-1)$.

V3.8 De C^1-afbeelding $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is gegeven door

$$f(x, y, z) := (x + y, y - z, xyz).$$

(a) Bewijs dat er een open omgeving U van $(1, 1, 0)$ in $\mathbb{R}^3$ is en een open omgeving V van $(2, 1, 0)$ in $\mathbb{R}^3$ zo dat f de verzameling U bijectief op V afbeeldt met een inverse afbeelding $g: V \to U$ die C^1 is.
b) Bepaal $g'(2, 1, 0)$.
c) Geef een voorbeeld van een C^1-afbeelding $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ zodanig dat $\phi(0) = (1, 1, 0)$ en $(f \circ \phi)'(0) = (1, 1, 1)$.

V3.9 Laat zien dat er een omgeving W van $b \in \mathbb{R}$ bestaat en een unieke C^1-functie $g: W \to \mathbb{R}$ zo dat $g(b) = a$ en

$$(g(y))^2 + (2y + 1)\, g(y) + y^2 - y = 0 \quad (y \in W)$$

en bepaal $g'(b)$
a) als $a = b = 0$;
b) als $a = -1$, $b = 0$.
c) Laat zien dat er niet zo'n W en g bestaan als $a = -3/8$, $b = -1/8$.

V3.10 Hoeveel C^1-functies $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestaan er waarvoor $(g(x))^2 - x^4 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$?

V3.11 Laat zien dat er een omgeving W van $(2^{-3/2}, 2^{-3/2})$ in $\mathbb{R}^2$ bestaat en een unieke C^1-functie $g: W \to \mathbb{R}$ zo dat $g(2^{-3/2}, 2^{-3/2}) = \pi/6$ en

$$x^2 + y^2 - (\sin g(x, y))^2 = 0 \quad ((x, y) \in W)$$

en bepaal $g'(2^{-3/2}, 2^{-3/2})$.

V3.12 Bewijs dat voor elke $a \in \mathbb{R}$ de vergelijking $a^2x^3 + ax^2 + x + 1 = 0$ precies één reële wortel $x(a)$ heeft. Laat vervolgens zien dat de functie $a \mapsto x(a)$ differentieerbaar is op $\mathbb{R}$ en bereken $x'(1)$.

V3.13 Gegeven zijn de functies $f_1, f_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ door

$$f_1(x, y, t) := x^5 + y - t,$$
$$f_2(x, y, t) := x^2 + y^3 - t^2.$$

a) Laat zien dat er een omgeving W van 1 in $\mathbb{R}$ is waarvoor er een unieke C^1-afbeelding $g: \mapsto (x(t), y(t)): W \to \mathbb{R}^2$ bestaat zo dat $f_i(x(t), y(t), t) = 0 \quad (i = 1, 2,\ t \in W)$.
b) Zij $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\phi(x, y) := x^3y$. Zij $\Phi: W \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\Phi := \phi \circ g$. Bereken $\Phi'(1)$.

V3.14 Zij

$$f(x, y) := 2x^3 + 3xy^2 + x + y^3 - y^2 \quad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

a) Bewijs dat f geen (lokale) extremen heeft.

b) Laat $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $c := f(a, b)$. Bewijs dat er een omgeving U van b in $\mathbb{R}$ en een C^1-functie $g: U \to \mathbb{R}$ bestaan zo dat $g(b) = a$ en $f(g(y), y) = c$ voor $y \in U$.

c) Beschrijf de verzameling van alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ zo dat de in onderdeel b) gevonden functie g monotoon dalend is in een omgeving van b.

V3.15 Ga voor de volgende C^1-functies $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en punten $c \in \mathbb{R}^n$ na dat $f(c) = 0$ en $(\nabla f)(c) \neq 0$ en bepaal de raakruimte $T_c(M)$ in c aan $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$:
a) $n := 2$, $f(x, y) := y - xe^y - 1$ en $c := (-1, 0)$,
b) $n := 2$, $f(x, y) := x^2 + xy + y^2 + y$ en $c := (1, -1)$,
c) $n := 3$, $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$ en $c := (1, 0, 0)$,
d) $n := 3$, $f(x, y, z) := x^3 + yz$ en $c := (1, 1, -1)$.

V3.16 Ga voor de volgende C^1-afbeeldingen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ en punten $c \in \mathbb{R}^3$ na dat $f(c) = 0$ en $f'(c)$ rang 2 heeft, beredeneer dat de verzameling $M := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$ in een omgeving van c samenvalt met de beeldverzameling $\{\gamma(t) \mid t \in I\}$ (I een interval) van een C^1-kromme door c, dat de raakruimte $T_c(M)$ aan M in c juist de raaklijn in c aan deze kromme is, en bepaal deze raaklijn:
a) $f(x, y, z) := (2x^2 + 3y^2 - z^2 - 25, x^2 + y^2 - z^2)$ en $c := (\sqrt{7}, 3, 4)$,
b) $f(x, y, z) := (x^2 + y^2 + 2z^2 - 4, xyz - 1)$ en $c := (1, 1, 1)$.

V3.17 Laat $c := (1, 1, 1, 1)$ en $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ gegeven door

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= 2x_1x_3 + x_2^3 - x_2x_4 - 2, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &:= x_3^4 - x_1x_2x_4. \end{aligned}$$

Bewijs dat $f(c) = 0$, dat $f'(c)$ rang 2 heeft en bepaal de raakruimte $T_c(M)$ in c aan $M := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = 0\}$.

V3.18 Laat $c := (1, 0, 0, 0, 0)$ en $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ gegeven door

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &:= x_5e^{x_1} + x_1e^{x_2} + x_2e^{x_3} + x_3e^{x_4} + x_4e^{x_5}, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &:= x_2e^{-x_1} + x_3e^{-x_2} + x_4e^{-x_3} + x_5e^{-x_4} + x_1e^{-x_5}, \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &:= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5. \end{aligned}$$

Bewijs dat $f(c) = (1, 1, 1)$, dat $f'(c)$ rang 3 heeft en bepaal de raakruimte $T_c(M)$ in c aan $M := \{x \in \mathbb{R}^5 \mid f(x) = (1, 1, 1)\}$.

V3.19 Bepaal de lokale extrema van de functie $\phi\colon (x, y, z) \mapsto x - 2y + 2z$ op $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

V3.20 Bepaal de extrema van de functie $\phi\colon (x_1, \ldots, x_n) \mapsto e^{x_1} + \cdots + e^{x_n}$ op $M := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = \alpha\}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

V3.21 Zij $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x, y) := (2x - y)^2 + 3y^2$.
a) Bepaal het absolute maximum van f op $M := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
b) Bepaal m.b.v. a) de norm $\|A\|$ van $A \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ als $A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

V3.22 Bepaal de maximale inhoud van een blokvormige doos (zonder deksel) als de totale oppervlakte van bodem en zijkant 48 cm^2 is.

V3.23 Bepaal in $\mathbb{R}^3$ de afstand van $(0, 0, 0)$ tot $M \subset \mathbb{R}^3$ als
a) $M := \{(x, y, z) \mid z(x + y) = 2\sqrt{2}\}$
b) $M := \{(x, y, z) \mid z(x + y) = 3,\ xy + 4z^2 = 8\}$.

4 Integratie van functies in meer veranderlijken

In syll. Analyse A3, §7.1 gaven we de definitie van Riemann-integreerbaarheid en Riemann-integraal voor begrensde reëelwaardige functies f gedefinieerd op een gesloten begrensd interval $[a, b]$. Er werd daarbij gewerkt met willekeurige eindige partities van $[a, b]$. Bij elke partitie werd een bovensom en een ondersom gemaakt. De functie f heette (Riemann)-integreerbaar als het infimum van de bovensommen gelijk was aan het supremum van de ondersommen, en dit getal was dan per definitie de integraal van f over $[a, b]$. Het meetkundige idee achter deze aanpak was dat (voor positieve f) de integraal van f gelijk is aan het oppervlak onder de grafiek van f en dat zo'n oppervlak benaderd kan worden door het oppervlak van eindig veel rechthoeken waarvan de bovenzijden òf alle onder de grafiek òf alle boven de grafiek liggen. We willen deze aanpak nu generaliseren voor functies gedefinieerd op een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$.

We beginnen met een integratiegebied gegeven door een blok in $\mathbb{R}^n$ zo dat de zijden evenwijdig aan de coördinaatassen lopen. Veel theorie hiervoor is analoog aan de integratietheorie over een interval. We zullen de begrippen onder- en bovenintegraal invoeren. Een functie op een blok is integreerbaar over dat blok desda haar onder- en bovenintegraal aan elkaar gelijk zijn. In plaats van met onder- en bovensommen ter benadering van de onder- en bovenintegraal zullen we ook werken met integralen van z.g. blokfuncties (die altijd integreerbaar zijn). Een nieuw belangrijk resultaat is de Stelling van Fubini die het mogelijk maakt om een integraal over een blok in $\mathbb{R}^n$ te schrijven als n integralen over een interval achtereenvolgens uitgevoerd.

Integratie van een functie over een willekeurige begrensde verzameling X in $\mathbb{R}^n$ kan worden gedefinieerd door de functie uit te breiden tot een blok $B \supset X$ zo dat de functie buiten X gelijk nul is. Als we zo de integraal nemen over X van de functie die identiek gelijk aan 1 is op X, dan hebben we een definitie van het volume van X. Bij al deze zaken is de vraag van integreerbaarheid van groot belang. We noemen X integreerbaar als de functie nodig voor de volumebepaling integreerbaar is. Een integreerbare verzameling met volume 0 noemen we verwaarloosbaar. Het blijkt dat een begrensde verzameling integreerbaar is desda haar rand verwaarloosbaar is. Verzamelingen met enigszins (stuksgewijs) gladde rand, zoals cirkelschijf, inwendige van een driehoek en hun hoger dimensionale analoga zijn integreerbaar. Ook zullen continue functies op integreerbare verzamelingen integreerbaar zijn.

4.1 Integratie over blokken

Een probleemloze uitbreiding van de 1-dimensionale theorie is mogelijk als we een begrensde reëelwaardige functie f beschouwen gedefinieerd op een gesloten begrensd *blok* in $\mathbb{R}^n$ waarvan de zijden evenwijdig aan de coördinaatassen liggen. (Als $n = 2$ gaat het dus om rechthoeken.) Als f positief is dan willen we nu het $(n+1)$-dimensionale volume van de verzameling onder de grafiek van f berekenen. Ook al hebben we nog geen goede definitie van zo'n volume gegeven, toch is het voor de hand liggend om het te benaderen met het volume van een eindige collectie $(n+1)$-dimensionale blokken.

We zullen dit nu in concreto uitwerken, volledig parallel aan syll. Analyse A3, §7.1. Ook alle bewijzen gaan analoog als in het 1-dimensionale geval en worden daarom hier in het algemeen achterwege gelaten. Schrijf echter zelf de bewijzen voor het n-dimensionale geval nog eens uit.

4.1 Zij B een gesloten begrensd blok in $\mathbb{R}^n$ van de vorm

$$\begin{aligned} B :=& \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_j \le x_j \le b_j \quad (j = 1, \ldots, n)\} \\ =& [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n], \end{aligned} \tag{4.1}$$

waarbij $a_j < b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. We definiëren het *volume* van B door

$$\operatorname{vol}(B) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n). \tag{4.2}$$

Laat voor iedere $j \in \{1, \ldots, n\}$ een partitie P_j van $[a_j, b_j]$ gegeven zijn door een rij van $r_j + 1$ getallen $x_{j,0}, x_{j,1}, \ldots, x_{j,r_j}$ zo dat

$$a_j = x_{j,0} < x_{j,1} < \ldots < x_{j,r_j} = b_j. \tag{4.3}$$

Dan noemen we $P := P_1 \times \cdots \times P_n$ een *multipartitie* van het blok B. Zo'n multipartitie geeft aanleiding tot opdeling van B in $r_1 r_2 \ldots r_n$ deelblokken

$$\begin{aligned} B_{i_1,\ldots,i_n} :=& \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{j,i_j-1} \le x_j \le x_{j,i_j} \quad (j = 1, \ldots, n)\} \\ =& [x_{1,i_1-1}, x_{1,i_1}] \times \cdots \times [x_{n,i_n-1}, x_{n,i_n}], \end{aligned}$$

waarbij $i_j = 1, 2, \ldots, r_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. (Voor $n = 2$ krijgen we dus een opdeling van de rechthoek B in deelrechthoeken.)

Bekijk nu een begrensde functie $f\colon B \to \mathbb{R}$. Zij

$$m = m(f) := \inf_{x \in B} f(x) \quad \text{en} \quad M = M(f) := \sup_{x \in B} f(x).$$

Dan zijn m en M dus eindig. Voor ieder deelblok $B_{i_1,\ldots,i_n}$ behorend bij de multipartitie P kunnen we definiëren:

$$m_{i_1,\ldots,i_n} = m_{i_1,\ldots,i_n}(f) := \inf_{x \in B_{i_1,\ldots,i_n}} f(x) \quad \text{en} \quad M_{i_1,\ldots,i_n} = M_{i_1,\ldots,i_n}(f) := \sup_{x \in B_{i_1,\ldots,i_n}} f(x). \tag{4.4}$$

We definiëren vervolgens de *ondersom*

$$s(P) = s(P, f) := \sum_{i_1=1}^{r_1} \ldots \sum_{i_n=1}^{r_n} m_{i_1,\ldots,i_n}(f) \operatorname{vol}(B_{i_1,\ldots,i_n}) \tag{4.5}$$

en de *bovensom*

$$S(P) = S(P, f) := \sum_{i_1=1}^{r_1} \ldots \sum_{i_n=1}^{r_n} M_{i_1,\ldots,i_n}(f) \operatorname{vol}(B_{i_1,\ldots,i_n}). \tag{4.6}$$

4.2 We blijven werken met een gegeven blok B en houden ook de verdere notatie van §4.1 aan.

Definitie We noemen een multipartitie $P' = P'_1 \times \ldots \times P'_n$ een *verfijning* van de multipartitie $P = P_1 \times \ldots \times P_n$ als voor elke $j = 1, \ldots, n$ de partitie P'_j een verfijning is van de partitie P_j. Als $B_{i_1,\ldots,i_n}$ een deelblok is van B t.o.v. een multipartitie P dan zal dit deelblok t.o.v. de verfijning P' van P dus weer verder opsplitsen in deelblokken.

Bij ieder tweetal multipartities P en P' van B is er een *gemeenschappelijke verfijning* P'', i.e., een multipartitie P'' die zowel verfijning van P als P' is. (We kunnen de grofste multipartitie met deze eigenschap kiezen.)

Lemma Zij $f\colon B \to \mathbb{R}$ begrensd. Laten P en P' multipartities van B zijn.
(a) Als P' een verfijning van P is dan geldt er dat $s(P) \le s(P')$ en $S(P) \ge S(P')$.
(b) Voor P en P' willekeurig geldt:

$$m\,\mathrm{vol}(B) \le s(P) \le S(P') \le M\,\mathrm{vol}(B).$$

Geef zelf het bewijs, analoog aan de bewijzen van syll. Analyse A3, Lemmas 7.2, 7.3.

Gevolg Zij $f\colon B \to \mathbb{R}$ begrensd. Definieer de *onderintegraal*

$$\underline{\int}_B f(x)\,dx = \underline{\int}_B f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n := \sup_P s(P) \tag{4.7}$$

en de *bovenintegraal*

$$\overline{\int}_B f(x)\,dx = \overline{\int}_B f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n := \inf_P S(P). \tag{4.8}$$

(Hier wordt het supremum resp. infimum genomen over alle multipartities P van B.) Dan geldt:

$$m\,\mathrm{vol}(B) \le \underline{\int}_B f(x)\,dx \le \overline{\int}_B f(x)\,dx \le M\,\mathrm{vol}(B). \tag{4.9}$$

4.3 Als we in het vervolg zondermeer over een blok in $\mathbb{R}^n$ spreken, dan bedoelen we een gesloten blok van de vorm (4.1).

Definitie Zij $f\colon B \to \mathbb{R}$ een begrensde functie op een blok B in $\mathbb{R}^n$. Dan heet f *Riemann-integreerbaar* (korter *R-integreerbaar* of *integreerbaar*) over B als de onderintegraal (4.7) en de bovenintegraal (4.8) aan elkaar gelijk zijn. Dan noemen we

$$\int_B f(x)\,dx = \int_B f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n := \underline{\int}_B f(x)\,dx = \overline{\int}_B f(x)\,dx \tag{4.10}$$

de *Riemann-integraal* (of korter *R-integraal* of *integraal*) van f over B.

Gevolg Als f integreerbaar is over B dan geldt dat

$$m\,\mathrm{vol}(B) \le \int_B f(x)\,dx \le M\,\mathrm{vol}(B).$$

Het Criterium van Riemann (syll. Analyse A3, Propositie 7.5) kan onmiddellijk gegeneraliseerd worden tot het geval van een n-dimensionaal blok, en het bewijs gaat ook analoog (ga na):

Propositie (*Criterium van Riemann voor integreerbaarheid over een blok*)
Zij $f\colon B \to \mathbb{R}$ een begrensde functie op een blok B in $\mathbb{R}^n$. Dan is f integreerbaar over B desda er voor elke $\varepsilon > 0$ een multipartitie P van B bestaat zo dat $S(P) - s(P) < \varepsilon$.

4.4 Stelling Zij $f\colon B \to \mathbb{R}$ een continue functie op een blok B in $\mathbb{R}^n$. Dan is f integreerbaar over B.

Bewijs Het bewijs is analoog aan het bewijs van Stelling 7.6 in syll. Analyse A3. Merk op dat B een gesloten en begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ is, dus compact. Daarom is de continue functie f begrensd en ook uniform continu (cf. syll. Topologie, Stellingen 6.15 en 6.19). Als nu $\varepsilon > 0$ gegeven is dan kunnen we een multipartitie van B vinden waarbij ieder van de intervallen $[a_i, b_i]$ in m gelijke delen wordt gesplitst met m zo groot dat $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/\mathrm{vol}(B)$ als x en y in een zelfde deelblok t.o.v. de multipartitie liggen. Het is nu gemakkelijk om het bewijs te voltooien (ga na). $\square$

4.5 De analoga van Stellingen 7.12, 7.17 en 7.19 in syll. Analyse A3 gelden hier met analoge bewijzen:

Propositie Als f en g integreerbare functies zijn over een blok B in $\mathbb{R}^n$ en als $c \in \mathbb{R}$, dan zijn $f+g$, cf, fg en $|f|$ integreerbaar over B. De afbeelding $f \mapsto \int_B f(x)\,dx$ is lineair. Ook geldt dat $\left|\int_B f(x)\,dx\right| \le \int_B |f(x)|\,dx$.

Opgave Laten f en g integreerbare functies zijn over een blok B in $\mathbb{R}^n$ en definieer $h_1(x) := \min\{f(x), g(x)\}$, $h_2(x) := \max\{f(x), g(x)\}$. Bewijs dat h_1 en h_2 integreerbaar zijn over B.

4.6 Opmerking Netzo als in syll. Analyse A3, Definitie 7.14 noemen we een complexwaardige functie f op een blok B *integreerbaar* over B als $\mathrm{Re}\, f$ en $\mathrm{Im}\, f$ integreerbaar zijn over B, en definiëren we in het geval van integreerbaarheid de *integraal* van f over B door

$$\int_B f(x)\,dx := \int_B \mathrm{Re}\, f(x)\,dx + i \int_B \mathrm{Im}\, f(x)\,dx.$$

Veel van de voorafgaande en nog volgende resultaten over integratie kunnen ook voor complexwaardige functies geformuleerd worden. We laten de details aan de lezer over.

4.7 Definitie Zij B een blok in $\mathbb{R}^n$ en zij P een multipartitie van B. Laten de $B_{i_1,\ldots,i_n}$ de deelblokken zijn van B die behoren bij de multipartitie P. We noemen een functie $f\colon B \to \mathbb{R}$ een *blokfunctie* of *trapfunctie* op B als f begrensd is en voor elke $i_1, \ldots, i_n$ de functie f beperkt tot het inwendige van het deelblok $B_{i_1,\ldots,i_n}$ gelijk is aan een zekere reële constante $c_{i_1,\ldots,i_n}$.

De waarden die f aanneemt op de randen van de deelblokken $B_{i_1,\ldots,i_n}$ worden dus niet gespecificeerd, maar blijven wel binnen zekere grenzen. Het zal blijken dat deze randwaarden er niet toe doen bij het integreren van f.

Propositie Een blokfunctie f op B, zoals net gedefinieerd, is integreerbaar over B en

$$\int_B f(x)\,dx = \sum_{i_1,\ldots,i_n} c_{i_1,\ldots,i_n}\, \mathrm{vol}(B_{i_1,\ldots,i_n}). \tag{4.11}$$

Bewijs Neem $\delta > 0$ voldoende klein. We verfijnen de multipartitie P uit bovenstaande Definitie tot een multipartitie P_δ zodanig dat, voor elke j, de partitie (4.3) van $[a_j, b_j]$ verfijnd wordt tot

$$a_j = x_{j,0} < x_{j,0} + \delta < x_{j,1} - \delta < x_{j,1} < x_{j,1} + \delta < \ldots$$
$$\ldots < x_{j,r_j-1} - \delta < x_{j,r_j-1} < x_{j,r_j-1} + \delta < x_{j,r_j} - \delta < x_{j,r_j} = b_j.$$

Dan zijn er twee soorten deelblokken van B behorend bij deze nieuwe multipartitie.

- Aan de ene kant is er voor elke $i_1, \ldots, i_n$ een deelblok dat geheel ligt in het inwendige van $B_{i_1,\ldots,i_n}$. Dit deelblok heeft volume $\mathrm{vol}(B_{i_1,\ldots,i_n}) - \mathcal{O}(\delta)$ voor $\delta \downarrow 0$, en f is op dit deelblok gelijk aan de constante $c_{i_1,\ldots,i_n}$.
- Aan de andere kant zijn er voor elke $i_1, \ldots, i_n$ $3^n - 1$ deelblokken die een volume $\mathcal{O}(\delta)$ hebben voor $\delta \downarrow 0$. De functie f is begrensd op deze deelblokken.

We concluderen dat de ondersom $s(P_\delta)$ en bovensom $S(P_\delta)$ van f behorend bij de multipartitie P_δ zich beide gedragen als

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} c_{i_1,\ldots,i_n} \,\mathrm{vol}(B_{i_1,\ldots,i_n}) + \mathcal{O}(\delta) \quad \text{als } \delta \downarrow 0.$$

Dus

$$\overline{\int_B} f(x)\,dx \le \inf_{\delta>0} S(P_\delta) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} c_{i_1,\ldots,i_n} \,\mathrm{vol}(B_{i_1,\ldots,i_n}) = \sup_{\delta>0} s(P_\delta) \le \underline{\int_B} f(x)\,dx.$$

Omdat de bovenintegraal groter dan of gelijk aan de onderintegraal is, zijn bovenstaande ongelijkheden dus gelijkheden. □

4.8 Propositie Zij $f\colon B \to \mathbb{R}$ een begrensde functie op een blok B in $\mathbb{R}^n$. Dan

$$\underline{\int_B} f(x)\,dx = \sup\Big\{\int_B g(x)\,dx \;\mid\; g \text{ is blokfunctie op } B \text{ met } g \le f \text{ op } B\Big\}, \tag{4.12}$$

$$\overline{\int_B} f(x)\,dx = \inf\Big\{\int_B g(x)\,dx \;\mid\; g \text{ is blokfunctie op } B \text{ met } g \ge f \text{ op } B\Big\}. \tag{4.13}$$

Bewijs We bewijzen (4.12). Het bewijs van (4.13) gaat analoog. Gebruik de notatie van §4.1. Zij P een multipartitie van B. Definieer de blokfunctie $h\colon B \to \mathbb{R}$ door

$$h(x) := \begin{cases} m_{i_1,\ldots,i_n} & \text{als } x \text{ ligt in het inwendige van } B_{i_1,\ldots,i_n}, \\ m & \text{voor andere } x. \end{cases}$$

Dan $h \le f$ op B en er volgt uit (4.11) en (4.5) dat $\int_B h(x)\,dx = s(P,f)$. Anderzijds, als g een willekeurige blokfunctie is behorend bij de multipartitie P met $g \le f$, dan $\int g(x)\,dx \le s(P,f)$ (wederom door toepassing van (4.11) en (4.5)). Het resultaat volgt nu uit (4.7). □

4.9 Propositie Laten f en g begrensde reëelwaardige functies zijn op een blok B in $\mathbb{R}^n$, Neem aan dat $f(x) \le g(x)$ voor $x \in B$. Dan

$$\underline{\int_B} f(x)\,dx \le \underline{\int_B} g(x)\,dx \quad \text{en} \quad \overline{\int_B} f(x)\,dx \le \overline{\int_B} g(x)\,dx. \tag{4.14}$$

Als f en g bovendien integreerbaar zijn over B dan geldt

$$\int_B f(x)\,dx \le \int_B g(x)\,dx. \tag{4.15}$$

Als f en g bovendien continu zijn en niet identiek gelijk aan elkaar, dan is de ongelijkheid in (4.15) strikt.

Opgave Bewijs deze Propositie. Voor het bewijs van (4.14) kan òf (4.7) en (4.8) gebruikt worden òf Propositie 4.8. De laatste uitspraak van de Propositie wordt bewezen analoog aan het bewijs in syll. Analyse A3, §7.16.

4.2 De stelling van Fubini

Na al deze theorie is het interessant om te weten hoe we de integraal over een n-dimensionaal blok voor een concreet gegeven functie kunnen berekenen. Een belangrijk gereedschap hierbij is de Stelling van Fubini, die voor voldoende mooie functies doet wat de notatie voor een meervoudige integraal al suggereert: herhaald integreren over lager dimensionale blokken. Bijvoorbeeld, als $B := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ een 2-dimensionaal blok is, dan kunnen we vaak schrijven

$$\int_B f(x, y)\, dx\, dy = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dx \right) dy, \tag{4.16}$$

waarbij in het middelste lid de binnenintegraal een functie van één variabele x levert, die vervolgens door de buitenintegraal geïntegreerd wordt. Het integratieprobleem is dus herleid tot het uitrekenen van twee integralen over een interval, waarvoor we allerlei technieken kennen.

Algemener, als $B := B_1 \times B_2$ met B_1 een blok in $\mathbb{R}^m$ en B_2 een blok in $\mathbb{R}^n$ en als $(x, y) \mapsto f(x, y) \colon B_1 \times B_2 \to \mathbb{R}$ een functie op B is, dan kunnen we vaak schrijven

$$\int_B f(x, y)\, dx\, dy = \int_{B_1} \left(\int_{B_2} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_{B_2} \left(\int_{B_1} f(x, y)\, dx \right) dy. \tag{4.17}$$

Door iteratie van deze formule kunnen we zodoende een integraal over een n-dimensionaal blok terugbrengen tot het achtereenvolgens uitvoeren van n integraties over een interval.

Het zal blijken dat (4.16) en (4.17) exact gelden als f continu is. Voor minder mooie functies kunnen er echter complicaties optreden, waardoor we met onder- of bovenintegralen moeten werken. We kunnen volstaan met een analyse in hoeverre het linkerlid in (4.17) gelijk is aan het middelste lid. Voor de mogelijke gelijkheid van het linkerlid aan het rechterlid gelden soortgelijke beschouwingen.

We bekijken eerst in hoeverre (4.17) voor blokfuncties geldt.

4.10 Lemma Zij B_1 een blok in $\mathbb{R}^m$, B_2 een blok on $\mathbb{R}^n$ en $B := B_1 \times B_2$, dus een blok in $\mathbb{R}^{m+n}$. Zij f een blokfunctie op B, geschreven als $f \colon (x, y) \mapsto f(x, y) \colon B_1 \times B_2 \to \mathbb{R}$. Dan geldt

$$\int_B f(x, y)\, dx\, dy = \int_{B_1} \left(\underline{\int}_{B_2} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_{B_1} \left(\overline{\int}_{B_2} f(x, y)\, dy \right) dx. \tag{4.18}$$

Bewijs Laat f een blokfunctie zijn behorend bij de multipartitie P van B. Dan kunnen we schrijven $P = P_1 \times P_2$, waarbij P_i een multipartitie van B_i is ($i = 1, 2$). Een deelblok $B_{i_1,\ldots,i_m,j_1,\ldots,j_n}$ behorend bij P kunnen we schrijven als het directe product $B_{i_1,\ldots,i_m} \times B_{j_1,\ldots,j_n}$ van twee deelblokken behorend bij de multipartitities P_1 resp. P_2. Nu geldt

$$\begin{aligned} \int_B f(x, y)\, dx\, dy &= \sum_{i_1,\ldots,i_m,j_1,\ldots,j_n} c_{i_1,\ldots,i_m,j_1,\ldots,j_n} \operatorname{vol}(B_{i_1,\ldots,i_m,j_1,\ldots,j_n}) \\ &= \sum_{i_1,\ldots,i_m} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_n} c_{i_1,\ldots,i_m,j_1,\ldots,j_n} \operatorname{vol}(B_{j_1,\ldots,j_n}) \right) \operatorname{vol}(B_{i_1,\ldots,i_m}). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Als x in het inwendige ligt van een deelblok $B_{i_1,\ldots,i_m}$ van B_1 dan zal de functie $y \mapsto f(x,y)$ een blokfunctie zijn op B_2, dus integreerbaar over B_2 met integraal

$$\int_{B_2} f(x,y)\,dy = \sum_{j_1,\ldots,j_n} c_{i_1,\ldots,i_m,j_1,\ldots,j_n} \operatorname{vol}(B_{j_1,\ldots,j_n}), \tag{4.20}$$

dus juist de binnensom in (4.19). Als x op een rand van een deelblok $B_{i_1,\ldots,i_m}$ ligt dan zal de functie $y \mapsto f(x,y)$ mogelijk niet integreerbaar zijn, vandaar het voorkomen van boven- of onderintegralen als binnenintegralen in (4.18). Maar ongeacht deze randwaarden, zullen de functies gegeven door

$$x \mapsto \underline{\int}_{B_2} f(x,y)\,dy \quad \text{of} \quad x \mapsto \overline{\int}_{B_2} f(x,y)\,dy$$

blokfuncties zijn op B_1 behorend bij de multipartitie P_1: voor x in het inwendige van de deelblokken worden deze functies gegeven door (4.20) en voor andere waarden van x zijn ze naar boven begrensd door $M \operatorname{vol}(B_2)$ (M een bovengrens voor de blokfunctie f) en naar beneden begrensd door $m \operatorname{vol}(B_2)$ (m een benedengrens van f) wegens (4.9). Daarom volgt uit (4.20) dat het middelste of rechterlid van (4.18) gelijk is aan (4.19), dus aan het linkerlid van (4.18). $\square$

4.11 Lemma Laat B_1, B_2 en B als in Lemma 4.10 en zij f een begrensde functie op B, geschreven als $f\colon (x,y) \mapsto f(x,y)\colon B_1 \times B_2 \to \mathbb{R}$. Dan

$$\underline{\int}_B f(x,y)\,dx\,dy \le \underline{\int}_{B_1} \left(\underline{\int}_{B_2} f(x,y)\,dy \right) dx \tag{4.21}$$

en

$$\overline{\int}_B f(x,y)\,dx\,dy \ge \overline{\int}_{B_1} \left(\overline{\int}_{B_2} f(x,y)\,dy \right) dx. \tag{4.22}$$

Bewijs We bewijzen alleen (4.21). Het bewijs van (4.22) gaat analoog. Vanwege (4.12) is het linkerlid van (4.21) gelijk aan het supremum van $\int_B g(x,y)\,dx\,dy$ genomen over alle blokfuncties $g \le f$. Vanwege (4.18) is dit gelijk aan het supremum van

$$\underline{\int}_{B_1} \left(\underline{\int}_{B_2} g(x,y)\,dy \right) dx \tag{4.23}$$

genomen over alle blokfuncties $g \le f$. Omdat $g \le f$ op B, zal wegen (4.14) voor alle $x \in B_1$ gelden dat

$$\underline{\int}_{B_2} g(x,y)\,dy \le \underline{\int}_{B_2} f(x,y)\,dy.$$

Beide leden van bovenstaande ongelijkheid zijn, als functies van x, begrensd op B_1 (wegens (4.9)). Door nogmaals (4.14) toe te passen, concluderen we dat het getal gegeven door (4.23) kleiner dan of gelijk aan het rechterlid van (4.21) is. Omdat het linkerlid van (4.21) verkregen wordt als supremum van (4.23), volgt de ongelijkheid (4.21). $\square$

Stelling (*Stelling van Fubini*) Zij B_1 een blok in $\mathbb{R}^m$, B_2 een blok on $\mathbb{R}^n$ en $B := B_1 \times B_2$, dus een blok in $\mathbb{R}^{m+n}$. Zij f een integreerbare functie over B, geschreven als $f\colon (x,y) \mapsto f(x,y)\colon B_1 \times B_2 \to \mathbb{R}$. Dan zijn de functies

$$x \mapsto \underline{\int}_{B_2} f(x,y)\,dy \quad \text{en} \quad x \mapsto \overline{\int}_{B_2} f(x,y)\,dy \tag{4.24}$$

integreerbaar over B_1 en

$$\int_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_{B_1} \left(\underline{\int}_{B_2} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{B_1} \left(\overline{\int}_{B_2} f(x,y)\,dy \right) dx. \tag{4.25}$$

Bewijs Door toepassing van (4.9) en (4.14) liggen

$$\overline{\int}_{B_1} \left(\underline{\int}_{B_2} f(x,y)\,dy \right) dx \quad \text{en} \quad \underline{\int}_{B_1} \left(\overline{\int}_{B_2} f(x,y)\,dy \right) dx$$

ingeklemd tussen het rechterlid van (4.21) (ondergrens) en het rechterlid van (4.22) (bovengrens). Door combinatie met de ongelijkheden (4.21) en (4.22) krijgen we dus twee strings van ongelijkheden:

$$\underline{\int}_B f(x,y)\,dx\,dy \le \underline{\int}_{B_1} \left(\underline{\int}_{B_2} f(x,y)\,dy \right) dx \le \overline{\int}_{B_1} \left(\underline{\int}_{B_2} f(x,y)\,dy \right) dx \le \overline{\int}_B f(x,y)\,dx\,dy,$$

en

$$\underline{\int}_B f(x,y)\,dx\,dy \le \underline{\int}_{B_1} \left(\overline{\int}_{B_2} f(x,y)\,dy \right) dx \le \overline{\int}_{B_1} \left(\overline{\int}_{B_2} f(x,y)\,dy \right) dx \le \overline{\int}_B f(x,y)\,dx\,dy.$$

Omdat f integreerbaar is over B geldt (4.10), dus alle ongelijkheden in de twee bovenstaande strings moeten gelijkheden zijn. $\square$

Gevolg Onder de aannamen van de vorige Stelling, met f bovendien continu op B, is formule (4.17) geldig.

Bewijs Als f continu is, dan is voor elke $x \in B_1$ de functie $y \mapsto f(x,y)$ continu op B_2, dus integreerbaar over B_2. Dus dan mag de onder-, resp. bovenintegraal in bovenstaande Stelling vervangen worden door een gewone integraal. $\square$

4.12 Opmerking Formule (4.17) kan in principe geïtereerd worden. Daarvoor is het wel nodig dat de onder- of bovenintegraal die bij elke volgende toepassing van Stelling 4.11 geproduceerd wordt, een gewone integraal blijkt te zijn. Dit is zeker het geval als f continu is. Als B een blok in $\mathbb{R}^n$ is van de vorm (4.1) dan kunnen we door iteratie van (4.17) uitkomen op

$$\int_B f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\cdots \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n \right) dx_{n-1} \right) \cdots \right) dx_2 \right) dx_1.$$

4.13 Opgave Zij B een blok in $\mathbb{R}^n$ van de vorm (4.1). Laat $f\colon B \to \mathbb{R}$ een functie zijn die factoriseerbaar is als

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n),$$

waarbij f_j integreerbaar is over $[a_j, b_j]$ $(j = 1, \ldots, n)$. Bewijs dat f integreerbaar is over B en dat

$$\int_B f(x)\, dx = \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{a_j}^{b_j} f_j(t)\, dt \right).$$

4.14 **Opmerking** Het volgende voorbeeld laat zien dat de onder- of bovenintegraal als binnenintegraal in Stelling 4.11 essentieel is. We bekijken eerst twee hulpfuncties g en h gedefinieerd op $[0, 1]$. Zij $g(p/q) := 1/q$ als $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leq q$ en p, q onderling ondeelbaar, en $g(x) := 0$ voor andere $x \in [0, 1]$. Zij $h(x) := 1$ als $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ en $h(x) := 0$ voor andere $x \in [0, 1]$. Dan is g integreerbaar over $[0, 1]$ met integraal 0 (ga na), en we hebben in syll. Analyse A, (11.1) gezien dat h niet integreerbaar is over $[0, 1]$, met bovenintegraal 1 en onderintegraal 0.

Zij nu $B := [0, 1] \times [0, 1]$ en definieer $f\colon B \to \mathbb{R}$ door $f(x, y) := g(x)\, h(y)$. Dan is f integreerbaar over B met integraal 0 (ga na). Echter,

$$\underline{\int_0^1} f(x, y)\, dy = g(x) \underline{\int_0^1} h(y)\, dy = 0 \quad \text{en} \quad \overline{\int_0^1} f(x, y)\, dy = g(x) \overline{\int_0^1} h(y)\, dy = g(x).$$

Dus $y \mapsto f(x, y)$ is niet integreerbaar over $[0, 1]$ als $x \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$, maar (4.24) en (4.25) zijn geldig, zoals we onmiddellijk concreet kunnen nagaan.

4.3 Integreerbare verzamelingen

Tot nu toe hebben we alleen integralen van functies over blokken bekeken. Al zijn blokken uiterst handig als bouwstenen, ze behoren toch niet tot de boeiendste verzamelingen. We zouden ons integraalbegrip graag willen uitbreiden tot integralen over meer algemene verzamelingen. Het idee is uiterst eenvoudig.

4.15 Definitie Zij X een begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en zij $f\colon X \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. We noemen f *integreerbaar* over X als voor zeker blok B dat X omvat geldt dat de functie $\widetilde{f}\colon B \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{als } x \in X, \\ 0 & \text{als } x \in B \backslash X, \end{cases} \tag{4.26}$$

integreerbaar is over B. Dan definiëren we de *integraal* van f over X door

$$\int_X f(x)\, dx := \int_B \widetilde{f}(x)\, dx.$$

Algemener, voor niet noodzakelijk integreerbare $\widetilde{f}$, definiëren we de *onder- en bovenintegraal* van f over X door

$$\underline{\int_X} f(x)\, dx := \underline{\int_B} \widetilde{f}(x)\, dx \quad \text{en} \quad \overline{\int_X} f(x)\, dx := \overline{\int_B} \widetilde{f}(x)\, dx.$$

Opgave De bovenstaande definities zijn onafhankelijk van de keuze van het X omvattende blok B. Immers, laten B en B' blokken zijn die X omvatten. Dan omvat het blok $B'' := B \cap B'$ eveneens X. Bewijs nu met behulp van (4.7) dat, als $\widetilde{f}$ de uitbreiding van f tot B is (als in (4.26)), dan

$$\underline{\int}_B \widetilde{f}(x)\,dx = \underline{\int}_{B''} \widetilde{f}(x)\,dx \quad \text{en} \quad \overline{\int}_B \widetilde{f}(x)\,dx = \overline{\int}_{B''} \widetilde{f}(x)\,dx.$$

4.16 In het bijzonder kunnen we Definitie 4.15 gebruiken om te definiëren wanneer de verzameling X integreerbaar is:

Definitie Zij X een begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. De verzameling X heet *integreerbaar* als de functie op X identiek gelijk 1 integreerbaar is over X. We definiëren het (n-dimensionale) *volume* van een integreerbare verzameling X door

$$\operatorname{vol}(X) = \int_X dx := \int_X 1\,dx = \int_B \chi_X(x)\,dx, \tag{4.27}$$

waarbij B een blok is dat X omvat en χ_X de karakteristieke functie van X is.
De verzameling X heet *verwaarloosbaar* als X integreerbaar is en $\operatorname{vol}(X) = 0$.

Merk op dat Definitie (4.27) compatibel is met (4.2) voor het geval dat X zelf een blok is. Als X een integreerbare deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ is dan zullen we i.p.v. het (2-dimensionale) volume van X vaak spreken van de *oppervlakte* van X.

De definities integreerbaarheid, volume en verwaarloosbaarheid van een verzameling X hangen uiteraard af van de dimensie van de ruimte $\mathbb{R}^n$ waarbinnen we X bekijken. Bijvoorbeeld, het interval $[0,1]$ als deelverzameling van $\mathbb{R}$ heeft volume (i.e. lengte) 1, maar ditzelfde interval, opgevat als deelverzameling $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1\}$ van $\mathbb{R}^2$ heeft volume (i.e. oppervlakte) 0.

Opgave Bewijs dat voor een willekeurige begrensde deelverzameling X van $\mathbb{R}^n$ de volgende drie uitspraken equivalent zijn:
(i) X is verwaarloosbaar.
(ii) $\overline{\int}_X 1\,dx = 0$.
(iii) Bij iedere $\varepsilon > 0$ is er een integreerbare verzameling $Y \subset \mathbb{R}^n$ met $X \subset Y$ en $\operatorname{vol}(Y) < \varepsilon$.

4.17 Propositie Zij $M > 0$ en $f\colon [a,b] \to [0,M]$ integreerbaar over $[a,b]$. Dan is de verzameling $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ 0 \le y \le f(x)\}$ een integreerbare deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ met oppervlakte gelijk aan $\int_a^b f(x)\,dx$.

Zij algemener $X \subset \mathbb{R}^n$ begrensd, $M > 0$, en $f\colon X \to [0,M]$ integreerbaar over X. Dan is de verzameling $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in X,\ 0 \le y \le f(x)\}$ een integreerbare deelverzameling van $\mathbb{R}^{n+1}$ met volume gelijk aan $\int_X f(x)\,dx$.

Opgave Bewijs het eerste deel (over 2-dimensionale verzamelingen) van bovenstaande Propositie. Bewijs als facultatieve Opgave ook het tweede deel van de de Propositie.

4.18 Opgave Laten X en Y integreerbare deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}^n$.
(a) Bewijs dat $X \cup Y$, $X \cap Y$ en $X \setminus Y$ integreerbare verzamelingen zijn.
(b) Bewijs dat $\mathrm{vol}(X \cup Y) \leq \mathrm{vol}(X) + \mathrm{vol}(Y)$.
(c) Neem aan dat bovendien $X \cap Y$ verwaarloosbaar is (wat bijv. het geval is als X en Y disjunct zijn). Bewijs dat $\mathrm{vol}(X \cup Y) = \mathrm{vol}(X) + \mathrm{vol}(Y)$.
(d) Bewijs dat een eindige vereniging van verwaarloosbare deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ weer verwaarloosbaar is.

Aanwijzing Pas de resultaten van de Propositie en Opgave in §4.5 toe op de karakteristieke functies van X en Y.

4.19 Opgave Bewijs dat de uitspraken van de Propositie en Opgave in §4.5 blijven gelden voor integreerbare functies over een willekeurige begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Dus:

Als f en g integreerbare functies zijn over een begrensde deelverzameling X van $\mathbb{R}^n$ en als $a, b \in \mathbb{R}$ dan zijn $af + bg$, fg, $|f|$, $\min\{f, g\}$ en $\max\{f, g\}$ integreerbaar over X en er geldt dat

$$\int_X (af(x) + bg(x))\, dx = a \int_X f(x)\, dx + b \int_X g(x)\, dx, \qquad \left| \int_X f(x)\, dx \right| \leq \int_X |f(x)|\, dx.$$

4.20 Opgave Zij $X \subset \mathbb{R}^n$ verwaarloosbaar. Bewijs dat elke begrensde functie $f\colon X \to \mathbb{R}$ integreerbaar is over X met integraal 0.

4.21 Stelling Zij $X \subset \mathbb{R}^n$ begrensd. Dan zijn equivalent:
(i) X is integreerbaar.
(ii) De rand ∂X van X is verwaarloosbaar.

Bewijs We bewijzen eerst de implicatie (i)$\Rightarrow$(ii). Dus neem aan dat X integreerbaar is. Het idee van het bewijs is dat de afsluiting $\overline{X}$ overdekt kan worden met eindig veel gesloten blokken en het inwendige X^0 de inwendigen van een deelcollectie van deze blokken omvat, zo dat de restcollectie van de blokken (die de rand ∂X omvatten) gezamenlijk een willekeurig klein volume hebben.

Zij X integreerbaar en zij $B \supset X$ een blok. Dan is χ_X integreerbaar over B. Laat $\varepsilon > 0$. Wegens Propositie 4.3 bestaat er een multipartitie P van B zo dat $S(P, \chi_X) - s(P, \chi_X) < \varepsilon$. Laten de $B_{\mathbf{i}}$ ($\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_n)$) de deelblokken zijn van B behorend bij P. Dan geldt:

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{i}} &= 1 \quad \text{als} \quad B_{\mathbf{i}} \subset X \qquad \text{en anders} \quad = 0; \\ M_{\mathbf{i}} &= 1 \quad \text{als} \quad B_{\mathbf{i}} \cap X \neq \emptyset \qquad \text{en anders} \quad = 0. \end{aligned}$$

Dus

$$\sum_{\mathbf{i};\, B_{\mathbf{i}} \cap X \neq \emptyset} \mathrm{vol} B_{\mathbf{i}} - \sum_{\mathbf{i};\, B_{\mathbf{i}} \subset X} \mathrm{vol} B_{\mathbf{i}} < \varepsilon. \tag{4.28}$$

Omdat de verzameling $\cup_{\mathbf{i};\, B_{\mathbf{i}} \cap X \neq \emptyset} B_{\mathbf{i}}$ gesloten is (eindige vereniging van gesloten verzamelingen) en X omvat, zal deze ook de afsluiting $\overline{X}$ van X omvatten:

$$Z := \bigcup_{\mathbf{i};\, B_{\mathbf{i}} \cap X \neq \emptyset} B_{\mathbf{i}} \supset \overline{X}.$$

Omdat de verzameling $\cup_{\mathbf{i};\, B_\mathbf{i} \subset X} (B_\mathbf{i})^0$ open is (vereniging van open verzamelingen) en in X bevat is, zal deze ook in het inwendige X^0 van X bevat zijn:

$$Y := \bigcup_{\mathbf{i};\, B_\mathbf{i} \subset X} (B_\mathbf{i})^0 \subset X^0.$$

Dus $Z \supset \overline{X} \supset X^0 \supset Y$,

$$\text{dus} \quad \partial X = \overline{X} \backslash X^0 \subset Z \backslash Y, \quad \text{en dus} \quad \chi_{\partial X}(x) \leq \chi_{Z \backslash Y}(x) \quad (x \in B).$$

Merk op dat $\chi_{Z \backslash Y}$ een blokfunctie is behorend bij de multipartitie P en dat wegens (4.11) de ongelijkheid (4.28) herschreven kan worden als

$$\int_B \chi_{Z \backslash Y}(x)\, dx < \varepsilon.$$

Er volgt wegens (4.14) dat

$$\overline{\int_B} \chi_{\partial X}(x)\, dx < \varepsilon.$$

Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig gekozen was, is het linkerlid van bovenstaande ongelijkheid dus gelijk aan 0, wat impliceert dat ∂X verwaarloosbaar is (cf. Opgave 4.16).

Vervolgens bewijzen we de implicatie (ii)$\Rightarrow$(i). We hebben de volgende simpele eigenschap nodig: Zij $X \subset \mathbb{R}^n$ en zij B een blok dat lege doorsnede heeft met de rand van X. Dan ligt òf B geheel binnen X^0 òf geheel buiten $\overline{X}$. Immers, de samenhangende verzameling B is de disjuncte vereniging van zijn twee open deelverzamelingen $B \cap X^0$ en $B \backslash \overline{X}$, dus een van beide deelverzamelingen moet leeg zijn.

Zij nu ∂X verwaarloosbaar en zij $B \supset \overline{X} \supset \partial X$ een blok. Dan is $\chi_{\partial X}$ integreerbaar over B met integraal 0. Kies $\varepsilon > 0$. Dan bestaat er een multipartitie P van B zo dat $S(P, \chi_{\partial X}) < \varepsilon$. Laten de $B_\mathbf{i}$ ($\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_n)$) de deelblokken zijn van B behorend bij P. De in de vorige alinea vermelde eigenschap levert dan dat voor elke $\mathbf{i}$ met $B_\mathbf{i} \cap \overline{X} \neq \emptyset$ geldt: òf $B_\mathbf{i} \cap \partial X \neq \emptyset$, òf $B_\mathbf{i} \subset X^0$. Dus

$$\begin{aligned} S(P, \chi_{\overline{X}}) = \sum_{\mathbf{i};\, B_\mathbf{i} \cap \overline{X} \neq \emptyset} \mathrm{vol}(B_\mathbf{i}) &= \sum_{\mathbf{i};\, B_\mathbf{i} \cap \partial X \neq \emptyset} \mathrm{vol}(B_\mathbf{i}) + \sum_{\mathbf{i};\, B_\mathbf{i} \subset X^0} \mathrm{vol}(B_\mathbf{i}) \\ &= S(P, \chi_{\partial X}) + s(P, \chi_{X^0}). \end{aligned}$$

Omdat

$$\overline{\int_B} \chi_X(x)\, dx \leq S(P, \chi_{\overline{X}}) \quad \text{en} \quad \underline{\int_B} \chi_X(x)\, dx \geq s(P, \chi_{X^0})$$

(ga na), en omdat $S(P, \chi_{\partial X}) < \varepsilon$, volgt er dat

$$\overline{\int_B} \chi_X(x)\, dx - \underline{\int_B} \chi_X(x)\, dx < \varepsilon.$$

Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig was gekozen volgt er dat boven- en onderintegraal van χ_X over B aan elkaar gelijk zijn. Dit bewijst de integreerbaarheid van X. $\square$

4.22 Opgave Laten $X_1, \ldots, X_k$ integreerbare deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}^n$ zo dat voor alle i, j $(i \neq j)$ geldt dat $X_i \cap X_j \subset \partial X_i$.

(a) Bewijs dat $X := \cup_{i=1}^k X_i$ integreerbaar is en dat

$$\mathrm{vol}(X) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{vol}(X_i).$$

(b) Zij $f\colon X \to \mathbb{R}$. Bewijs dat f integreerbaar is over X desda als voor alle $i = 1, \ldots k$ de functie f (beperkt tot X_i) integreerbaar is over X_i. Bewijs dat, als f integreerbaar is over X, dan

$$\int_X f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{X_i} f(x)\,dx.$$

4.23 De randen van de meest vertrouwde gebieden in $\mathbb{R}^n$, bijvoorbeeld een bal of een simplex (in $\mathbb{R}^2$ een cirkelschijf of driehoekig gebied) blijken integreerbaar te zijn, omdat hun rand verwaarloosbaar is. Ruwweg is het idee dat deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ die zelf van lagere dimensie zijn en een zekere gladheid hebben, verwaarloosbaar zijn. Eindige verenigingen van zulke verzamelingen zijn weer verwaarloosbaar (cf. Opgave 4.18). De zaak berust op de volgende Propositie.

Propositie Zij $m < n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ begrensd en $\phi\colon V \to \mathbb{R}^n$ een Lipschitz-afbeelding, i.e., er is een $C > 0$ zo dat

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq C\,|x - y| \quad (x, y \in V). \tag{4.29}$$

Dan is $W := \phi(V)$ verwaarloosbaar.

Bewijs Zij $V \subset B$, waarbij B een kubisch blok is met zijden van lengte L. Maak een multipartitie P van B zo dat elke zijde in N gelijke delen wordt verdeeld. Dan geldt voor ieder deelblok $B_{\mathbf{i}}$ behorend bij deze partitie dat de afstand tussen twee punten in $V \cap B_{\mathbf{i}}$ hoogstens gelijk is aan $N^{-1}\, m^{\frac{1}{2}}\, L$. Dus de maximale afstand tussen twee punten in $\phi(V \cap B_{\mathbf{i}})$ is hoogstens gelijk aan $N^{-1}\, m^{\frac{1}{2}}\, LC$, dus $\phi(V \cap B_{\mathbf{i}})$ is bevat in een kubisch blok $\widetilde{B}_{\mathbf{i}}$ met gelijke zijden van lengte $N^{-1}\, m^{\frac{1}{2}}\, 2LC$. Dus $\mathrm{vol}(\widetilde{B}_{\mathbf{i}}) = N^{-n}\, (m^{\frac{1}{2}}\, 2LC)^n$. Nu is W bevat in de vereniging van de N^m blokken $\widetilde{B}_{\mathbf{i}}$, dus W is bevat in een integreerbare verzameling met volume hoogstens gelijk aan $N^{-(n-m)}\, (m^{\frac{1}{2}}\, 2LC)^n$ (cf. Opgave 4.18). Omdat N willekeurig gekozen was, volgt er met behulp van Opgave 4.16 dat W verwaarloosbaar is.

Gevolg Zij $m < n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ open, $K \subset V$ compact en $\phi\colon V \to \mathbb{R}^n$ een C^1-afbeelding. Dan is $\phi(K) \subset \mathbb{R}^n$ verwaarloosbaar.

Bewijs Neem voor ieder punt x van K een open bal U_x in $\mathbb{R}^m$ met middelpunt x zo dat $\overline{U_x} \subset V$. De U_x $(x \in K)$ vormen een open overdekking van K, dus hebben wegens compactheid van K een eindige deeloverdekking. Noem de ballen in deze deeloverdekking $U_1, \ldots, U_r$. Dan $\overline{U_i} \subset V$. Neem een vaste i. Omdat $\overline{U_i}$ compact is en ϕ' continu, zal voor zekere $C > 0$ gelden dat $\|\phi'(x)\| \leq C$ $(x \in \overline{U_i})$. Omdat U_i convex is, volgt er dat (4.29) geldt voor $x, y \in U_i$ (cf. syll. Analyse B1, Stelling 5.5). Dus uit de voorgaande Propositie volgt dat $\phi(K \cap U_i)$ verwaarloosbaar is. Dus ook $\phi(K)$, als vereniging van de verzamelingen $\phi(K \cap U_i)$, is verwaarloosbaar. $\square$

4.24 We kunnen Stelling 4.4 nu uitbreiden tot het geval van een continue functie op een compacte integreerbare deelverzameling van $\mathbb{R}^n$.

Stelling Zij $X \subset \mathbb{R}^n$ compact en integreerbaar. Zij $f\colon X \to \mathbb{R}$ continu. Dan is f integreerbaar over X.

Bewijs Zij $B \supset X$ een blok. Kies $\varepsilon > 0$. Wegens Stelling 4.21 is ∂X verwaarloosbaar. Dus er is een multipartitie P van B zo dat $S(P, \chi_{\partial X}) < \varepsilon$. De continue functie f is begrensd en uniform continu op de compacte verzameling X (cf. syll. Topologie, Stellingen 6.15 en 6.19). Laat $M := \max\{|f(x)| \mid x \in X\}$. Vanwege de uniforme continuïteit is er een $\delta > 0$ zo dat $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ als $x, y \in X$ en $|x - y| < \delta$. Dus in een blok geheel binnen X met zijden van lengte $< \delta/\sqrt{n}$ kunnen de door f aangenomen waarden hoogstens ε variëren. Door eventueel een verfijning van de multipartitie te nemen, mogen we aannemen dat voor de nieuwe multipartitie P van B elk deelblok $B_{\mathbf{i}}$ dat geheel binnen X ligt de eigenschap heeft dat $M_{\mathbf{i}} - m_{\mathbf{i}} \leq \varepsilon$, waarbij $M_{\mathbf{i}}$ en $m_{\mathbf{i}}$ gedefinieerd zijn door (4.4). Voor de verfijnde multipartitie zal nog steeds gelden dat $S(P, \chi_{\partial X}) < \varepsilon$. We breiden f nu uit tot een functie $\widetilde{f}\colon B \to \mathbb{R}$ zoals in (4.26). We willen nu de som

$$S(P, \widetilde{f}) - s(P, \widetilde{f}) = \sum_{\mathbf{i}} (M_{\mathbf{i}}(\widetilde{f}) - m_{\mathbf{i}}(\widetilde{f}))\,\mathrm{vol}(B_{\mathbf{i}})$$

afschatten teneinde het criterium van Riemann (Propositie 4.3) te kunnen toepassen. Merk op dat

$$M_{\mathbf{i}}(\widetilde{f}) - m_{\mathbf{i}}(\widetilde{f}) \leq \begin{cases} \varepsilon & \text{als } B_{\mathbf{i}} \subset X, \\ 2M & \text{als } B_{\mathbf{i}} \cap \partial X \neq \emptyset, \\ 0 & \text{als } B_{\mathbf{i}} \cap X = \emptyset. \end{cases}$$

Voor iedere $\mathbf{i}$ valt $B_{\mathbf{i}}$ onder een van de drie gevallen. Dus

$$\begin{aligned} S(P, \widetilde{f}) - s(P, \widetilde{f}) \leq& \varepsilon \left(\sum_{\mathbf{i};\, \mathbf{B_i} \subset \mathbf{X}} \mathrm{vol}(B_{\mathbf{i}}) \right) + 2M \left(\sum_{\mathbf{i};\, \mathbf{B_i} \cap \partial \mathbf{X} \neq \emptyset} \mathrm{vol}(B_{\mathbf{i}}) \right) \\ =& \varepsilon\, s(P, \chi_X) + 2M\, S(P, \chi_{\partial X}) \leq \varepsilon(\mathrm{vol}(X) + 2M). \end{aligned}$$

Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig was, volgt er uit het criterium van Riemann dat $\widetilde{f}$ integreerbaar is over B, dus f is integreerbaar over X. □

4.25 Voorbeeld Zij $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, dus de gesloten cirkelschijf van straal 1 met middelpunt $(0, 0)$. De afbeelding $t \mapsto (\cos t, \sin t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ is C^1 en beeldt de compacte deelverzameling $[0, 2\pi]$ van $\mathbb{R}$ surjectief af op ∂X (de eenheidscirkel). Dus ∂X is verwaarloosbaar wegens Gevolg 4.23, dus X is integreerbaar wegens Stelling 4.21. Dus de functie χ_X is integreerbaar over het blok $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in [-1, 1]\} \supset X$ en

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(X) &= \int_B \chi_X(x, y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left(\underline{\int}_{[-1,1]} \chi_X(x, y)\, dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1 - x^2}\, dx = \pi, \end{aligned}$$

waarbij we de Stelling van Fubini (Stelling 4.11) gebruikten en de laatste gelijkheid uitrekenden met standaardtechnieken voor integratie van functies in een veranderlijke. We gebruikten ook dat de functie $y \mapsto \chi_X(x,y) = \chi_{[-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}]}(y)$ integreerbaar is over $[-1,1]$.

Als $f\colon X \to \mathbb{R}$ een continue functie is op de gesloten cirkelschijf X dan is f integreerbaar over X wegens Stelling 4.24 en we kunnen de integraal van f over X weer met de Stelling van Fubini uitrekenen als boven. Breid f uit tot een functie $\widetilde{f}\colon B \to \mathbb{R}$ als in Definitie 4.15. Nu geldt:

$$\begin{aligned}\int_X f(x,y)\,dx\,dy = \int_B \widetilde{f}(x,y)\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1}\left(\underline{\int}_{[-1,1]} \widetilde{f}(x,y)\,dy\right)dx\\ &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx.\end{aligned}$$

Hierbij mochten we in de binnenintegraal de onderintegraal herschrijven als een gewone integraal omdat $y \mapsto \widetilde{f}(x,y)$ als stuksgewijs continue functie integreerbaar is over $[-1,1]$. Voor een concreet gegeven functie f, bijv. $f(x,y) := x^2y^2$, kun je proberen de berekening verder af te maken door eerst de binnenintegraal uit te rekenen voor vaste x en vervolgens de buitenintegraal.

4.26 Opgave Het volgende voorbeeld laat zien dat bij toepassing van formule (4.16) het soms van belang is voor het verkrijgen van een expliciet antwoord of we met het middelste lid of het rechterlid van (4.16) gaan rekenen. Zij $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}x \le y \le x \text{ en } 0 \le y \le 1\}$. Zij $f\colon X \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x,y) := y^2\,e^{y^2}$. Bepaal $\int_X f(x,y)\,dx\,dy$.

Aanwijzing Breid f uit tot een functie op het blok $B := [0,2] \times [0,1]$ die 0 is buiten X. Rechtvaardig dat formule (4.16) in deze situatie geldt en probeer zowel het middelste lid als het rechterlid van (4.16) uit te rekenen.

Verdere vraagstukken

V4.1 Zij $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1 \text{ en } x,y \ge 0\}$. Bereken:

a) $\displaystyle\int_X xy\,e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$, b) $\displaystyle\int_X (y-x)\,dx\,dy$.

Verklaar het antwoord van b).

V4.2 Bereken

$$\int_0^1 \left(\int_{y\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\,dx\right)dy.$$

V4.3 Bereken de oppervlakte van de begrensde verzameling in $\mathbb{R}^2$ begrensd door de lijn $x = y$ en de parabool $y^2 = 2x$.

V4.4 Bereken de oppervlakte van de verzameling $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \le 4,\ 0 \le y \le x \le 3\}$.

V4.5 Bereken de oneigenlijke integraal

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx.$$

Aanwijzing Bereken eerst de integraal van a tot b $(0 < a < b)$ met zelfde integrand als boven. Bepaal hiertoe ook $\int_1^2 e^{-tx}\, dt$. Neem vervolgens de limieten voor $a \downarrow 0$ en $b \to \infty$.

V4.6 Bereken het volume van de verzameling X in $\mathbb{R}^3$ liggend onder de paraboloïde $x^2 + y^2 - z = 0$ en boven de rechthoek $[0,1] \times [0,2]$, dus van X:=$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0,1],\ y \in [0,2],\ 0 < z < x^2 + y^2\}$.

V4.7 Bereken het volume van de begrensde verzameling in $\mathbb{R}^3$ begrensd door de parabolische cylinder $x^2 + z = 4$ en de vlakken $x = 0$, $y = 0$, $y = 4$ en $z = 0$.

V4.8 Zij X de begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^3$ begrensd door de vlakken $x+y+z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ en $z = 0$. Bereken

$$\int_X \frac{dx\, dy\, dz}{(1 + x + y + z)^3}\,.$$

V4.9 Zij X de begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^3$ begrensd door de eenbladige hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en de vlakken $z = 0$ en $z = 1$. Bereken $\int_X z\, dx\, dy\, dz$.

V4.10 a) Bereken het volume van de bal $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2\}$ in $\mathbb{R}^3$.

b) Zij X een integreerbare deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en $\lambda > 0$. Bewijs dat $Y := \{\lambda x \mid x \in X\}$ een integreerbare deelverzameling is van $\mathbb{R}^n$ en dat $\mathrm{vol}(Y) = \lambda^n \mathrm{vol}(X)$.

c) Zij $B_{n,r}$ de bal $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le r\}$ in $\mathbb{R}^n$. Bewijs dat

$$\mathrm{vol}(B_{n,1}) = \int_{-1}^1 \mathrm{vol}(B_{n-1,\sqrt{1-t^2}})\, dt.$$

d) Bereken $\dfrac{\mathrm{vol}(B_{n,1})}{\mathrm{vol}(B_{n-1,1})}$. (Gebruik formules (7.33) en (7.34) in syll. Analyse A3.)

e) Bewijs dat

$$\mathrm{vol}(B_{2n,1}) = \frac{\pi^n}{n!}\,, \qquad \mathrm{vol}(B_{2n+1,1}) = \frac{2\pi^n}{(\frac{3}{2})_n}\,. \tag{4.30}$$

5 Transformaties in meervoudige integralen

Uit de integratietheorie van functies van één veranderlijke kennen we de formule betreffende de transformatie van integratievariabele (cf. syll. Analyse A3, Opmerking 7.28). We kunnen de twee daar gegeven gevallen als volgt samenvatten. Zij $\phi\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ een C^1-diffeomorfisme. I.h.b. is dus $\phi'(x) \neq 0$ als $x \in [\alpha,\beta]$ en heeft $\phi'(x)$ het zelfde teken voor alle x. Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu. Dan geldt:

$$\int_a^b f(y)\,dy = \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,|\phi'(x)|\,dx. \tag{5.1}$$

We moeten hier de absolute waarde van $\phi'(x)$ nemen omdat we $a < b$ en $\alpha < \beta$ hebben verondersteld, terwijl het zou kunnen zijn dat ϕ de richting van het interval juist omklapt. We kunnen (5.1) ook schrijven als volgt:

$$\int_{\phi([\alpha,\beta])} f(y)\,dy = \int_{[\alpha,\beta]} f(\phi(x))\,|\phi'(x)|\,dx. \tag{5.2}$$

Voor de generalisatie van deze formule voor het geval van meer veranderlijken werken we met een C^1-diffeomorfisme $\phi\colon U \to V$, waarbij U en V open deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}^n$. Als nu $X \subset U$ en $Y := \phi(X) \subset V$ compacte integreerbare deelverzamelingen zijn en de functie $f\colon Y \to \mathbb{R}$ continu is dan zal gelden:

$$\int_{\phi(X)} f(y)\,dy = \int_X f(\phi(x))\,|J_\phi(x)|\,dx, \tag{5.3}$$

waarbij $J_\phi(x) := \det \phi'(x)$ de Jacobiaan van ϕ in het punt x is, cf. Definitie 3.6. Het is duidelijk dat (5.2) een speciaal geval van (5.3) is.

Formule (5.3) is van zeer groot praktisch belang voor het concreet uitrekenen van meervoudige integralen. In allerlei theoretische beschouwingen, met name bij integratie over een differentieerbare variëteit, is de formule ook cruciaal. We zullen hier geen volledig bewijs van (5.3) geven, maar wel vrij gedetailleerd de stappen schetsen die nodig zijn om de formule te bewijzen. Zie Duistermaat & Kolk [3] voor meer details.

5.1 *Voorbereiding*

Zij B een blok in $\mathbb{R}^n$ en zij $f\colon B \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. In Propositie 4.8 hebben we gezien dat de onderintegraal van f over B van onderen benaderd kan worden door integralen van blokfuncties $g \leq f$. Ook kan de bovenintegraal van f over B van boven benaderd worden door integralen van blokfuncties $h \geq f$. De rol van blokfuncties in deze Propositie kan worden overgenomen door continue functies:

5.1 Propositie Zij $f\colon B \to \mathbb{R}$ een begrensde functie op een blok B in $\mathbb{R}^n$. Dan geldt:

$$\underline{\int}_B f(x)\,dx = \sup\Big\{\int_B g(x)\,dx \;\mid\; g \text{ is continue functie op } B \text{ met } g \leq f\Big\},$$

$$\overline{\int}_B f(x)\,dx = \inf\Big\{\int_B g(x)\,dx \;\mid\; g \text{ is continue functie op } B \text{ met } g \geq f\Big\}.$$

Gevolg Zij $f\colon B \to \mathbb{R}$ een begrensde functie op een blok B in $\mathbb{R}^n$. Dan is f integreerbaar over B desda er bij elke $\varepsilon > 0$ continue functies g en h op B zijn zo dat $g \leq f \leq h$ en $\int_B (h(x) - g(x))\,dx < \varepsilon$.

De Propositie volgt uit Propositie 4.8 als we kunnen inzien dat er bij elke blokfunctie f op B en bij elke $\varepsilon > 0$ er continue functies g en h zijn op B zo dat $g \leq f \leq h$ en

$$\int_B g(x)\,dx > \int_B f(x)\,dx - \varepsilon, \qquad \int_B h(x)\,dx < \int_B f(x)\,dx + \varepsilon.$$

Dit laatste is direct duidelijk in het geval van één variabele (ga na). Voor de continue functies kunnen stuksgewijs lineaire functies genomen worden. Met iets meer werk kun je het ook inzien voor het n-dimensionale geval.

5.2 We willen een variant van Gevolg 5.1 formuleren voor het geval dat f een begrensde functie is op een willekeurige begrensde deelverzameling X van $\mathbb{R}^n$. De rol van de continue functies kan nu worden overgenomen door continue functies met compacte drager.

Definitie Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ open en $f\colon E \to \mathbb{C}$ continu. De *drager* van f wordt gedefinieerd als de afsluiting in U van de verzameling $\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}$. De drager is dus de kleinste gesloten deelverzameling van U waarbuiten de functie f identiek 0 is. De drager wordt genoteerd met $\mathrm{supp}(f)$ (naar het Engelse woord *support* voor drager).

Bijvoorbeeld, de functie $f\colon x \mapsto \sin x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heeft drager $\mathbb{R}$. De functie $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zo dat $g(x) := \sin x$ voor $x \in [-\pi, \pi]$ en $g(x) := 0$ voor andere x heeft drager $[-\pi, \pi]$ (compact). De functie $f\colon x \mapsto x^{-1}(1-x)^{-1}\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ heeft drager $(0,1)$.

We zijn vooral geïnteresseerd in het geval dat de drager van een functie een compacte verzameling is. Voor $U \subset \mathbb{R}^n$ open duiden we de klasse van alle functies $f\colon U \to \mathbb{R}$ met *compacte drager* aan met $C_c(U)$. (In de literatuur worden meestal ook complexwaardige functies op U met compacte drager tot deze klasse gerekend.) Een functie $f \in C_c(U)$ zullen we stilzwijgend ook opvatten als een functie $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ door $f(x) := 0$ te stellen voor $x \notin U$. Voor $f \in C_c(U)$ definiëren we

$$\int_U f(x)\,dx := \int_B f(x)\,dx \quad (B \text{ een blok zo dat } \mathrm{supp}(f) \subset B).$$

De definitie is onafhankelijk van de keuze van B en het is niet vereist dat $B \subset U$.

5.3 Nu kunnen we het analogon van de Propositie en het Gevolg uit §5.1 voor integratie over een begrensde verzameling opschrijven. We gebruiken daarbij een notatie als in (4.26): Als $X \subset \mathbb{R}^n$ en $f\colon X \to \mathbb{R}$, breid dan f uit tot een functie $\widetilde{f}$ op $\mathbb{R}^n$ door

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{als } x \in X, \\ 0 & \text{als } x \in \mathbb{R}^n \backslash X. \end{cases}$$

Propositie Zij $f\colon X \to \mathbb{R}$ een begrensde functie op een begrensde deelverzameling X van $\mathbb{R}^n$. Dan geldt:

$$\underline{\int}_X f(x)\,dx = \sup\Big\{\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx \;\mid\; g \in C_c(\mathbb{R}^n) \text{ met } g \leq \widetilde{f}\Big\},$$

$$\overline{\int}_X f(x)\,dx = \inf\Big\{\int_X g(x)\,dx \;\mid\; g \in C_c(\mathbb{R}^n) \text{ met } g \geq \widetilde{f}\Big\}.$$

Verder is f integreerbaar over X desda er bij elke $\varepsilon > 0$ functies g en h in $C_c(\mathbb{R}^n)$ zijn zo dat $g \leq \widetilde{f} \leq h$ en $\int_{\mathbb{R}^n} (h(x) - g(x))\,dx < \varepsilon$.

Het bewijs gebruikt dat integreerbaarheid van f over X per definitie hetzelfde is als integreerbaarheid van $\widetilde{f}$ over een blok $B \supset X$. Ook wordt gebruikt dat, als A en B blokken zijn met $A \subset B^0$, er dan een $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ is met $0 \le g \le \chi_B$ en $g(x) = 1$ als $x \in A$.

5.2 *Affiene transformaties*

5.4 Er zijn drie types transformatie van de integratievariabelen $x_1, \ldots, x_n$ in een meervoudige integraal die triviaal zijn uit te voeren:
(i) een permutatie $\phi\colon (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$;
(ii) een coördinaatsgewijze dilatatie $\phi\colon (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (c_1 x_1, \ldots, c_n x_n) \quad (c_1, \ldots, c_n \neq 0)$;
(iii) een translatie $\phi\colon (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n)$.
In elk van die gevallen zal gelden: als $X \subset \mathbb{R}^n$ begrensd en $f\colon \phi(X) \to \mathbb{R}$ integreerbaar, dan is $f \circ \phi\colon X \to \mathbb{R}$ integreerbaar en geldt formule (5.3) met $J_\phi(x)$ onafhankelijk van x, waarbij $|J_\phi(x)| = 1$ in gevallen (i) en (iii) en $|J_\phi(x)| = |c_1 \ldots c_n|$ in geval (ii).

Het bewijs kan eerst gegeven worden wanneer X een blok B is. Dan is $\phi(B)$ weer een blok en ϕ beeldt multipartitities van B af op multipartities van $\phi(B)$. De transformatieformule volgt dan onmiddellijk uit de definitie van integraal over een blok (cf. §4.2 en §4.3). Voor algemene X gebruiken we dan dat de definitie van integraal over X kan worden teruggebracht tot het geval van een integraal over een (X omvattend) blok (cf. Definitie 4.15).

De juist beschreven gevallen zijn speciale gevallen van de volgende algemenere stelling.

Stelling Zij $X \subset \mathbb{R}^n$ begrensd, zij $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineair en inverteerbaar en zij $b \in \mathbb{R}^n$. Schrijf $\phi\colon x \mapsto Ax + b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (een inverteerbare affiene transformatie). Laat $f\colon \phi(X) \to \mathbb{R}$ integreerbaar zijn. Dan is $f \circ \phi\colon X \to \mathbb{R}$ integreerbaar en er geldt dat

$$\int_{\phi(X)} f(x)\, dx = |\det A| \int_X f(Ax + b)\, dx. \tag{5.4}$$

Merk op dat $J_\phi(x) = \det A$, dus formule (5.4) is in overeenstemming met formule (5.3).

Gevolg Zij $\phi\colon x \mapsto Ax + b$ een inverteerbare affiene transformatie van $\mathbb{R}^n$ als in bovenstaande Stelling. Een begrensde deelverzameling X van $\mathbb{R}^n$ is integreerbaar desda $\phi(X)$ integreerbaar is en dan geldt dat $\mathrm{vol}(\phi(X)) = |\det A|\,\mathrm{vol}(X)$. In het bijzonder, als X de eenheidskubus $[0,1] \times \cdots \times [0,1]$ in $\mathbb{R}^n$ is, dan heeft het parallelepipedum $\phi(X)$ volume gelijk aan $|\det A|$.

5.5 We zullen een schets van het bewijs van Stelling 5.4 geven. Dit zal het begrip vergroten voor een daarna te geven schets van het bewijs van het algemene geval van (5.3), dat langs dezelfde lijnen zal verlopen. Merk eerst op dat het wegens Propositie 5.3 en geval (iii) van §5.4 voldoende is om de Stelling te bewijzen indien $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ en $b = 0$. Dan neemt (5.4) de volgende vorm aan:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax)\, dx, \quad \text{waarbij } \det A \neq 0. \tag{5.5}$$

We merken vervolgens op dat er nog een ander type lineaire transformatie van integratievariabele is waarvoor (5.5) eenvoudig is in te zien:

Lemma Laat $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Laat $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ met $c_n \neq 0$. Dan

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = |c_n| \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n)\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{5.6}$$

Bewijs Met behulp van de Stelling van Fubini (cf. Gevolg 4.11) kunnen we het linkerlid van (5.6) schrijven als

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \right) dx_1 \ldots dx_{n-1}, \tag{5.7}$$

In feite integreren we hier over een voldoende groot blok in $\mathbb{R}^n$, dat geschreven wordt als het directe product van een $(n-1)$-dimensionaal blok en een gesloten begrensd interval, maar omdat in alle integralen een continue functie met compacte drager geïntegreerd wordt, mogen we de integratiegebieden in de binnenintegraal door $\mathbb{R}$ en in de buitenintegraal door $\mathbb{R}^{n-1}$ vervangen. In de binnenintegraal (met één integratievariabele) kunnen we de formule voor affiene transformatie van de integratievariabele toepassen. Daardoor krijgt (5.7) de vorm

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(|c_n| \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n)\, dx_n \right) dx_1 \ldots dx_{n-1},$$

wat met Fubini weer gelijk is aan het rechterlid van (5.6). $\square$

5.6 Als een inverteerbare matrix A gefactoriseerd kan worden als $A = BC$, zo dat B en C inverteerbare matrices zijn waarvoor (5.5) reeds bewezen is, dan zal (5.5) ook gelden voor A. Zo kunnen we, bij gegeven A, altijd een permutatiematrix C vinden (d.w.z., de matrix van een transformatie als in (i) van §5.4) zo dat $A = BC$ met $b_{nn} \neq 0$ (b_{nn} is het matrixelement van B op plaats (n, n)). We mogen dus voor het verdere bewijs van (5.5) aannemen dat $a_{nn} \neq 0$ in de inverteerbare matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Laat

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

dus

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & \ldots & \ldots & -\dfrac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & \dfrac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

We vinden dat AB^{-1} dan van de volgende vorm is:

$$C := AB^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n-1,1} & \ldots & \ldots & c_{n-1,n} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Voor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ schrijven we $x' := (x_1, \ldots, x_{n-1})$ en $x = (x', x_n)$. Voor C als in (5.9) schrijven we $C' := (c_{ij})_{i,j=1,\ldots,n-1}$ en $\gamma := (c_{1n}, \ldots, c_{n-1,n})$. Dus γ is een vector in $\mathbb{R}^{n-1}$ en C' is een $(n-1) \times (n-1)$ matrix. Dan volgt er dat $Cx = (C'x' + x_n\gamma, x_n)$ en $\det A = \det(CB) = (\det B)(\det C) = a_{nn} \det C'$. Dan kunnen we (5.6) toepassen met f vervangen door $f \circ C$:

$$\begin{aligned}
&|\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax)\, dx = |\det C'|\, |a_{nn}| \int_{\mathbb{R}^n} f(CBx)\, dx \\
&= |\det C'| \int_{\mathbb{R}^n} f(Cx)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \left(|\det C'| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f((C'x' + x_n\gamma, x_n)\, dx' \right) dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(|\det C'| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(C'x', x_n)\, dx' \right) dx_n,
\end{aligned}$$

waarbij we ook Fubini en geval (iii) van §5.4 gebruikt hebben. Hiermee is (wegens Fubini) het probleem teruggebracht tot het bewijs van (5.5) in het $(n-1) \times (n-1)$ geval. De formule wordt dus uiteindelijk bewezen door volledige inductie naar n.

5.3 *Algemene transformaties*

We formuleren nu in welke zin formule (5.3) voor algemenere functies f geldig is en we zullen vervolgens een bewijs schetsen.

5.7 Stelling (*Transformatiestelling*) Laten U en V open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ zijn en $\phi: U \to V$ een C^1-diffeomorfisme. Zij $X \subset U$ compact (dus $\phi(X) \subset V$ is ook compact). Zij $f: \phi(X) \to \mathbb{R}$ begrensd. Dan is f integreerbaar over $\phi(X)$ desda de functie $x \mapsto f(\phi(x))\, |J_\phi(x)|$ integreerbaar is over X. In het geval van integreerbaarheid geldt:

$$\int_{\phi(X)} f(y)\, dy = \int_X f(\phi(x))\, |J_\phi(x)|\, dx. \tag{5.10}$$

Gevolg Laten U en V open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ zijn en zij $\phi: U \to V$ een C^1-diffeomorfisme. Zij $X \subset U$ integreerbaar en compact. Dan is $\phi(X) \subset V$ integreerbaar en compact en

$$\mathrm{vol}(\phi(X)) = \int_X |J_\phi(x)|\, dx. \tag{5.11}$$

In het bijzonder, als $|J_\phi(x)| = 1$ voor alle $x \in X$, dan geldt dat $\mathrm{vol}(\phi(X)) = \mathrm{vol}(X)$.

5.8 Voor een schets van het bewijs van Stelling 5.7 merken we allereerst op dat het wegens Propositie 5.3 weer voldoende is om te bewijzen dat

$$\int_V f(y)\, dy = \int_U f(\phi(x))\, |J_\phi(x)|\, dx \tag{5.12}$$

voor functies $f \in C_c(V)$ (of equivalent voor functies f op V zo dat $f \circ \phi \in C_c(U)$). Het is niet helemaal triviaal om dit in te zien. De opmerking berust op het volgende Lemma:

Lemma Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ open en $X \subset U$ compact. Dan is er een functie $g \in C_c(U)$ zo dat $g(x) = 1$ als $x \in X$ en $0 \le g(x) \le 1$ als $x \in U$.

Een veel verdergaande bewering is dat Stelling 5.7 volgt zodra we voor iedere $y \in V$ een compacte omgeving $Y \subset V$ van y kunnen vinden zo dat (5.12) geldt voor alle $f \in C_c(V)$ met $\mathrm{supp}(f) \subset Y$. Het idee achter deze bewering (en ook achter het bovengaande Lemma) berust op de z.g. partitie van de eenheid, welk begrip in de volgende paragraaf besproken wordt.

5.9 Met een *partitie van de eenheid* wordt bedoeld dat op een zekere deelverzameling X van $\mathbb{R}^n$ de functie identiek gelijk aan 1 op X geschreven wordt als een som van (op zijn minst) continue functies $f_j \geq 0$ op $\mathbb{R}^n$:

$$\sum_j f_j(x) = 1 \quad (x \in X). \tag{5.13}$$

De sommatie kan over eindig of oneindig veel termen gaan, maar voor elke $x \in X$ mogen slechts eindig veel termen $f_j(x)$ ongelijk 0 zijn, zodat de som voor alle x goed gedefinieerd is. Er volgt uit de aannamen dat $0 \leq f_j(x) \leq 1$ $(x \in X)$. Doorgaans wordt de partitie *ondergeschikt* genomen aan een vooraf gegeven open overdekking $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ (A indexverzameling) van X, d.w.z. dat voor elke j wordt geëist dat $\mathrm{supp}(f) \subset U_\alpha$ voor zekere $\alpha \in A$.

Propositie (*partitie van de eenheid voor een compacte verzameling*)
Zij $X \subset \mathbb{R}^n$ compact en zij $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een open overdekking van X. Dan zijn er eindig veel continue (zelfs C^∞-)functies $f_j \geq 0$ op $\mathbb{R}^n$ met compacte drager zo dat er voor elke j een $\alpha \in A$ is met $\mathrm{supp}(f_j) \subset U_\alpha$ en zo dat (5.13) geldt.

Het bewijs zullen we in een volgende paragraaf geven, maar eerst bespreken we een consequentie van deze Propositie.

Stel dat we voor iedere $y \in V$ een compacte omgeving $Y_y \subset V$ van y kunnen vinden zo dat (5.12) geldt voor alle $f \in C_c(V)$ met $\mathrm{supp}(f) \subset Y$. Zij $f \in C_c(V)$ met (compacte) drager Y. Dan vormt $\{(Y_y)^0 \mid y \in Y\}$ een open overdekking van Y. Dus gezien de Propositie is er een partitie van de eenheid op Y, ondergeschikt aan de open overdekking, die bestaat uit eindig veel functies f_j $(j = 1, \ldots, r)$. Nu kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned} \int_V f(y)\, dy &= \sum_{j=1}^r \int_V f(y)\, f_j(y)\, dy \\ &= \sum_{j=1}^r \int_U f(\phi(x))\, f_j(\phi(x))\, |J_\phi(x)|\, dx = \int_U f(\phi(x))\, |J_\phi(x)|\, dx, \end{aligned}$$

dus (5.13) geldt voor algemene $f \in C_c(V)$.

5.10 Ter voorbereiding van het bewijs van Propositie 5.9 geven we een lemma dat op zich ook nuttig is om te onthouden. Merk eerst op (cf. syll. Analyse A, (13.6)) dat voor gegeven $a < b$ de functie g gedefinieerd door

$$g(x) := \exp\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right) \quad \text{als } a < x < b \qquad \text{en} \quad g(x) := 0 \quad \text{voor andere } x$$

C^∞ is op $\mathbb{R}$ en niet-negatief. Dan is de functie h, gedefinieerd door

$$h(x) := \frac{\int_x^\infty g(y)\,dy}{\int_a^\infty g(y)\,dy}\,,$$

ook C^∞ op $\mathbb{R}$ (waarom?), terwijl $h(x) = 1$ voor $x \le a$, $h(x) = 0$ voor $x \ge b$ en $0 \le h(x) \le 1$ voor $x \in \mathbb{R}$ (waarom?).

Laat nu $0 < r < R$ en $a := r^2$, $b := R^2$. Definieer $f(x) := h(|x|^2) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$. Dan is f een C^∞-functie op $\mathbb{R}^n$, gelijk 1 voor $|x| \le r$ en gelijk 0 voor $|x| \ge R$, terwijl $0 \le f(x) \le 1$ voor $x \in \mathbb{R}^n$.

Definieer $B_r(x)$ als de open bal met straal r en middelpunt x in $\mathbb{R}^n$. Dan hebben we bewezen:

Lemma Laat $x \in \mathbb{R}^n$ en $0 < r < R$. Dan is er een C^∞-functie f op $\mathbb{R}^n$ die identiek 1 is op $\overline{B_r(x)}$, identiek 0 buiten $B_R(x)$, terwijl $0 \le f(x) \le 1$ voor $x \in \mathbb{R}^n$.

5.11 Bewijs van Propositie 5.9
Als $x \in X$ dan ligt x voor zekere $\alpha \in A$ in de open verzameling U_α, dus er is een $r_x > 0$ zo dat $B_{r_x}(x) \subset U_\alpha$. Laat $V_x := B_{\frac{1}{2}r_x}(x)$. Dan vormen de ballen V_x $(x \in X)$ een open overdekking van de compacte verzameling X. Dus er is een eindige deeloverdekking van X met ballen $V_{x_1}, \ldots, V_{x_m}$ voor zekere $x_1, \ldots, x_m \in X$. Volgens Lemma 5.10 is er voor $j \in \{1, \ldots, m\}$ een C^∞-functie ϕ_j zo dat $\phi_j(x) = 1$ voor $|x - x_j| \le \frac{1}{2} r_{x_j}$ en $\phi_j(x) = 0$ voor $|x - x_j| \ge r_{x_j}$, terwijl $0 \le \phi_j(x) \le 1$ voor $x \in \mathbb{R}^n$. In het bijzonder is $\operatorname{supp}(\phi_j) \subset U_\alpha$ voor zekere $\alpha \in A$. Laat

$$f_1 := \phi_1, \qquad f_{j+1} := (1-\phi_1)(1-\phi_2)\ldots(1-\phi_j)\phi_{j+1} \quad (j = 1, \ldots, m-1).$$

Dan is f_j een niet-negatieve C^∞-functie op $\mathbb{R}^n$ met $\operatorname{supp}(f_j) \subset \operatorname{supp}(\phi_j) \subset V_\alpha$ voor zekere $\alpha \in A$. Met volledige inductie naar j volgt er dat

$$f_1 + \cdots + f_j = 1 - (1-\phi_1)\ldots(1-\phi_j).$$

Voor $j = m$ levert dit dat, als $x \in X$, dan $x \in V_{x_j}$ voor zekere j, dus $\phi_j(x) = 1$, dus $f_1(x) + \cdots + f_m(x) = 1$. □

Merk op dat een ogenschijnlijk natuurlijker keuze $f_j := \phi_j/(\phi_1 + \cdots + \phi_m)$ wel de vereiste continue functies f_j op X zou leveren met $f_1 + \cdots + f_m = 1$ op X, maar geen continue (of C^∞-)uitbreiding van de f_j tot $\mathbb{R}^n$ zou leveren, omdat de noemer nul kan worden.

5.12 De nu volgende beschouwingen zijn het niet-lineaire analogon van de paragrafen 5.5 en 5.6. We bespreken eerst een type C^1-diffeomorfisme $\phi: U \to V$, waarvoor (5.12) gemakkelijk lokaal is in te zien: we veronderstellen dat

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, \phi_n(x_1, \ldots, x_n)) \quad (x \in U),$$

terwijl

$$(D_n\phi_n)(x_1, \ldots, x_n) \ne 0 \quad (x \in U).$$

Dan zal $J_\phi(x) = (D_n\phi_n)(x) \neq 0$.

Neem een vaste $\xi \in U$. Dan kunnen we blokken B en C in $\mathbb{R}^n$ vinden zo dat $\xi \in B \subset U$ en $\phi(B) \subset C \subset V$. Bovendien kunnen we B en C nemen van de vorm $B = B' \times [a,b]$ en $C = B' \times [c,d]$ met B' een blok in $\mathbb{R}^{n-1}$. We bewijzen (5.12) nu met ϕ als boven en $f \in C_c(V)$ zo dat $\mathrm{supp}(f) \subset \phi(B)$. Toepassing van de Stelling van Fubini levert dan dat het linkerlid van (5.12) geschreven kan worden als

$$\int_{B'} \left(\int_c^d f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)\, dx_n \right) dx_1 \ldots dx_{n-1}. \tag{5.14}$$

De transformatieformule (5.2) voor integralen met één variabele toegepast op de binnenintegraal levert dan dat (5.14) herschreven kan worden als

$$\int_{B'} \left(\int_a^b f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \phi_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n))\, |(D_n\phi_n)(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)|\, dx_n \right) dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Nogmaals toepassen van Fubini levert dan het rechterlid van (5.12).

5.13 Laat nu $\phi\colon U \to V$ in (5.12) een wilekeurig C^1-diffeomorfisme zijn, maar stel dat voor zekere $\xi \in U$ geldt dat $(D_n\phi_n)(\xi) \neq 0$. (Als ϕ hier niet aan voldoet, dan zal $\phi \circ P$ er aan voldoen voor zekere permutatie-afbeelding P als in (i) van §5.4.) Omdat ϕ een C^1-afbeelding is, impliceert $(D_n\phi_n)(\xi) \neq 0$ dat $(D_n\phi_n)(x) \neq 0$ voor x in een zekere omgeving van ξ. Definieer nu

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) := (x_1, \ldots, x_{n-1}, \phi_n(x_1, \ldots, x_n)) \quad (x \in U).$$

Dan is ψ een C^1-afbeelding van U naar $\mathbb{R}^n$ en $J_\psi(x) = (D_n\phi_n)(x)$, dus $J_\psi(x) \neq 0$ voor x in een zekere omgeving van ξ. We kunnen dan de Stelling van de inverse functie toepassen: ψ is een C^1-diffeomorfisme van een voldoende kleine open omgeving van ξ op een open omgeving van $\psi(\xi)$. Noem de inverse afbeelding ψ^{-1} en schrijf $\chi := \phi \circ \psi^{-1}$, gedefinieerd op een voldoende kleine omgeving van $\psi(\xi)$. Dan $\phi = \chi \circ \psi$ (in een omgeving van ξ) en de kettingregel geeft dat $\phi'(x) = \chi'(\psi(x))\, \psi'(x)$. Dus $J_\phi(x) = J_\chi(\psi(x))\, (D_n\phi_n)(x)$.

We kunnen nu de resultaten van §5.12 toepassen op functies $x \mapsto f(\chi(x))\, |J_\chi(x)|$, waarbij f compacte drager heeft binnen een voldoende kleine omgeving van $\phi(\xi)$. We kunnen dan voldoende kleine blokken $B \subset U$ en $C \subset \psi(U)$ vinden zo dat

$$\begin{aligned}\int_B f(\phi(x))\, |J_\phi(x)|\, dx = \int_B f(\chi(x_1, \ldots, x_{n-1}, \phi_n(x)))\, |J_\chi(x_1, \ldots, x_{n-1}, \phi_n(x))| \\ \times |(D_n\phi_n)(x)|\, dx = \int_C f(\chi(x))\, |J_\chi(x)|\, dx.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Omdat

$$\psi'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & & 0 & 1 & 0 \\ (D_1\psi_n)(x) & \ldots & \ldots & & (D_{n-1}\psi_n)(x) & (D_n\psi_n)(x) \end{pmatrix},$$

zal wegens (5.8) en (5.9) gelden dat

$$\chi'(\psi(x)) = \begin{pmatrix} (D_1\chi_1)(\psi(x)) & \dots & \dots & (D_n\chi_1)(\psi(x)) \\ \vdots & & & \vdots \\ (D_1\chi_{n-1})(\psi(x)) & \dots & \dots & (D_n\chi_{n-1})(\psi(x)) \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dus $(D_j\chi_n)(y_1,\dots,y_n) = \delta_{j,n}$, waardoor $\chi_n(y) - y_n = \text{const.}$ voor y in zekere omgeving van $\psi(\xi)$. Door substitutie van $y := \psi(x)$ in de laatste gelijkheid en door te gebruiken dat $\chi \circ \psi = \phi$ en $\psi_n = \phi_n$ vinden we dat de constante gelijk is aan nul, dus $\chi_n(y) = y_n$.

Schrijf $\chi^0(x) := (\chi_1(x),\dots,\chi_{n-1}(x))$ en $x' := (x_1,\dots,x_{n-1})$. Dan zal gelden dat $\chi(x) = (\chi^0(x',x_n),x_n)$ en $J_\chi(x) = \det((D_j\chi_i)(x))_{i,j=1,\dots,n-1}$. Schrijf $C = C' \times [c,d]$ met C' een blok in $\mathbb{R}^{n-1}$. Nu kan het rechterlid van (5.15) met behulp van Fubini herschreven worden als

$$\int_c^d \left(\int_{C'} f(\chi^0(x',x_n),x_n)\,|\det((D_j\chi_i)(x',x_n))_{i,j=1,\dots,n-1}|\,dx' \right) dx_n. \tag{5.16}$$

Dit tussenresultaat suggereert om een volledige inductie naar n in het bewijs van (5.12) te brengen. Stel dus dat formule (5.12) reeds bewezen is voor dimensie $n-1$, met willekeurige ϕ en f, dan kunnen we dat resultaat toepassen op de binnenintegraal van (5.16) en we herschrijven (5.16) als

$$\int_c^d \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x',x_n)\,dx' \right) dx_n = \int_V f(x)\,dx,$$

waarbij we nogmaals Fubini hebben toegepast. Dus in dimensie n, voor gegeven $\phi\colon U \to V$ en $\xi \in U$, geldt (5.12) voor functies $f \in C_c(V)$ die hun drager hebben in een voldoende kleine omgeving van $\phi(\xi)$. Het argument uit §5.9 (de partitie van de eenheid) voltooit het bewijs dan.

5.4 Voorbeelden

5.14 Voorbeeld (*Overgang op poolcoördinaten*)
Zij Y de gesloten cirkelschijf met straal R, i.e., $Y := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$. Zij $f\colon Y \to \mathbb{R}$ continu. Dan is Y een integreerbare verzameling en f een integreerbare functie. We zullen nu laten zien dat

$$\int_Y f(x,y)\,dx\,dy = \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta. \tag{5.17}$$

In het rechterlid integreren we een continue functie over een blok in $\mathbb{R}^2$. We zullen vaak een wat meer informele notatie voor linker- en rechterlid gebruiken:

$$\int_{x^2+y^2\le R^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta. \tag{5.18}$$

$$= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)\,d\theta \right) r\,dr \tag{5.19}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)\,r\,dr \right) d\theta. \tag{5.20}$$

Hier geven linker- en rechterlid van (5.18) andere notaties voor het linker resp. rechterlid van (5.17), en (5.19) en (5.20) zijn herschrijvingen van het rechterlid van (5.18) op grond van de Stelling van Fubini. In het rechterlid van (5.18) schrijven we $\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}$ i.p.v. $\int_0^R\int_0^{2\pi}$ om verwarring te voorkomen of een integratie-interval betrekking heeft op de r-variable of de θ-variabele. Strikt genomen wordt dit al vastgelegd door de volgorde in $dr\,d\theta$, maar in de praktijk is men soms geneigd om, vooruitlopend op (5.19), de volgorde van dr en $d\theta$ om te draaien.

Formules (5.18)–(5.20) worden enorm vaak gebruikt. Je moet ze zondermeer onthouden. Merk het speciale geval op voor radiële functies:

$$\int_{x^2+y^2\le R^2} f(x,y)\,dx\,dy = 2\pi\int_0^R F(r)\,r\,dr \quad \text{als } f(x,y)=F(\sqrt{x^2+y^2}). \tag{5.21}$$

Het ligt voor de hand om bovenstaande formules te bewijzen met behulp van de transformatieformule (5.10) en om te werken met de C^1-afbeelding $\phi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ gegeven door

$$\phi(r,\theta) := (r\,\cos\theta, r\,\sin\theta).$$

Dan geldt:

$$\phi'(r,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\,\sin\theta\\ \sin\theta & r\,\cos\theta\end{pmatrix}, \quad J_\phi(r,\theta)=r. \tag{5.22}$$

Voor de afleiding van (5.18) is Stelling 5.7 echter niet direct toepasbaar omdat we ons moeten beperken tot een compacte deelverzameling X van een open deelverzameling U van $\mathbb{R}^2$ zo dat $\phi(U)$ open is en $\phi\colon U\to\phi(U)$ een diffeomorfisme is. Noodzakelijk en voldoende hiervoor (cf. Stelling 3.8) is dat ϕ injectief is op U en dat $J_\phi(x)\neq 0$ als $x\in U$. Merk uit (5.22) op dat $J_\phi(0,\theta)=0$. Dit suggereert om ons te beperken tot $\{(r,\theta)\mid r>0,\theta\in\mathbb{R}\}$, wat door ϕ wordt afgebeeld op $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, maar niet injectief. Dit leidt ons tot een open deelverzameling U van $\mathbb{R}^2$ en een compacte deelverzameling X van U gegeven door

$$U := \{(r,\theta)\mid r>0,\ \theta_0<\theta<\theta_0+2\pi\},\quad X := \{(r,\theta)\mid r_1\le r\le r_2,\ \theta_1\le\theta\le\theta_2\},$$

waarbij $0<r_1<r_2$ en $\theta_0<\theta_1<\theta_2<\theta_0+2\pi$. Dan is $\phi(U)$ open en $\phi\colon U\to\phi(U)$ een diffeomorfisme. De compacte verzameling $\phi(X)$ is een segment van een ring: begrensd door twee concentrische cirkels rond $(0,0)$ en door twee halflijnen beginnend in $(0,0)$. Toepassing van (5.10) levert dan dat

$$\int_{\phi(X)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{r=r_1}^{r_2}\int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta. \tag{5.23}$$

Leten we schrijven $X=X(r_1,r_2;\theta_1,\theta_2)$. In de limiet, voor $\theta_1\downarrow 0$ en $\theta_2\uparrow 2\pi$, zullen de oppervlakten van $X(r_1,r_2;0,2\pi)\backslash X(r_1,r_2;\theta_1,\theta_2)$ en $\phi(X(r_1,r_2;0,2\pi))\backslash\phi(X(r_1,r_2;\theta_1,\theta_2))$ naar 0 convergeren (ga na), dus in (5.23) mogen we ook deze limiet nemen (ga na) en we verkrijgen de identiteit

$$\int_{r_1^2<x^2+y^2<r_2^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{r=r_1}^{r_2}\int_{\theta=0}^{2\pi} f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta. \tag{5.24}$$

Zodoende hebben we de integraal van een continue functie over een ringvormig gebied in poolcoördinaten geschreven. Nu kunnen we nog eens een soortgelijke limietprocedure toepassen voor $r_1\downarrow 0$. Omdat de oppervlakten van $X(0,r_2;0,2\pi)\backslash X(r_1,r_2;0,2\pi)$ en $\phi(X(0,r_2;0,2\pi))\backslash\phi(X(r_1,r_2;0,2\pi))$ dan naar 0 convergeren (ga na), mogen we ook in (5.24) deze limiet nemen (ga na) en we verkrijgen de gewenste identiteit (5.17).

5.15 Voorbeeld Als toepassing van formule (5.21) zullen we nu bewijzen dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}, \tag{5.25}$$

wat beloofd was in syll. Analyse A3, Voorbeeld 8.23. Merk op dat

$$\int_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} \int_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \le \int_{x^2+y^2\le R^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \le \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Pas Opgave 4.13 toe op het linker- en rechterlid en pas (5.21) toe op het middelste lid. We verkrijgen dat

$$\left(\int_{-R/\sqrt{2}}^{R/\sqrt{2}} e^{-x^2}\,dx\right)^2 \le 2\pi \int_0^R e^{-r^2}\,r\,dr \le \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

Het linker- en rechterlid convergeren naar dezelfde limiet voor $R \to \infty$, dus ook het middelste lid convergeert naar deze limiet:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr = \pi.$$

Dit bewijst (5.25).

5.16 Voorbeeld In syll. Analyse A3, Opgave 8.26 werd de *gammafunctie* Γ gedefinieerd door de oneigenlijke integraal

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{x-1}\,dt \quad (x > 0). \tag{5.26}$$

We introduceerden ook

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt \quad (x,y > 0). \tag{5.27}$$

Deze functie B in twee variabelen staat bekend als de *betafunctie*. Voor een speciaal geval, als $x \in \mathbb{N}$, werd in genoemde Opgave bewezen dat

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{5.28}$$

Deze formule is in feite algemeen geldig voor $x, y > 0$. We zullen nu (5.28) bewijzen voor $x, y \ge 1$. Dan is de integraal (5.27) die $B(x,y)$ definieert, niet oneigenlijk.

Voor $a, b \ge 1$ en $0 < m < M$ gelden de ongelijkheden

$$\begin{aligned} \int_{\frac12 m}^{\frac12 M} \int_{\frac12 m}^{\frac12 M} e^{-x}\,x^{a-1}\,e^{-y}\,y^{b-1}\,dx\,dy &\le \iint_{x,y\ge 0,\ m\le x+y\le M} e^{-x}\,x^{a-1}\,e^{-y}\,y^{b-1}\,dx\,dy \\ &\le \int_0^M \int_0^M e^{-x}\,x^{a-1}\,e^{-y}\,y^{b-1}\,dx\,dy. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Op het middelste lid van (5.29) passen we formule (5.10) toe met $X := \{(s,t) \mid m \le s \le M,\ 0 \le t \le 1\}$ en $\phi(s,t) := (st, s(1-t))$. Dus $\phi(X) = \{(x,y) \mid x,y \ge 0,\ m \le x+y \le M\}$ en

$$\phi'(s,t) = \begin{pmatrix} t & s \\ 1-t & -s \end{pmatrix}, \qquad J_\phi(s,t) = -s.$$

Dus

$$\iint_{x,y\ge 0,\ m\le x+y\le M} e^{-x}\, x^{a-1}\, e^{-y}\, y^{b-1}\, dx\, dy = \int_{s=m}^{M}\int_{t=0}^{1} e^{-s}\, (st)^{a-1}\, (s(1-t))^{b-1}\, s\, ds\, dt$$
$$= \left(\int_m^M e^{-s}\, s^{a+b-1}\, ds\right)\left(\int_0^1 t^{a-1}\,(1-t)^{b-1}\, dt\right),$$

waarbij we ook Opgave 4.13 gebruikt hebben. We substitueren dit resultaat in (5.29) en passen Opgave 4.13 ook toe op het linker- en rechterlid van (5.29). Dit levert:

$$\left(\int_{\frac12 m}^{\frac12 M} e^{-x}\, x^{a-1}\, dx\right)\left(\int_{\frac12 m}^{\frac12 M} e^{-y}\, y^{b-1}\, dy\right) \le \left(\int_m^M e^{-s}\, s^{a+b-1}\, ds\right)\left(\int_0^1 t^{a-1}\,(1-t)^{b-1}\, dt\right)$$
$$\le \left(\int_0^M e^{-x}\, x^{a-1}\, dx\right)\left(\int_0^M e^{-y}\, y^{b-1}\, dy\right). \tag{5.30}$$

Voor $m \downarrow 0$ en $M \uparrow \infty$ convergeren het linker- en rechterlid van (5.30) naar dezelfde limiet, dus ook het middelste lid zal naar die limiet convergeren. We verkrijgen:

$$\left(\int_0^\infty e^{-x}\, x^{a-1}\, dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y}\, y^{b-1}\, dy\right) = \left(\int_0^\infty e^{-s}\, s^{a+b-1}\, ds\right)\left(\int_0^1 t^{a-1}\,(1-t)^{b-1}\, dt\right).$$

Driemaal substitueren van (5.26) levert dan het gewenste resultaat

$$\int_0^1 t^{a-1}\,(1-t)^{b-1}\, dt = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{5.31}$$

5.17 **Opmerking** We hebben formule (5.31) bewezen voor $a,b \ge 1$. Voortzetting van het resultaat voor $a,b > 0$ kan bijvoorbeeld gebeuren door te bewijzen dat linker- en rechterlid van (5.31) analytisch zijn in a,b voor $a,b > 0$ (dit begrip komt nader aan de orde bij het vak Functietheorie). We kunnen ook de methode van §5.16 aanhouden, maar de integratiegebieden aanvankelijk zo kiezen dat we van de x-as en y-as wegblijven.

5.18 Voorbeeld (*overgang op bolcoördinaten*)
Bekijk de C^1-afbeelding ϕ gegeven door

$$\phi(r,\theta,\psi) := (r\,\sin\theta\,\cos\psi, r\,\sin\theta\,\sin\psi, r\,\cos\theta).$$

Voor vaste $r > 0$ geven de coördinaten van $\phi(r,\theta,\psi)$ de Cartesische coördinaten van een bol met straal r en middelpunt $(0,0,0)$. (Denk aan de aardbol.) We laten r nog even vast en bekijken de afhankelijkheid van θ en ψ. Voor $\theta := 0$ verkrijgen we de noordpool $(0,0,r)$

(ongeacht de waarde van ψ) en voor $\theta := \pi$ de zuidpool. Voor een vaste waarde van θ tussen 0 en π verkrijgen we een breedtecirkel op hoekafstand θ van de noordpool. Voor $\theta := \pi/2$ verkrijgen we de evenaar. Voor vaste waarde van ψ verkrijgen we een lengtecirkel (meridiaan), die van noordpool naar zuidpool doorlopen wordt als θ van 0 naar π gaat.

Voor gegeven $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ noemen we (r, θ, ψ) *bolcoördinaten* voor dit punt als $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$ en $\psi \in \mathbb{R} \pmod{2\pi}$ zodanig dat $(x, y, z) = \phi(r, \theta, \psi)$. Merk op dat $r \geq 0$ uniek bepaald is, dat $\theta \in [0, \pi]$ uniek bepaald is als $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ en dat $\psi \in \mathbb{R} \pmod{2\pi}$ uniek bepaald is als $(x, y) \neq (0, 0)$.

De afbeelding ϕ beeldt de verzameling $(r, \theta, \psi) \mid 0 < r < R,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 < \psi < 2\pi\}$ injectief af op de verzameling $\mathbb{R}^3 \backslash \{(x, 0, z) \mid x \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\}$. De afgeleide van ϕ is

$$\phi'(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\, \cos\psi & r\, \cos\theta\, \cos\psi & -r\, \sin\theta\, \sin\psi \\ \sin\theta\, \sin\psi & r \cos\theta\, \sin\psi & r\, \sin\theta\, \cos\psi \\ \cos\theta & -r \sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Als we de determinant van deze matrix uitrekenen dan verkrijgen we (ga na):

$$J_\phi(r, \theta, \psi) = r^2\, \sin\theta.$$

We willen nu de integraal van een continue functie f over een bal $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ herschrijven in termen van bolcoördinaten. Voor een strikte toepassing van Stelling 5.7 moeten we wegblijven van de z-as, omdat daar de Jacobiaan gelijk 0 wordt, maar met soortgelijke limiet-argumenten als in §5.14 kunnen we de transformatieformule toch uitbreiden tot de gehele bal. We verkrijgen:

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\ &= \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} f(r\, \sin\theta\, \cos\psi, r\, \sin\theta\, \sin\psi, r\, \cos\theta)\, r^2\, \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi. \end{aligned} \tag{5.32}$$

In het bijzonder zien we dat voor radiële functies $f(x, y, z) = F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ het rechterlid van (5.32) de volgende vorm aanneemt:

$$\int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} F(r)\, r^2\, \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi.$$

Met behulp van Opgave 4.13 wordt dit

$$\left(\int_0^R F(r)\, r^2\, dr \right) \left(\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\psi \right),$$

dus

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = 4\pi \int_0^R F(r)\, r^2\, dr \quad \text{als } f(x, y, z) = F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}). \tag{5.33}$$

Wanneer we voor f de functie identiek 1 nemen dan krijgen we als uitkomst van het rechterlid van (5.33) het getal $\frac{4}{3}\pi R^3$, wat de bekende formule is voor het volume van een bal met straal R in $\mathbb{R}^3$. Merk op dat de factor 4π in het rechterlid van (5.33) juist de oppervlakte is van een bol met straal 1 in $\mathbb{R}^3$. Dit is niet toevallig. Probeer je dit meetkundig voor te stellen door de integraal in het linkerlid van (5.33) te schrijven als een som van integralen over stukken van de bal waarvan de r-coördinaat ligt tussen $(k-1)R/N$ en kR/N ($k = 1, 2, \ldots, N$) en dan N heel groot te nemen. Het volume van zo'n stuk zal bij benadering gelijk zijn aan het product van R/N met de oppervlakte van een bol met straal kR/N, dus aan het product van $k^2(R/N)^3$ met de oppervlakte van een bol met straal 1. Dus bij benadering is het linkerlid van (5.33) gelijk aan

$$4\pi \sum_{k=1}^{N} F(kR/N)\,(kR/N)^2\,(R/N),$$

wat weer bij benadering gelijk is aan het rechterlid van (5.33).

5.19 (*Omwentelingslichamen*)
Zij Y_0 een compacte integreerbare deelverzameling van $\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ (het rechterhalfvlak in $\mathbb{R}^2$). Door de inbedding $(x,z) \mapsto (x,0,z)$ van $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ identificeren we Y_0 met de deelverzameling

$$\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,z) \in Y_0\}.$$

Door deze laatste verzameling te laten wentelen om de z-as verkrijgen we een deelverzameling

$$Y := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2}, z) \in Y_0\}. \tag{5.34}$$

van $\mathbb{R}^3$. We passen nu de transformatiestelling (Stelling 5.7) toe om in te zien dat Y meetbaar is en om het volume van Y uit te rekenen. Bekijk de transformatie $\phi\colon (r,\theta,z) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ met $J_\phi(r,\theta,z) = r$. Dan is $Y = \phi(X)$ met $X = \{(r,\theta,z) \mid 0 \leq \theta < 2\pi,\ (r,z) \in Y_0\}$. Formule (5.11) gevolgd door Fubini levert dan dat

$$\operatorname{vol}(Y) = \iiint_X r\,dr\,d\theta\,dz = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\iint_{Y_0} r\,dr\,dz\right).$$

Omdat $(r,z) \mapsto r$ continu is op de integreerbare verzameling Y_0, en daarom integreerbaar, zal de functie $(r,\theta,z) \mapsto r$ integreerbaar zijn over X, en daarom is Y een integreerbare verzameling wegens Stelling 5.7. We lopen nu even heen over de kleine technische moeilijkheid dat strikte toepassing van Stelling 5.7 niet mogelijk is omdat Y niet het injectieve beeld is van een compacte verzameling X. Het is niet moeilijk om dat recht te breien (zie ook §5.14).

We hebben dus bewezen dat, voor Y gegeven door (5.34),

$$\operatorname{vol}(Y) = 2\pi \iint_{Y_0} r\,dr\,dz. \tag{5.35}$$

5.20 Voorbeeld Een veel voorkomende situatie van een omwentelingslichaam is dat $Y_0 := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq z \leq b,\ 0 \leq x \leq f(z)\}$ met $f \geq 0$ een continue functie op $[a,b]$. Dan verkrijgen we voor (5.34) dat

$$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq f(z)\}. \tag{5.36}$$

Het rechterlid van (5.35) kan dan met behulp van Fubini geschreven worden als

$$2\pi \int_a^b \left(\int_0^{f(z)} r\, dr \right) dz,$$

dus

$$\mathrm{vol}(Y) = \pi \int_a^b f(z)^2\, dz. \tag{5.37}$$

5.21 Voorbeeld We bekijken nu een ringvormig gebied verkregen door omwenteling van de cirkelschijf $Y_0 := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + z^2 \le b^2\}$, waarbij $a > b > 0$. Dus

$$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2} - a)^2 + z^2 \le b^2\}. \tag{5.38}$$

Toepassing van (5.35) geeft dat

$$\mathrm{vol}(Y) = 2\pi \iint_{(x-a)^2+z^2 \le b^2} x\, dx\, dz = 2\pi \iint_{y^2+z^2 \le b^2} (y+a)\, dy\, dz = 2\pi \int_{r=0}^{b} \int_{\theta=0}^{2\pi} (r\, \cos\theta + a)\, r\, dr\, d\theta,$$

dus

$$\mathrm{vol}(Y) = 2\pi^2 a b^2 \tag{5.39}$$

is het volume van ons ringvormig gebied.

5.22 Merk op dat het in (5.39) berekende volume van het ringvormig gebied (5.38) te schrijven is als het product van een cirkelomtrek $2\pi a$ en een cirkelschijfoppervlakte πb^2. Bewijs nu algemener het volgende.

Opgave Zij Y_0 een compacte integreerbare deelverzameling van $\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0\}$ en zij Y het omwentelingslichaam gegeven door (5.34). Verder is gegeven dat Y_0 invariant is onder spiegeling t.o.v. een verticale symmetrie-as, d.w.z. dat er een $\rho > 0$ is zo dat de transformatie $(x,z) \mapsto (2\rho - x, z)$ de verzameling Y_0 bijectief op zichzelf afbeeldt. Bewijs dat $\mathrm{vol}(Y) = 2\pi\rho\, \mathrm{vol}(Y_0)$, waarbij $\mathrm{vol}(Y_0)$ de oppervlakte (2-dimensionaal volume) van Y_0 is.

5.23 Definitie Zij X een compacte integreerbare deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ zo dat $\mathrm{vol}(X) > 0$. Het *zwaartepunt* van X is gedefinieerd als het punt $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ van $\mathbb{R}^n$ zo dat

$$\xi_k = \frac{1}{\mathrm{vol}(X)} \int_X x_k\, dx \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Als $n = 3$ en er op X een homogene massaverdeling is, dan correspondeert dit met het fysische begrip *zwaartepunt*.

Opgave Zij Y_0 een compacte integreerbare deelverzameling van $\{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0\}$ en zij Y het omwentelingslichaam gegeven door (5.34). Neem aan dat $\mathrm{vol}(Y_0) > 0$. Laat (x_0, z_0) het zwaartepunt van Y_0 zijn. Bewijs dat $\mathrm{vol}(Y) = 2\pi x_0\, \mathrm{vol}(Y_0)$

Verdere vraagstukken

V5.1 Zij $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le \dfrac{e^2-1}{e^2+1}\, y,\ y^2 - x^2 \le 1\}$ (een gebied begrensd door twee rechten en een tak van een hyperbool). Bereken de integraal

$$\iint_X e^{y^2-x^2}\, dx\, dy.$$

Aanwijzing Gebruik de transformatie $(r,t) \mapsto (r\,\sinh t, r\,\cosh t)$.

V5.2 Zij $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le y \le 2x,\ 2 \le xy \le 3\}$ (een gebied in het eerste kwadrant begrensd door twee rechten en door twee takken van hyperbolen). Bereken

$$\iint_X y^4\, e^{y^2/x^2}\, dx\, dy.$$

Aanwijzing Pas de transformatie $(x,y) \mapsto (xy, y/x)$ toe op een integraal van de vorm $\displaystyle\iint_Y f(u,v)\, du\, dv$.

V5.3 Bereken

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{x^2+y^2-x^2y^2}\, \sqrt{1-x^2}\, dx\, dy.$$

Aanwijzing Pas Fubini toe met binnenintegraal t.o.v. y en voer in de binnenintegraal een passende transformatie uit.

V5.4 Bereken de oppervlakte van de verzameling $\{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid -\pi/4 < \theta < \pi/4,\ 0 < r < \cos 2\theta\}$ (deze verzameling is het binnengebied van het rechterblad van een vierbladig rozet).

V5.5 Het *folium van Descartes* is de kromme in $\mathbb{R}^2$ gegeven door de vergelijking $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. Geef de vergelijking van deze kromme in poolcoördinaten en bereken de oppervlakte van het gebied in het eerste kwadrant dat geheel door een lus van deze kromme wordt omsloten.

V5.6 Zij Y de begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^3$ begrensd door de eenbladige hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en de twee vlakken $z = 1$ en $z = -1$. Bereken het volume van Y.

V5.7 Definieer voor $0 \le a < b$ en $c > 0$ het driehoekig gebied $Y_0 := \{(x,z) \mid a \le x \le b,\ -c \le z \le c\}$. Definieer het omwentelingslichaam Y als in (5.34).
(a) Bereken het zwaartepunt van Y_0.
(b) Bereken het volume van Y.

V5.8 Bereken het volume van het omwentelingslichaam $\{(x,y,z) \mid (x^2+y^2)^{1/3} + |z|^{2/3} \le 1\}$.

V5.9 Zij X de begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^3$ begrensd door de cylinder $x^2+y^2-2x = 0$, het vlak $z = 0$ en de paraboloïde $z = x^2 + y^2 + 1$. Bereken het volume van X.

V5.10 Bewijs dat

$$\int_0^\infty t^{x-1}\,(1+t)^{-x-y}\,dt = B(x,y) \quad (x,y>0).$$

V5.11 Definieer $\phi(x,y) := (x+y, xy)$.
a) Bewijs dat ϕ het gebied $X := \{(x,y) \mid x > y\}$ diffeomorf afbeeldt op het gebied $Y := \{(u,v) \mid u^2 > 4v\}$.
b) Bewijs dat voor $f \in C_c(Y)$ de volgende transformatieformule geldt:

$$\iint\limits_Y \frac{f(u,v)}{\sqrt{u^2-4v}}\,du\,dv = \iint\limits_X f(x+y, xy)\,dx\,dy.$$

c) Neem aan dat bovenstaande transformatieformule ook geldig is voor $f(u,v) := e^{-u^2+2v}\,v^{2k}$ $(k = 0,1,2,\ldots)$. Bereken

$$\iint\limits_Y \frac{e^{-u^2+2v}\,v^{2k}}{\sqrt{u^2-4v}}\,du\,dv.$$

V5.12 Zij $\alpha \geq 0$ en $k, l = 0,1,2,\ldots$. Bereken

$$\iint\limits_{x^2+y^2<1} (1-x^2-y^2)^\alpha\,(x+iy)^k\,(x-iy)^l\,dx\,dy.$$

V5.13 Zij $f \in C_c(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$. Bewijs dat

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy.$$

6 Integratie over oppervlakken; Stelling van Green

In dit slothoofdstuk behandelen we eerst integralen over $(n-1)$-dimensionale oppervlakken (subvariëteiten) in $\mathbb{R}^n$. Vervolgens behandelen we stellingen waar de namen van Gauss, Green en Stokes aan verbonden zijn (er is verwarring in de literatuur over de precieze naamgeving). Deze stellingen leggen een verband tussen de integraal over een begrensd gebied in $\mathbb{R}^n$ en de integraal over de $(n-1)$-dimensionale rand van dat gebied. Voor goede formulering van deze materie is het onvermijdelijk om al iets over (in $\mathbb{R}^n$ ingebedde) differentieerbare variëteiten te zeggen. We gaan echter nog niet heel diep of heel precies op variëteiten in. Dit zal bij het vak differentiaalmeetkunde gebeuren. De bedoeling van dit hoofdstuk is eerder om je alvast wat gevoel te geven voor variëteiten en hoe die bij genoemde stellingen een rol spelen.

Wat je in ieder geval na afloop moet weten is de formule voor integratie over een oppervlak en de stellingen van Green etc. aan het eind van het hoofdstuk, en je moet deze zaken in concrete vraagstukken kunnen toepassen.

6.1 Integratie over oppervlakken

In syll. Analyse B1, §4.3 en 4.5 hebben we de begrippen *rectificeerbare kromme* en *lengte van een kromme* ingevoerd en we hebben bewezen dat een C^1-kromme $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ rectificeerbaar is met lengte

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \cdots + \gamma_n'(t)^2}\,dt. \tag{6.1}$$

We zullen algemener een definitie te geven van de "oppervlakte" van een $(n-1)$-dimensionaal oppervlak in $\mathbb{R}^n$. Voor aanschouwelijkheid en concrete toepassingen zijn de gevallen $n = 2$ (krommen in $\mathbb{R}^2$, zie boven) en $n = 3$ (oppervlakken in $\mathbb{R}^3$) het belangrijkste.

6.1 Zij $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ een C^1-kromme met γ injectief (dus de kromme snijdt zichzelf niet) en $\gamma'(t) \neq 0$ (dus overal langs de kromme is de raakvector ongelijk nul). Zij $K := \gamma([a,b])$ de beeldverzameling van γ in $\mathbb{R}^n$. Ook al zullen we in het vervolg spreken over de kromme K, is het formeel niet juist om een kromme louter als verzameling te beschouwen. Het bestaan van een C^1-parametrisering voor K (bijv. met behulp van γ) is een essentieel aspect van de kromme. Aan de andere kant is de keuze van γ voor de parametrisering willekeurig. We mogen even goed werken met $\delta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$, waarbij $\delta(t) = \gamma(\phi(t))$ en $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ een C^1-diffeomorfisme is. We noemen de C^1-parametriseringen d.m.v. γ en δ *equivalent*. Als we ook geïnteresseerd zijn in de *oriëntatie* van de kromme dan eisen we van de C^1-afbeelding ϕ bovendien dat $\phi' > 0$.

We zouden een C^1-kromme in $\mathbb{R}^n$ nu kunnen opvatten als een deelverzameling K van $\mathbb{R}^n$ samen met een equivalentieklasse van injectieve C^1-afbeeldingen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ met beeld K en met afgeleide nergens gelijk aan 0.

Als K een C^1-kromme is in $\mathbb{R}^n$ die geparametriseerd wordt door $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, dan kunnen we functies f op K identificeren met functies $f \circ \gamma$ op $[a,b]$. Allerlei eigenschappen van f, i.h.b. differentieerbaarheid, kunnen dan het beste op $[a,b]$ bekeken en gedefinieerd worden. Alleen die eigenschappen van f zijn echter zinvol gedefinieerd die onafhankelijk zijn van de keuze van γ.

6.2 Laat K een C^1-kromme zijn in $\mathbb{R}^n$ die geparametriseerd wordt door $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ en laat $f\colon K \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn op K. We willen een definitie geven van de integraal van f over de kromme K. Een mogelijk probeersel zou zijn:

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,dt. \tag{6.2}$$

Deze definitie is niet bevredigend om twee redenen:

- De definitie hangt sterk van de gekozen parametrisering van de kromme af. Immers, als $\delta(t) = \gamma(\phi(t))$ met $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ een C^1-diffeomorfisme, dan wordt (6.2) in termen van δ als volgt:
$$\int_c^d f(\delta(t))\,|\phi'(t)|\,dt.$$
- Voor f identiek 1 levert (6.2) de waarde $b-a$ voor de integraal, terwijl we dan de lengte van de kromme, zoals gegeven door (6.1), als uitkomst zouden willen hebben.

De remedie is duidelijk. We definiëren

$$\int_K f(x)\,d\ell(x) := \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt \tag{6.3}$$

en we noemen deze uitdrukking de *integraal* van f over de kromme K. Aan onze twee bewaren is duidelijk tegemoet gekomen. Met δ gedefinieerd in termen van γ als boven vinden we dat
$$\int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt = \int_c^d f(\delta(s))\,|\delta'(s)|\,ds$$
(ga na), terwijl vergelijken van (6.3) met (6.1) leert dat de kromme K lengte $\int_K 1\,d\ell(x)$ heeft.

6.3 We geven nu nog een andere karakterisering van integraal van een continue functie over een C^1-kromme, die nauw aansluit bij de definitie van integraal over een interval (cf. syll. Analyse A3, §6.4) en bij de definitie van lengte van een rectificeerbare kromme (cf. syll. Analyse B1, §4.3).

Propositie Zij K een C^1-kromme in $\mathbb{R}^n$ met parametrisering $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Zij $f\colon K \to \mathbb{R}$ continu. Dan is er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zo dat voor iedere partitie $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = b$ met $t_i - t_{i-1} < \delta$ voor alle i, en voor iedere keuze van elementen $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, \ldots, r)$ geldt dat

$$\left| \sum_{i=1}^r f(\gamma(\tau_i))\,|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| - \int_K f(x)\,d\ell(x) \right| < \varepsilon.$$

We kunnen de integraal van f over K dus willekeurig dicht benaderen door de C^1-kromme K te benaderen met een stuksgewijs lineaire continue kromme K_δ bestaande uit rechte stukjes tussen x_{i-1} en x_i, en door voor elke i de functie f op het stuk van de kromme tussen x_{i-1} en x_i te benaderen door een constante functie met waarde $f(\xi_i)$, waarbij ξ_i een willekeurig punt is op het stuk van de kromme K tussen x_{i-1} en x_i. De benadering van de integraal is dan de som van de termen $f(\xi_i)\,|x_i - x_{i-1}|$.

6.4 **Opgave** Geef een bewijs van Propositie 6.3.

6.5 We gaan nu het geval van een $(n-1)$-dimensionaal oppervlak S in $\mathbb{R}^n$ bespreken. (Strikt genomen moeten we voor $n > 3$ van een *hyperoppervlak* spreken.) Laten we eerst het lineaire geval bekijken. Stel dat $v_1, \ldots, v_{n-1}$ vectoren zijn in $\mathbb{R}^n$ die een lineair onafhankelijk stelsel vormen. We willen een definitie en uitdrukking vinden voor de oppervlakte (eigenlijk hyperoppervlakte) van het oppervlak S in $\mathbb{R}^n$ gegeven door

$$\{t_1 v_1 + \cdots + t_{n-1} v_{n-1} \mid 0 \le t_i \le 1 \quad (i = 1, \ldots, n-1)\} \tag{6.4}$$

(een $(n-1)$-dimensionaal parallellepipedum in $\mathbb{R}^n$). Er is een evidente definitie voor de oppervlakte van S: Voer een orthogonale transformatie T in $\mathbb{R}^n$ uit zo dat de vectoren Tv_i in de deelruimte $\{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n\}$ van $\mathbb{R}^n$ terecht komen. Door die deelruimte te identificeren met $\mathbb{R}^{n-1}$ kunnen we de *oppervlakte* van S definiëren als het volume van $T(S)$ in $\mathbb{R}^{n-1}$, dus als de absolute waarde van de determinant van de vectoren Tv_i in $\mathbb{R}^{n-1}$. We noteren deze oppervlakte met $\mathrm{opp}(S)$.

6.6 Propositie Laten $v_1, \ldots, v_{n-1}$ lineair onafhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn met coördinaten gegeven door

$$v_k = (v_{1k}, \ldots, v_{nk}). \tag{6.5}$$

Definieer de vector $\mathbf{V}$ in $\mathbb{R}^n$ door

$$\mathbf{V} = (\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n) \quad \text{met} \quad \mathbf{V}_j := (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} v_{11} & \ldots & v_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \widehat{v_{j1}} & \ldots & \widehat{v_{j,n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \ldots & v_{n,n-1} \end{vmatrix}. \tag{6.6}$$

(Hier duidt het dakje op de elementen in de j-de rij aan dat deze rij moet worden weggelaten.) Dan is $\mathbf{V} \neq 0$ en staat $\mathbf{V}$ loodrecht op $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Voorts geldt er dat

$$\det(\mathbf{V}, v_1, \ldots, v_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{V}_j^2 = |\mathbf{V}|^2. \tag{6.7}$$

Zij S het $(n-1)$-dimensionale parallellepipedum in $\mathbb{R}^n$ gedefinieerd door (6.4), dus opgespannen door $v_1, \ldots, v_{n-1}$. Dan geldt:

$$\mathrm{opp}(S) = |\mathbf{V}|. \tag{6.8}$$

Bewijs De $n \times (n-1)$ matrix $(v_{jk})_{j=1,\ldots,n;\, k=1,\ldots,n-1}$ heeft $n-1$ lineair onafhankelijke kolommen, dus er moeten ook $n-1$ lineair onafhankelijke rijen te vinden zijn. Dus er moet een $(n-1) \times (n-1)$ submatrix zijn met determinant $\neq 0$. Gezien (6.6) is dus $\mathbf{V}_j \neq 0$ voor zekere j, dus $\mathbf{V} \neq 0$.

Voor $k = 1, \ldots, n-1$ geldt dat

$$0 = \det(v_k, v_1, \ldots, v_{n-1}) = \begin{vmatrix} v_{1k} & v_{11} & \ldots & v_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{nk} & v_{n1} & \ldots & v_{n,n-1} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} v_{jk}\, \mathbf{V}_j = \langle v_k, \mathbf{V} \rangle$$

(door ontwikkeling van de determinant t.o.v. de eerste kolom en gebruik van (6.6)). Dus $\mathbf{V}$ staat loodrecht op $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

Het linkerlid van (6.7) wordt in volledig uitgeschreven vorm gelijk aan

$$\begin{vmatrix} \mathbf{V}_1 & v_{11} & \ldots & v_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{V}_n & v_{n1} & \ldots & v_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

Ontwikkeling van deze determinant t.o.v. de eerste kolom en substitutie van (6.6) levert het rechterlid van (6.7).

Zij T een orthogonale transformatie in $\mathbb{R}^n$ zo dat de vectoren Tv_i in de deelruimte $\{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n\}$ van $\mathbb{R}^n$ terecht komen. Dan zal vanwege de net bewezen orthogonaliteitseigenschap van $\mathbf{V}$ gelden dat $T\mathbf{V} = \pm|\mathbf{V}|\,(0, \ldots, 0, 1)$. Dus met behulp van (6.8) verkrijgen we:

$$\begin{aligned} |\mathbf{V}|^2 = |\det_n(\mathbf{V}, v_1, \ldots, v_{n-1})| &= |\det_n(T\mathbf{V}, Tv_1, \ldots, Tv_{n-1})| \\ &= |\mathbf{V}|\,|\det_{n-1}(Tv_1, \ldots, Tv_{n-1})| = |\mathbf{V}|\,\mathrm{opp}(S), \end{aligned}$$

waarbij $\det_n$ betekent dat de determinant van n vectoren in $\mathbb{R}^n$ genomen moet worden. Omdat $|\mathbf{V}| \neq 0$ levert dit (6.8). □

In het geval $n = 3$ van deze Stelling kunnen we $\mathrm{opp}(S)$ uitdrukken met behulp van het uitproduct. Herinner je dat het *uitproduct* van vectoren $x = (x_1, x_2, x_3)$ en $y = (y_1, y_2, y_3)$ in $\mathbb{R}^3$ gegeven wordt door de vector

$$x \times y := (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1). \tag{6.9}$$

Voor $n = 3$ volgt dus uit (6.6) dat

$$\mathbf{V} = v_1 \times v_2.$$

Dan geeft (6.8) dat

$$\mathrm{opp}(S) = |v_1 \times v_2|.$$

6.7 **Opgave** Laten $v_1, \ldots, v_{n-1}$ lineair onafhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn. Zij S het $(n-1)$-dimensionale parallellepipedum in $\mathbb{R}^n$ gedefinieerd door (6.4). Bewijs dat

$$(\mathrm{opp}(S))^2 = \det(\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1,\ldots,n-1}.$$

6.8 We willen nu de definitie van oppervlakte zoals gegeven in §6.5 uitbreiden tot het geval van een mogelijk gekromd $(n-1)$-dimensionaal oppervlak in $\mathbb{R}^n$. Echter, eerst moeten we een preciezere betekenis geven aan het begrip $(n-1)$-dimensionaal oppervlak in $\mathbb{R}^n$. In plaats van oppervlak zullen we liever spreken over subvariëteit van $\mathbb{R}^n$. Een subvariëteit van $\mathbb{R}^n$ kan gedefinieerd worden voor willekeurige dimensie $m \leq n$, dus niet persé voor dimensie $n - 1$.

Laten we het geval van een boloppervlak in $\mathbb{R}^3$ in gedachten nemen. In §5.18 hebben we gezien dat dit met behulp van bolcoördinaten kan worden geparametriseerd. Op het boloppervlak wordt de positie beschreven door de twee coördinaten θ, ψ. We hebben gezien dat deze coördinaten zich niet overal mooi gedragen, maar wel buiten de noord- en zuidpool, dus als $0 < \theta < \pi$. Een groot gedeelte van de bol kan zodoende met één stel coördinaten θ, ψ goed beschreven worden en is te verkrijgen als het beeld van een open gedeelte van het (θ, ψ)-vlak.

De juist geschetste situatie nemen we als uitgangspunt voor de definitie van een eenvoudig geval van een subvariëteit.

Definitie Zij M een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Neem aan dat er een open deelverzameling U van $\mathbb{R}^m$ (met $m \leq n$) is en een C^1-afbeelding $\phi: U \to \mathbb{R}^n$ zo dat:
(i) ϕ beeldt U bijectief af op M.
(ii) Voor alle $t = (t_1, \ldots, t_m) \in U$ geldt dat $\phi'(t)$ (een $n \times m$ matrix) rang m heeft (dus maximale rang).
Dan noemen we M samen met de afbeelding $\phi: U \to M$ een *globaal geparametriseerde subvariëteit* van $\mathbb{R}^n$ van dimensie m.

Meer precies zouden we hier van een C^1-subvariëteit moeten spreken omdat de afbeelding ϕ C^1 is. Als de afbeelding ϕ C^∞ is, dan mogen we van een C^∞-subvariëteit spreken. Dit geval wordt het meeste beschouwd, maar voor het hierna volgende hebben we een zo grote mate van gladheid niet nodig.

Een eerste voorbeeld van een subvariëteit wordt geleverd door een C^1-afbeelding $\phi: (a, b) \to \mathbb{R}^n$ (dus een C^1-kromme in $\mathbb{R}^n$). Neem aan dat ϕ injectief is en $\phi'(t) \neq 0$ voor alle $t \in (a, b)$. Dan hebben we te maken met een globaal geparametriseerde 1-dimensionale subvariëteit van $\mathbb{R}^n$.

6.9 Voorbeeld Neem $n := 3$ en $m = 2$. Laat $U := (0, \pi) \times (0, 2\pi)$, dus een open deel van $\mathbb{R}^2$, en zij $\phi(\theta, \psi) := (\sin\theta \cos\psi, \sin\theta \sin\psi, \cos\theta)$. Dit geeft bolcoördinaten op de eenheidssfeer S^2 in $\mathbb{R}^3$, cf. §5.18. De afbeelding ϕ is C^1 en

$$\phi'(\theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\psi & -\sin\theta \sin\psi \\ \cos\theta \sin\psi & \sin\theta \cos\psi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.10}$$

waaruit volgt dat $\phi'(\theta, \psi)$ rang 2 heeft voor $(\theta, \psi) \in U$. De afbeelding ϕ beeldt U bijectief af op een deelverzameling M van S^2 verkregen door één halve cirkel die van noord- naar zuidpool gaat, weg te laten uit S^2. Zodoende wordt M een globaal geparametriseerde 2-dimensionale subvariëteit van $\mathbb{R}^3$.

6.10 Zij M een globaal geparametriseerde $(n-1)$-dimensionale subvariëteit van $\mathbb{R}^n$. We willen de definitie geven van de integraal over M van een functie $f: M \to \mathbb{R}$ onder de aanname dat $f \circ \phi: U \to \mathbb{R}$ integreerbaar is over U. Eerst geven we de definitie. Daarna zullen we proberen de definitie aannemelijk te maken.

Definitie Zij M een globaal geparametriseerde $(n-1)$-dimensionale subvariëteit van $\mathbb{R}^n$ en gebruik alle notatie van Definitie 6.8. Definieer voor $t \in U$ de *gegeneraliseerde Jacobiaan* van ϕ in t als de n-dimensionale vector

$$\mathbf{J}_\phi(t) = ((\mathbf{J}_\phi(t))_1, \ldots, (\mathbf{J}_\phi(t))_n),$$

waarbij

$$(\mathbf{J}_\phi(t))_j := (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} (D_1\phi_1)(t) & \ldots & (D_{n-1}\phi_1)(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \widehat{(D_1\phi_j)(t)} & \ldots & \widehat{(D_{n-1}\phi_j)(t)} \\ \vdots & & \vdots \\ (D_1\phi_n)(t) & \ldots & (D_{n-1}\phi_n)(t) \end{vmatrix}. \tag{6.11}$$

Hier betekenen de dakjes op de elementen in de j-de rij weer dat die rij moet worden weggelaten.

Zij $f\colon M \to \mathbb{R}$. Dan definiëren we de *integraal* van f over M door

$$\int_M f(x)\,d\sigma(x) := \int_U f(\phi(t))\,|\mathbf{J}_\phi(t)|\,dt = \int_U f(\phi(t))\,\sqrt{(\mathbf{J}_\phi(t))_1^2 + \cdots + (\mathbf{J}_\phi(t))_n^2}\,dt, \quad (6.12)$$

mits de integraal in het rechterlid van (6.12) betekenis heeft.

De integraal in het rechterlid van (6.12) zal bijvoorbeeld betekenis hebben als een van de volgende situaties geldt:

(a) $f(\phi(t)) = 0$ voor t buiten een compacte integreerbare deelverzameling X van U en $(f \circ \phi)|_X$ is continu.

(b) $f := \chi_{\phi(X)}$ (karakteristieke functie), waarbij X een compacte integreerbare deelverzameling van U is. Dan gebruiken we (6.12) voor de definitie van de $(n-1)$-dimensionale *oppervlakte* van $\phi(X)$:

$$\operatorname{opp}(\phi(X)) = \int_{\phi(X)} d\sigma(x) := \int_X |\mathbf{J}_\phi(t)|\,dt. \quad (6.13)$$

(c) $f(\phi(t)) = 0$ voor t buiten een blok $B \subset U$ en $(f \circ \phi)|_B$ is continu.

(d) De functie $f \circ \phi$ is continu op U met compacte drager.

Gevallen (b) en (c) zijn specialisaties van geval (a). In geval (a) volgt de integreerbaarheid van de integrand $t \mapsto f(\phi(t))\,|\mathbf{J}_\phi(t)|$ uit Stelling 4.24, terwijl we in geval (d) deze integrand kunnen uitbreiden tot een functie in $C_c(\mathbb{R}^{n-1})$ door de functie 0 te stellen voor alle $t \in \mathbb{R}^{n-1}$ die buiten U liggen.

6.11 We bekijken een paar speciale gevallen van Definitie 6.10.

(i) Neem $n := 2$. Dan $U \subset \mathbb{R}$ en

$$\mathbf{J}_\phi(t) = (\phi_2'(t), -\phi_1'(t)), \quad \text{dus} \quad |\mathbf{J}_\phi(t)| = \sqrt{(\phi_1'(t))^2 + (\phi_2'(t))^2}. \quad (6.14)$$

Substitutie in (6.12) geeft formule (6.3) voor integratie over een kromme in $\mathbb{R}^2$ terug.

(ii) Neem ϕ lineair:

$$\phi(t_1, \ldots, t_{n-1}) := t_1 v_1 + \cdots + t_{n-1} v_{n-1},$$

waarbij $v_1, \ldots, v_{n-1}$ lineair onafhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^{n-1}$ zijn. Schrijf de coördinaten van deze vectoren als in (6.5) en laat $\mathbf{V} = (\mathbf{V}_1, \ldots \mathbf{V}_n)$ gedefinieerd zijn door (6.6). Dan geldt dat

$$\phi'(t) = \begin{pmatrix} (D_1\phi_1)(t) & \ldots & (D_{n-1}\phi_1)(t) \\ \vdots & & \vdots \\ (D_1\phi_n)(t) & \ldots & (D_{n-1}\phi_n)(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & \ldots & v_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \ldots & v_{n,n-1} \end{pmatrix}.$$

Dus wegens (6.11) en (6.6) volgt er dat

$$\mathbf{J}_\phi(t) = \mathbf{V}. \quad (6.15)$$

Laat $B := [0,1]^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ (eenheidskubus). Dan is $\phi(B)$ het $(n-1)$-dimensionale parallellepipedum gegeven door (6.4). Zij f een functie op $\phi(B)$ zo dat $f \circ \phi$ continu is op B. Dan geeft combinatie van (6.15), (6.12) en (6.8) dat

$$\int_{\phi(B)} f(x)\, d\sigma(x) = \mathrm{opp}(\phi(B)) \int_B f(\phi(t))\, dt.$$

Voor f identiek 1 is dit in overeenstemming met de definitie van oppervlakte in (6.13).

(iii) Neem $n := 3$. Dan $U \subset \mathbb{R}^2$ en

$$\phi'(t) = \begin{pmatrix} (D_1\phi_1)(t) & (D_2\phi_1)(t) \\ (D_1\phi_2)(t) & (D_2\phi_2)(t) \\ (D_1\phi_3)(t) & (D_2\phi_3)(t) \end{pmatrix}.$$

De matrix bestaat uit de twee kolomvectoren $(D_1\phi)(t)$ en $(D_2\phi)(t)$. Dan volgt er uit (6.11) en (6.9) dat de gegeneraliseerde Jacobiaan van ϕ als een uitproduct is te schrijven:

$$\mathbf{J}_\phi(t) = (D_1\phi)(t) \times (D_2\phi)(t).$$

Dus formule (6.12) kan voor $n = 3$ geschreven worden in de vorm

$$\int_M f(x)\, d\sigma(x) := \iint_U f(\phi(s,t))\, \big|(D_1\phi)(s,t) \times (D_2\phi)(s,t)\big|\, ds\, dt.$$

Opmerking Uit Propositie 6.6 volgt er door vergelijking van (6.11) met (6.6) dat de vector $\mathbf{J}_\phi(t)$ loodrecht staat op de lineair onafhankelijke vectoren $(D_1\phi)(t), \ldots, (D_{n-1}\phi)(t)$. We noemen het lineaire opspansel van deze $n-1$ vectoren de *raakruimte* $T_{\phi(t)}M$ aan M in het punt $\phi(t)$. Deze raakruimte is een $(n-1)$-dimensionale deelruimte van $\mathbb{R}^n$. De vector $\mathbf{J}_\phi(t)$ staat loodrecht op de raakruimte $T_{\phi(t)}M$.

6.12 In Propositie 3.23(a) werd ook al een definitie van raakruimte gegeven, die anders lijkt dan de definitie van raakruimte in Opmerking 6.11 hierboven. We zullen het verband tussen de twee definities nagaan. Neem E, f en M als in §3.23, echter met n vervangen door $n-m$. Dus $E \subset \mathbb{R}^n$ open en $f\colon E \to \mathbb{R}^{n-m}$ is een C^1-afbeelding, waarbij $n > m > 0$. Definieer $M := \{z \in E \mid f(z) = 0\}$. Zij $c \in M$ en neem aan dat c een regulier punt is van c, dus de $(n-m) \times n$ matrix van $f'(c)$ heeft (maximale) rang $n-m$. Dan zijn er in deze matrix $n-m$ lineair onafhankelijke kolomvectoren te vinden. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat de eerste $n-m$ kolomvectoren lineair onafhankelijk zijn (anders hernummeren we de coördinaten van $\mathbb{R}^n$). Nu zijn we in de situatie van Stelling 3.15. Dus $c = (a,b)$ ($a \in \mathbb{R}^{n-m}$, $b \in \mathbb{R}^m$) en we kunnen open omgevingen U van c in E en W van b in $\mathbb{R}^m$ nemen en een C^1-afbeelding $g\colon W \to \mathbb{R}^{n-m}$ zo dat de conclusies van Stelling 3.15 gelden. I.h.b. geldt er dan dat iedere $(x,y) \in U \cap M$ met $y \in W$ geschreven kan worden als $(g(y), y)$. Dus de afbeelding $\phi\colon y \mapsto (g(y), y)\colon W \to U \cap M$ is bijectief en voor alle $y \in W$ geldt dat $\phi'(y)$ (een $n \times m$ matrix) rang m heeft (ga na). Volgens Definitie 6.8 is $U \cap M$ dan een door ϕ globaal geparametriseerde subvariëteit van $\mathbb{R}^n$ van dimensie m.

Volgens Propositie 3.23 is de raakruimte $T_c(M)$ gedefinieerd als de verzameling van alle raakvectoren $\gamma'(0)$, waarbij $t \mapsto \gamma(t)$ een willekeurige C^1-kromme is in E die geheel in M ligt en waarvoor $\gamma(0) = c$. In het bewijs van Propositie 3.23 zagen we dat $T_c(M) = \{(g'(b)w, w) \mid w \in \mathbb{R}^m\}$, een m-dimensionale lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$. Dus $T_c(M) = \{\phi'(b)w \mid w \in \mathbb{R}^m\}$, het lineaire opspansel van de m vectoren $(D_1\phi)(b), \ldots, (D_m\phi)(b)$. Dit is in overeenstemming met de definitie van raakruimte gegeven in Opmerking 6.11.

6.13 Het is belangrijk om op te merken dat de definitie van integraal van een functie over M, zoals gegeven in formule (6.12), onafhankelijk is van de keuze van de parametrisering. Immers, stel dat V ook een open deelverzameling van $\mathbb{R}^{n-1}$ is en dat $\psi: V \to U$ een C^1-diffeomorfisme is. Dan is de C^1-afbeelding $\phi \circ \psi: V \to \mathbb{R}^n$ injectief met beeld M en de afgeleide $(\phi \circ \psi)'(s) = \phi'(\psi(s))\, \psi'(s)$ zal voor alle $s \in V$ rang $n-1$ hebben omdat dit geldt voor $\phi'(t)$. Er volgt uit (6.11) dat

$$\mathbf{J}_{\phi\circ\psi}(s) = J_\psi(s)\, \mathbf{J}_\phi(\psi(s)) \quad (s \in V). \tag{6.16}$$

Nu levert de transformatieformule (5.12) dat voor $f \in C_c(U)$ geldt:

$$\int_U f(\phi(t))\, |\mathbf{J}_\phi(t)|\, dt = \int_V f(\phi(\psi(s))\, |\mathbf{J}_\phi(\psi(s))|\, |J_\psi(s)|\, ds.$$

Met behulp van (6.16) geeft dit:

$$\int_U f(\phi(t))\, |\mathbf{J}_\phi(t)|\, dt = \int_V f(\phi(\psi(s))\, |\mathbf{J}_{\phi\circ\psi}(s)|\, ds. \tag{6.17}$$

Linker- en rechterlid van (6.17) komen voor als rechterlid in formule (6.12) bij de parametriseringen $\phi: U \to M$ resp. $\phi \circ \psi: V \to M$.

Opgave Bewijs dat de in Opmerking 6.11 gedefinieerde raakruimte T_xM ($x \in M$) onafhankelijk is van de parametrisering van M, d.w.z., dat een parametrisering $\phi \circ \psi: V \to M$ als boven dezelfde raakruimte in x zou opleveren als de parametrisering $\phi: U \to M$.

6.14 Ter verdere motivatie van de definitie in (6.12) bekijken we het speciale geval (c) (zie discussie volgend op (6.12)). In dat geval kunnen we (6.12) schrijven als

$$\int_{\phi(B)} f(x)\, d\sigma(x) := \int_B f(\phi(t))\, |\mathbf{J}_\phi(t)|\, dt, \tag{6.18}$$

waarbij $B \subset U$ een blok is. Zij P een multipartitie van B. Dan geeft P aanleiding tot opdeling van B in deelblokken

$$B_{\mathbf{i}} = B_{i_1,\ldots,i_{n-1}} := [t_{1,i_1-1}, t_{1,i_1}] \times \cdots \times [t_{n-1,i_{n-1}-1}, t_{n-1,i_{n-1}}].$$

We kunnen het rechterlid van (6.18) dan benaderen met een eindige som

$$\sum_{\mathbf{i}} f(\phi(t_{\mathbf{i}}))\, |\mathbf{J}_\phi(t_{\mathbf{i}})|\, \mathrm{vol}(B_{\mathbf{i}}), \tag{6.19}$$

waarbij $\mathbf{i} := (i_1, \ldots, i_{n-1})$ en $t_{\mathbf{i}} := (t_{1,i_1}, \ldots, t_{n-1,i_{n-1}})$. Definieer nu voor vaste $\mathbf{i}$

$$v_{jk} := (D_k\phi_j)(t_{\mathbf{i}})\, (t_{k,i_k} - t_{k,i_k-1}) \quad (j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, n-1) \tag{6.20}$$

en laat de vector $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^n$ gedefinieerd zijn in termen van de v_{jk} zoals in (6.6). Dan zien we dat

$$|\mathbf{J}_\phi(t_{\mathbf{i}})|\, \mathrm{vol}(B_{\mathbf{i}}) = |\mathbf{V}|, \tag{6.21}$$

wat wegens (6.8) gelijk is aan de $(n-1)$-dimensionale oppervlakte van het parallellepipedum opgespannen door de vectoren $v_1, \ldots, v_{n-1}$ met coördinaten als in (6.5). Echter, we kunnen het rechterlid van (6.20) weer zien als de Taylorbenadering van eerste orde van

$$w_{jk} := \phi_j(t_{1,i_1}, \ldots, t_{k,i_k}, \ldots, t_{n-1,i_{n-1}}) - \phi_j(t_{1,i_1}, \ldots, t_{k,i_k-1}, \ldots, t_{n-1,i_{n-1}}).$$

Schrijf voor $k = 1, \ldots, n-1$:

$$w_k := (w_{1k}, \ldots, w_{nk}) = \phi(t_{1,i_1}, \ldots, t_{k,i_k}, \ldots, t_{n-1,i_{n-1}}) - \phi(t_{1,i_1}, \ldots, t_{k,i_k-1}, \ldots, t_{n-1,i_{n-1}}).$$

Dan kunnen we $|\mathbf{V}|$ in het rechterlid van (6.21) als benadering zien van de $(n-1)$-dimensionale oppervlakte van het parallellepipedum opgespannen door de vectoren $w_1, \ldots, w_{n-1}$. Laten we dit parallellepipedum $S_\mathbf{i}$ noemen.

We verkrijgen dus uiteindelijk dat de som (6.19), en daarmee ook de integraal (6.18), benaderd kunnen worden door de eindige som

$$\sum_{\mathbf{i}} f(\phi(t_\mathbf{i}))\, \mathrm{opp}(S_\mathbf{i}). \tag{6.22}$$

De uitdrukking (6.22) ziet er acceptabel uit als benadering van de integraal van f over $\phi(B)$, omdat we het affiene oppervlak $S_\mathbf{i}$ als benadering kunnen zien van het gekromde oppervlak $\phi(B_\mathbf{i})$.

Er kan bewezen worden dat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ gevonden kan worden zo dat de som (6.22) in absolute waarde minder dan ε van de integraal (6.18) verschilt als P een multipartitie is waarvoor de zijden van de blokken $B_\mathbf{i}$ lengte kleiner dan δ hebben.

6.15 We zullen in de praktijk willen werken met compacte $(n-1)$-dimensionale subvariëteiten van $\mathbb{R}^n$. Deze zullen vaak optreden als de rand van een open begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Denk bijvoorbeeld aan de open eenheidsbal in $\mathbb{R}^n$ die de eenheidssfeer S^{n-1} in $\mathbb{R}^n$ als rand heeft. Compacte subvariëteiten zullen doorgaans niet globaal geparametriseerd kunnen worden. Kijk maar naar S^2 (Voorbeeld 6.8). De bolcoördinaten gedragen zich “slecht” op de noord- en zuidpool. We zouden nog met een tweede stel bolcoördinaten kunnen werken die t.o.v. het eerste stel wat verdraaid zijn, en die op de noord- en zuidpool zich wel goed gedragen. Dit is juist wat in een wereldatlas gebeurt. Zo’n atlas bevat doorgaans een kaartblad met een wereldkaart waarop de polen niet voorkomen, en daarnaast twee kaartbladen met de omstreken van de noord- resp. zuidpool.

Grofweg gezegd is een algemene m-dimensionale *subvariëteit* van $\mathbb{R}^n$ gedefinieerd als een deelverzameling M van $\mathbb{R}^n$ zo dat er voor elk punt $x \in M$ een open deelverzameling U_x van $\mathbb{R}^m$ is en een injectieve C^1-afbeelding $\phi_x\colon U_x \to \mathbb{R}^n$ zo dat $x \in \phi_x(U_x) \subset M$ en $\phi_x'(t)$ rang m (i.e. maximale rang) heeft voor alle $t \in U_x$. Verder is er nog een conditie dat er, in geval van overlappende $\phi_x(U_x)$ en $\phi_y(U_y)$, een C^1-transformatie is die op de overlapping de twee parametriseringen met elkaar verbindt.

Stel nu dat we een compacte $(n-1)$-dimensionale subvariëteit M van $\mathbb{R}^n$ hebben. Dan is het mogelijk om de integraal $\int_M f(x)\, d\sigma(x)$ van een continue functie f over M te definiëren met behulp van een geschikte partitie van de eenheid op M (cf. §5.9). Er kunnen continue functies $f_1, \ldots, f_r$ op M gevonden worden die niet-negatief zijn, waarvoor geldt dat $f_1 + \cdots + f_r = 1$ op M, en zo dat $\mathrm{supp}(f_j)$ bevat is in een open stuk M_j van M dat globaal geparametriseerd kan worden. Dan kunnen we schrijven dat

$$\int_M f(x)\, d\sigma(x) = \sum_{j=1}^{r} \int_{M_j} f(x)\, f_j(x)\, d\sigma(x) \tag{6.23}$$

en we kunnen elke integraal voorkomend als term in de som in het rechterlid definiëren met behulp van (6.12). Dan kan er ook nog aangetoond worden dat de definitie onafhankelijk is van de keuze van de partitie van de eenheid en van de parametriseringen op de deelstukken (zie ook §6.13).

6.16 Voorbeeld We gaan weer terug naar bet voorbeeld van S^2 (zie Voorbeeld 6.9). Uit (6.10) volgt dat

$$\mathbf{J}_\phi(\theta,\psi) = (\sin^2\theta\,\cos\psi, \sin^2\theta\,\sin\psi, \sin\theta\,\cos\theta),$$

dus

$$|\mathbf{J}_\phi(\theta,\psi)| = \sin\theta.$$

Zij $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ continu. Voor elke compacte integreerbare deelverzameling X van $(0,\pi)\times(0,2\pi)$ kunnen we dan met behulp van (6.12) schrijven:

$$\int_{S^2} f(x)\,\chi_{\phi(X)}(x)\,d\sigma(x) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\phi(\theta,\psi))\,\chi_X(\theta,\psi)\,\sin\theta\,d\theta\,d\psi. \tag{6.24}$$

Met behulp van aanvullende parametriseringen en met gebruik van formule (6.23) kan dan beargumenteerd worden dat we $\int_{S^2} f(x)\,d\sigma(x)$ verkrijgen door rechts in (6.24) de limiet te nemen voor X naderend naar $(0,\pi)\times(0,2\pi)$. Het resultaat is:

$$\int_{S^2} f(x)\,d\sigma(x) = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\psi=0}^{2\pi} f(\phi(\theta,\psi))\,\sin\theta\,d\theta\,d\psi. \tag{6.25}$$

Formule (6.13) levert dan de bekende formule voor het oppervlak van S^2:

$$\mathrm{opp}(S^2) = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\psi=0}^{2\pi} \sin\theta\,d\theta\,d\psi = 4\pi.$$

6.17 Een veel gebruikte lokale parametrisering voor een $(n-1)$-dimensionale subvariëteit M van $\mathbb{R}^n$ heeft de vorm

$$\phi(x_1,\ldots,x_{n-1}) = (x_1,\ldots,x_{n-1},\phi_n(x_1,\ldots,x_{n-1})), \tag{6.26}$$

met ϕ_n een C^1-functie. Dus de eerste $n-1$ coördinaten van $x\in M$ zijn de parameters en de n-de coördinaat hangt van deze parameters af. Algemener kan voor zekere k de k-de coördinaat van $x\in M$ lokaal van de overige coördinaten afhangen. In het geval van (6.26) geldt dat

$$\phi'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ (D_1\phi_n)(t) & \ldots & \ldots & (D_{n-1}\phi_n)(t) \end{pmatrix}.$$

Dus

$$\mathbf{J}_\phi(t) = ((-1)^{n-2}(D_1\phi_n)(t),\ldots,(-1)^{n-2}D_{n-1}\phi_n(t),(-1)^{n-1})$$

en

$$|\mathbf{J}_\phi(t)|^2 = |(\nabla\phi_n)(t)|^2 + 1. \tag{6.27}$$

Dus formule (6.12) krijgt in geval van een parametrisering $\phi: U \to M$ van type (6.26) de vorm

$$\begin{aligned}\int_M f(x)\,d\sigma(x) = \int_U & f(x_1,\ldots,x_{n-1},\phi_n(x_1,\ldots,x_{n-1})) \\ & \times \sqrt{|(\nabla\phi_n)(x_1,\ldots,x_{n-1})|^2+1}\;\,dx_1\ldots dx_{n-1}.\end{aligned} \tag{6.28}$$

Voorbeeld We nemen weer het voorbeeld van de eenheidssfeer S^2 in $\mathbb{R}^3$. Het bovenhalfrond kunnen we parametriseren met $(x,y) \mapsto (x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$, waarbij (x,y) de open eenheidsschijf $\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$ doorloopt. Evenzo kunnen we het benedenhalfrond parametriseren door $(x,y) \mapsto (x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2})$. In beide gevallen geldt dat $\phi(x,y) = (x,y,z)$ en levert formule (6.27) dat

$$\mathbf{J}_\phi(x,y) = (x/z, y/z, 1), \quad \text{dus} \quad |\mathbf{J}_\phi(x,y)| = 1/\sqrt{1-x^2-y^2}. \tag{6.29}$$

Zij $f: S^2 \to \mathbb{R}$ continu. Formule (6.28) levert dan:

$$\int_{S^2} f(x)\,d\sigma(x) = \iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{f(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}) + f(x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2})}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy. \tag{6.30}$$

Dit is in eerste instantie alleen gerechtvaardigd wanneer f gelijk aan 0 is in een omgeving van de evenaar, maar het kan met een limietovergang gerechtvaardigd worden dat formule (6.30) algemeen geldt. Door toepassing van de tranformatieformule op (6.30) met de substitutie $(x,y) = (\sin\theta\,\cos\psi, \sin\theta\,\sin\psi)$ komen we weer uit op de integratieformule (6.25) in bolcoördinaten.

6.2 *Georiënteerde subvariëteiten*

Voor het vervolg is de oriëntatie van een subvariëteit van $\mathbb{R}^n$ van belang. Dit begrip bekijken we eerst voor een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$, vervolgens voor een globaal geparametriseerde subvariëteit van $\mathbb{R}^n$ en tenslotte voor een meer algemene subvariëteit.

6.18 (*het begrip oriëntatie voor een lineaire deelruimte*)
Laten we eerst kijken naar een m-dimensionale lineaire deelruimte V van $\mathbb{R}^n$. Dan wordt V bepaald door een basis $v_1,\ldots,v_m$ voor V. De volgorde waarin deze basisvectoren hier gegeven worden zal van belang zijn. We spreken van een geordende basis. Laat $w_1,\ldots,w_m$ een andere geordende basis voor V zijn. Dan is er een inverteerbare $m\times m$ matrix $(c_{ij})_{i,j=1,\ldots,m}$ zo dat $w_j = \sum_{i=1}^m c_{ij}\,v_i$. Noteer de determinant van deze matrix met $\det(w_1,\ldots,w_m;v_1,\ldots,v_m)$. We zeggen dat de twee geordende bases $v_1,\ldots,v_m$ en $w_1,\ldots,w_m$ dezelfde *oriëntatie* aan V geven als

$$\det(w_1,\ldots,w_m;v_1,\ldots,v_m) > 0.$$

Als het teken van de determinant negatief is dan spreken we van tegengestelde oriëntatie. Het begrip oriëntatie is dus eigenlijk een equivalentierelatie op de verzameling van geordende bases van V, en er zijn slechts twee equivalentieklassen.

Merk op dat een geordende basis verkregen uit $v_1, \ldots, v_m$ door verwisseling van twee vectoren leidt tot een geordende basis met tegengestelde oriëntatie. Dit is ook het geval als we één vector v_i door $-v_i$ vervangen.

Als V een $(n-1)$-dimensionale deelruimte van $\mathbb{R}^n$ is, dan kunnen we bij een geordende basis $v_1, \ldots, v_{n-1}$ voor V een vector $\mathbf{V}$ als in (6.6) maken, ongelijk 0 en loodrecht op V. Als op een zelfde manier een vector $\mathbf{W}$ gemaakt wordt uit een geordende basis $w_1, \ldots, w_{n-1}$ voor V dan zal $\mathbf{W} = \lambda\mathbf{V}$ met $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Het is nu gemakkelijk te bewijzen (ga na) dat de twee geordende bases dezelfde oriëntatie bepalen desda $\mathbf{V}$ en $\mathbf{W}$ in de zelfde richting wijzen (i.e., $\lambda > 0$).

Opmerking Zij $e_1, \ldots, e_n$ de standaardbasis voor $\mathbb{R}^n$. Er volgt uit (6.7) dat

$$\det(\mathbf{V}, v_1, \ldots, v_{n-1}; e_1, \ldots, e_n) = |\mathbf{V}|^2 > 0.$$

We concluderen dat de geordende basis $\mathbf{V}, v_1, \ldots, v_{n-1}$ voor $\mathbb{R}^n$ dezelfde oriëntatie aan $\mathbb{R}^n$ geeft als de standaardbasis $e_1, \ldots, e_n$.

6.19 (*het begrip oriëntatie voor een globaal geparametriseerde subvariëteit*)
Kijk eerst naar een 1-dimensionale subvariëteit. Een C^1-kromme in $\mathbb{R}^n$ kan in twee richtingen doorlopen worden. De richting wordt bepaald door de parametrisering van de kromme. Twee parametriseringen $\gamma\colon (a,b) \to K$ en $\delta\colon (c,d) \to K$ met $\delta(t) = \gamma(\phi(t))$ zullen dezelfde oriëntatie bepalen van K desda $\phi'(t) > 0$ voor alle t. Equivalent: de twee parametriseringen geven dezelfde oriëntatie desda voor elk punt $\gamma(s) = \delta(t) = x \in K$ de raakvectoren $\gamma'(s)$ en $\delta'(t)$ in x voldoen aan $\gamma'(s) = \lambda\,\delta'(t)$ met $\lambda > 0$. Er volgt uit Opmerking 6.18 voor $n = 2$, en ook uit formule (6.14), dat de basis $\mathbf{J}_\phi(t), \phi'(t)$ dezelfde oriëntatie aan $\mathbb{R}^2$ geeft als de standaardbasis e_1, e_2. Anders gezegd: Als (volgens standaard-conventie) e_1 t.o.v. e_2 naar rechts wijst, dan wijst ook $J_\phi(t)$ t.o.v. de raakvector $\phi'(t)$ naar rechts.

Zij algemener M een globaal geparametriseerde m-dimensionale subvariëteit van $\mathbb{R}^n$ met parametrisering $\phi\colon U \to M$, waarbij U een samenhangende open deelverzameling van $\mathbb{R}^m$ is. Zij $t \in U$ en $x := \phi(t)$. Dan zijn de vectoren

$$(D_1\phi)(t), \ldots, (D_m\phi)(t) \tag{6.31}$$

lineair onafhankelijk. Als onmiddellijke generalisatie van de definitie in Opmerking 6.11 noemen we het lineaire opspansel van deze vectoren in $\mathbb{R}^n$ de *raakruimte* T_xM aan M in x. (Zie ook §6.12 voor het verband met de definitie van raakruimte in Propositie 3.23.) Dan is T_xM een m-dimensionale lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$ met geordende basis (6.31).

Neem nu een andere parametrisering $\chi\colon V \to M$ voor M (met V een samenhangende open deelverzameling van $\mathbb{R}^m$). Neem $s \in V$ zo dat $x = \phi(t) = \chi(s)$. Dan is het gemakkelijk in te zien dat

$$(D_1\chi)(s), \ldots, (D_m\chi)(s) \tag{6.32}$$

ook een geordende basis van T_xM is. We zeggen nu dat de twee parametriseringen van M dezelfde *oriëntatie* aan M geven als de twee geordende bases (6.31) en (6.32) dezelfde oriëntatie aan T_xM geven. Deze definitie is onafhankelijk van de keuze van x (hierbij is het essentieel dat U en V samenhangend zijn).

In het geval van een globaal geparametriseerde $(n-1)$-dimensionale subvariëteit kunnen we, op grond van wat we opmerkten aan het eind va §6.18, inzien dat twee parametriseringen $\phi\colon U \to M$ en $\chi\colon V \to M$ aanleiding geven tot dezelfde oriëntatie van M desda als voor $x = \phi(t) = \chi(s)$ de vectoren $\mathbf{J}_\phi(t)$ en $\mathbf{J}_\chi(s)$ (die beide loodrecht op T_xM staan) in dezelfde richting wijzen. Voor dit geval definiëren we de *normaalvector*

$$\mathbf{n}_x := |\mathbf{J}_\phi(t)|^{-1}\,\mathbf{J}_\phi(t) \quad (x = \phi(t) \in M). \tag{6.33}$$

De definitie is onafhankelijk van de parametrisering (mits de parametrisering compatibel met de oriëntatie is). De vector $\mathbf{n}_x$ heeft lengte 1 en staat loodrecht op de raakruimte T_xM.

Er volgt weer uit Opmerking 6.18 dat de basis $\mathbf{J}_\phi(t), (D_1\phi)(t), \ldots, (D_{n-1}\phi)(t)$ aan $\mathbb{R}^n$ dezelfde oriëntatie geeft als de standaardbasis $e_1, \ldots, e_n$.

6.20 (*het begrip oriëntatie voor een algemene subvariëteit*)
Bekijk nu een algemene m-dimensionale subvariëteit M van $\mathbb{R}^n$. Laten we aannemen dat M een compacte deelverzameling is van $\mathbb{R}^n$. Zoals beschreven in §6.15, kunnen we dan M schrijven als een vereniging van open delen $M_1, \ldots, M_r$ zo dat ieder deel M_j globaal geparametriseerd kan worden door $\phi_{(j)}\colon U_j \to M_j$ en zo dat de parametriseringen $\phi_{(i)}$ en $\phi_{(j)}$ door een C^1-diffeomorfisme in elkaar overgaan op de overlapping $M_i \cap M_j$.

Als M bovendien samenhangend is dan kunnen we ieder tweetal delen M_i en M_j met elkaar verbinden door een rij $M_i = M_{k_0}, M_{k_1}, \ldots, M_{k_r} = M_j$ zo dat $M_{k_{l-1}} \cap M_{k_l} \neq \emptyset$. voor $l = 1, \ldots, r$.

We zeggen dat de parametriseringen $\phi_{(i)}$ *compatibele oriëntaties* geven aan de delen M_i van M als voor alle i, j met $i \neq j$ en $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ de parametriseringen $\phi_{(i)}$ en $\phi_{(j)}$ dezelfde oriëntatie geven aan $M_i \cap M_j$. We noemen M *oriënteerbaar* als er parametriseringen met compatibele oriëntaties bestaan.

Op een oriënteerbare variëteit die bovendien samenhangend is zijn er twee mogelijke oriëntaties. De oriëntatie wordt reeds vastgelegd door de oriëntatie van de raakruimte T_xM voor één enkel punt $x \in M$, zoals bepaald door de basis (6.31) voor T_xM, waarbij $\phi(t) = \phi_{(i)}(t) = x \in M_i$.

Er bestaan niet-oriënteerbare variëteiten. Kijk bijvoorbeeld naar de Möbiusband.

6.21 Opmerking Belangrijke voorbeelden van georiënteerde subvariëteiten worden verkregen door naar randen te kijken. Zij $X \subset \mathbb{R}^n$ open en begrensd. Neem aan dat de compacte verzameling $M := \partial X$ de structuur van een $(n-1)$-dimensionale subvariëteit van $\mathbb{R}^n$ heeft. Stel dat voor elke $x \in M$ de verzameling X aan één kant van M ligt. Formeel bedoelen we hiermee dat er voor iedere $x \in M$ een samenhangende open omgeving W van x in $\mathbb{R}^n$ is zo dat $W\backslash M$ twee samenhangscomponenten heeft, de ene geheel binnen X en de andere geheel buiten X. We kunnen dan voor iedere $x \in M$ een "normaalrichting naar buiten" kiezen, d.w.z. een vector $\mathbf{n}_x \in \mathbb{R}^n$, loodrecht op de raakruimte T_xM, van lengte 1, en zo dat $x + \lambda\mathbf{n}_x \notin X$ voor voldoende kleine positieve λ. In deze situatie kunnen we rond elke $x \in M$ de parametrisering ϕ zo kiezen dat, voor $x = \phi(t)$, de vector $\mathbf{J}_\phi(t)$ in dezelfde richting wijst als $\mathbf{n}_x$. Deze parametriseringen geven compatibele oriëntaties aan de delen van M en leggen een oriëntatie van M vast. De net ingevoerde normaalvector valt dan samen met de normaalvector gegeven door formule (6.33).

6.22 Voorbeeld We nemen weer het voorbeeld van S^2. Deze is compact en samenhangend. We borduren voort op Voorbeeld 6.17 en we bekijken zes parametriseringen voor delen van S^2:

1. $M_1 := \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}$, $\phi_{(1)}(x, y) := (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) = (x, y, z)$,
   $\mathbf{J}_{\phi_{(1)}}(x, y) = (x/z, y/z, 1)$.

2. $M_2 := \{(x,y,z) \in S^2 \mid z < 0\}$, $\phi_{(2)}(y,x) := (x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2}) = (x,y,z)$, $\mathbf{J}_{\phi_{(2)}}(y,x) = (-x/z, -y/z, -1)$.
3. $M_3 := \{(x,y,z) \in S^2 \mid y > 0\}$, $\phi_{(3)}(z,x) := (x, \sqrt{1-x^2-z^2}, z) = (x,y,z)$, $\mathbf{J}_{\phi_{(3)}}(z,x) = (x/y, 1, z/y)$.
4. $M_4 := \{(x,y,z) \in S^2 \mid y < 0\}$, $\phi_{(4)}(x,z) := (x, -\sqrt{1-x^2-z^2}, z) = (x,y,z)$, $\mathbf{J}_{\phi_{(4)}}(x,z) = (-x/y, -1, -z/y)$.
5. $M_5 := \{(x,y,z) \in S^2 \mid x > 0\}$, $\phi_{(5)}(y,z) := (\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z) = (x,y,z)$, $\mathbf{J}_{\phi_{(5)}}(y,z) = (1, y/x, z/x)$.
6. $M_6 := \{(x,y,z) \in S^2 \mid x < 0\}$, $\phi_{(6)}(z,y) := (-\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z) = (x,y,z)$, $\mathbf{J}_{\phi_{(6)}}(z,y) = (-1, -y/x, -z/x)$.

We zien dat $M = \cup_{i=1}^{6} M_i$ en dat vor elke $(x,y,z) \in M_i \cap M_j$ de vectoren $\mathbf{J}_{\phi_{(i)}}$ en $\mathbf{J}_{\phi_{(j)}}$ voor dat punt in dezelfde richting wijzen. Dus S^2 is oriënteerbaar.

Opmerking 6.21 geeft een veel gemakkelijker argument waarom S^2 oriënteerbaar is. De sfeer S^2 is immers de rand van de open eenheidsbal in $\mathbb{R}^3$. In ieder punt van S^2 is het duidelijk wat de normaalrichting naar buiten is. Dit legt een oriëntatie voor S^2 vast. Je kunt nagaan dat de hierboven gekozen oriëntatie d.m.v. expliciete lokale parametriseringen leidt tot vectoren $\mathbf{J}_\phi(t)$ die naar buiten wijzen en dat $\mathbf{n}_{(x,y,z)} = (x,y,z)$.

6.3 *Integraal van een differentiaalvorm over een subvariëteit*

Differentiaalvormen zullen hier alleen worden ingevoerd als formele uitdrukkingen die geïntegreerd kunnen worden. We hebben ze in dit hoofdstuk nodig omdat een versie van de Stelling van Green elegant in termen van integralen van differentiaalvormen geformuleerd kan worden. Bij het vak Differentiaalmeetkunde zul je leren dat het begrip differentiaalvorm veel rijker is.

6.23 Definitie Zij M een $(n-1)$-dimensionale subvariëteit van $\mathbb{R}^n$ die globaal geparametriseerd is door $\phi\colon U \to M$ met $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ open. Deze parametrisering legt dus een oriëntatie vast voor M. Zij $i \in \{1,\dots,n\}$ en $g_i\colon M \to \mathbb{R}$. Dan definiëren we

$$\int_M g_i(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n := \int_U g_i(\phi(t)) \begin{vmatrix} (D_1\phi_1)(t) & \ldots & (D_{n-1}\phi_1)(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \widehat{(D_1\phi_i)(t)} & \ldots & \widehat{(D_{n-1}\phi_i)(t)} \\ \vdots & & \vdots \\ (D_1\phi_n)(t) & \ldots & (D_{n-1}\phi_n)(t) \end{vmatrix} dt, \tag{6.34}$$

mits de integraal in het rechterlid betekenis heeft (cf. de discussie na formule (6.12)). De formele uitdrukking die achter het integraalteken in het linkerlid staat noemen we een *differentiaalvorm* (een $(n-1)$-*vorm*) op M. Algemener wordt een som over $i = 1,\dots,n$ van zulke uitdrukkingen een *differentiaalvorm* genoemd, en de integraal daarvan over M is gedefinieerd als de som over i van wat in het rechterlid van (6.34) staat.

Door substitutie van (6.11) in (6.34) verkrijgen we:

$$\int_M g_i(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n = (-1)^{i-1} \int_U g_i(\phi(t))\, (\mathbf{J}_\phi(t))_i\, dt.$$

Met behulp van formule (6.33) kunnen we het rechterlid schrijven als

$$(-1)^{i-1} \int_U g_i(\phi(t))\, (\mathbf{n}_{\phi(t)})_i\, |\mathbf{J}_\phi(t)|\, dt.$$

Toepassing van (6.12) levert tenslotte de volgende formule:

$$\int_M g_i(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n = (-1)^{i-1} \int_M g_i(x)\, (\mathbf{n}_x)_i\, d\sigma(x). \tag{6.35}$$

Met een soortgelijk argument als in §6.13 zien we dat de definitie in (6.34) onafhankelijk is van de keuze van de parametrisering zolang de oriëntatie behouden blijft. Dus als $\chi: V \to M$ een andere parametrisering is van M zo dat $\chi = \phi \circ \psi$ met $\psi: V \to U$ een C^1-diffeomorfisme en $J_\psi(s) > 0$ voor alle $s \in V$, dan mogen we in het rechterlid van (6.34) ϕ door χ en U door V vervangen.

Zij nu M een compacte oriënteerbare $(n-1)$-dimensionale subvariëteit van $\mathbb{R}^n$. Zoals in §6.20 schrijven we weer $M = \cup_{j=1}^r M_j$ met globale parametriseringen $\phi_{(j)}: U_j \to M_j$ voor de delen M_j en we nemen aan dat deze parametriseringen compatibele oriëntaties geven, dus een oriëntatie voor M vastleggen. Zoals in §6.15 mogen we ook aannemen dat er een partitie van de eenheid $1 = \sum_{j=1}^r f_j$ op M is zo dat f_j compacte drager heeft binnen M_j. Zoals in (6.23) definiëren we nu

$$\int_M g_i(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$$
$$:= \sum_{j=1}^r \int_{M_j} g_i(x)\, f_j(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

waarbij het rechterlid gedefinieerd wordt als in (6.34). We kunnen weer aantonen dat deze definitie onafhankelijk is van de keuze van de partititie van de eenheid en van de parametriseringen, zolang deze aanleiding geven tot dezelfde oriëntatie. Er volgt gemakkelijk dat ook formule (6.35) in dit geval geldig blijft.

6.24 Voorbeeld We bekijken een gesloten C^1-kromme in $\mathbb{R}^2$. Deze kunnen we beschrijven met een C^1-afbeelding $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ zo dat $\gamma(s) = \gamma(t)$ desda $t - s \in \mathbb{Z}$ en zo dat $\gamma'(t) \neq 0$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Zij $K := \gamma(\mathbb{R}) = \gamma([0,1))$. Zij $g_i: K \to \mathbb{R}$ continu $(i = 1, 2)$. Dan geldt volgens (6.34) dat

$$\int_K (g_1(x,y)\, dx + g_2(x,y)\, dy) = \int_0^1 (g_1(\gamma(t))\, \gamma_1'(t) + g_2(\gamma(t))\, \gamma_2'(t))\, dt. \tag{6.36}$$

In het bijzonder zien we dat

$$\int_K dx = \int_0^1 \gamma_1'(t)\, dt = \gamma_1(1) - \gamma_1(0) = 0,$$

en evenzo $\int_K dy = 0$. We zullen verderop een diepere achtergrond en generalisatie van deze nul-uitkomsten zien. De resultaten blijven doorgaan als de afbeelding γ continu is en stuksgewijs continu differentieerbaar, d.w.z., als de afgeleide bestaat en continu is op eindig veel sprongpunten na, waar nog wel de rechter en linker afgeleide bestaan.

6.25 Voorbeeld Bekijk S^2. Zij $g\colon S^2 \to \mathbb{R}$ continu. We gebruiken de parametriseringen voor het noordelijk en voor het zuidelijk halfrond zoals gegeven door 1. en 2, van Voorbeeld 6.22. Als g in een omgeving van de evenaar nul is, dan volgt er uit (6.34) dat

$$\begin{aligned}\int_{S^2} g(x,y,z)\,dx\wedge dy = &\int_{x^2+y^2<1} g(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})\,dx\,dy\\ &-\int_{x^2+y^2<1} g(x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2})\,dx\,dy.\end{aligned}\tag{6.37}$$

Immers, voor de parametrisering 1. is de Jacobiaan van de afbeelding $(x,y)\mapsto(x,y)$ gelijk aan 1 en voor de parametrisering 2. is de Jacobiaan van de afbeelding $(y,x)\mapsto(x,y)$ gelijk aan -1. Voor algemene continue functies g op S^2 zouden we ook de andere parametriseringen samen met een partitie van de eenheid kunnen gebruiken. Maar er kan ook een limiet-argument gebruikt worden om te beredeneren dat (6.37) dan ook blijft gelden. Er volgt in het bijzonder dat

$$\int_{S^2} dx\wedge dy = \int_{x^2+y^2<1} dx\,dy - \int_{x^2+y^2<1} dx\,dy = 0.$$

Ook deze uitkomst zal verderop in breder perspectief worden geplaatst.

6.4 De Stelling van Green

Eindelijk komt nu aan de orde waar het in dit hoofdstuk allemaal om begonnen is. Voor het gemak zullen we spreken van de Stelling van Green en de formule van Green, maar je komt ze in de literatuur ook onder andere namen tegen, zoals Gauss en Stokes. Strikt historisch gezien schijnt het een en ander terug te gaan tot Euler. We zullen de nu volgende stellingen niet in grote algemeenheid bewijzen. Voor een eenvoudig geval geven we het eenvoudige bewijs wel, en we duiden aan hoe een algemener geval verkregen kan worden door combinatie van eenvoudige gevallen. Voor het bewijs van het meest algemene geval komt echter nog heel wat kijken. Zie Duistermaat & Kolk [3] voor meer details.

6.26 (*het geval van dimensie 2*)
Zij $a<b$ en laten γ,δ twee C^1-functies op $[a,b]$ zijn zo dat $\gamma(y)<\delta(y)$ als $a<y<b$. Definieer

$$X := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a<y<b,\ \gamma(y)<x<\delta(y)\}.\tag{6.38}$$

Dan is de rand ∂X te parametriseren als een gesloten kromme die continu is en stuksgewijs continu differentieerbaar (cf. eind van Voorbeeld 6.24). Neem de oriëntatie zo dat de deze kromme *positief* (i.e., antikloksgewijs) wordt doorlopen. Zij $X\subset E$ met E open in $\mathbb{R}^2$ en zij f een C^1-functie op E. Dan zien we dat

$$\begin{aligned}\int_X (D_1f)(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b\left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)}(D_1f)(x,y)\,dx\right)dy\\ &= \int_a^b\big(f(\delta(y),y)-f(\gamma(y),y)\big)\,dy = \int_{\partial X} f(x,y)\,dy.\end{aligned}\tag{6.39}$$

In de eerste gelijkheid hebben we gebruikt dat D_1f een continue functie op een integreerbare compacte verzameling $\overline{X}$ is en hebben we Fubini toegepast. De tweede identiteit is een toepassing van de hoofdstelling van de integraalrekening (in één veranderlijke) en de derde gelijkheid past (6.36) toe, waarbij de randkromme ∂X is opgesplitst in vier stukken, elk met andere parametrisering maar alle compatibel met de oriëntatie:

- van $(\delta(a), a)$ naar $(\delta(b), b)$, parametrisering door $t \mapsto (\delta(t), t) \quad (a \le t \le b)$.
- van $(\delta(b), b)$ naar $(\gamma(b), b)$, parametrisering door $t \mapsto (-t, b) \quad (-\delta(b) \le t \le -\gamma(b))$.
- van $(\gamma(b), b)$ naar $(\gamma(a), a)$, parametrisering door $t \mapsto (\gamma(-t), -t) \quad (-b \le t \le -a)$.
- van $(\gamma(a), a)$ naar $(\delta(a), a)$, parametrisering door $t \mapsto (t, a) \quad (\gamma(a) \le t \le \delta(a))$.

Bovenstaande formule

$$\int_X (D_1 f)(x, y)\, dx\, dy = \int_{\partial X} f(x, y)\, dy \tag{6.40}$$

geldt algemener. Het is ook toegestaan dat γ en δ niet meer differentieerbaar zijn in de randpunten a en b, mits echter de resulterende randkromme wel een C^1-kromme is (zie bijvoorbeeld de eenheidsschijf met rand $x^2 + y^2 = 1$, dus $a = -1$, $b = 1$, $\gamma(y) = -\sqrt{1 - y^2}$, $\delta(y) = \sqrt{1 - y^2}$).

Verder zal het soms mogelijk zijn om een gegeven begrensde open deelverzameling X van $\mathbb{R}^2$ op te splitsen in deelstukken die alle van het type (6.38) zijn. Voor ieder van die deelstukken verkrijgen we een identiteit van de vorm (6.40) en we tellen deze identiteiten bij elkaar op. De integralen langs de randen in het rechterlid van (6.40) heffen elkaar dan ten dele op zo dat alleen een integraal over de rand ∂X, positief doorlopen, resulteert.

Een nog verdergaande uitbreiding van (6.40) is mogelijk als we gebieden met gaten bekijken. Neem bijv. het gebied $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 < x^2 + y^2 < R^2\}$ tussen twee concentrische cirkels. Dan kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned}\int_X (D_1 f)(x, y)\, dx\, dy &= \int_{x^2+y^2<R^2} (D_1 f)(x, y)\, dx\, dy - \int_{x^2+y^2<r^2} (D_1 f)(x, y)\, dx\, dy \\ &= \int_{x^2+y^2=R^2} f(x, y)\, dy - \int_{x^2+y^2=r^2} f(x, y)\, dy.\end{aligned}$$

Hier nemen we beide cirkels met positieve oriëntatie. Geven we echter aan de binnencirkel negatieve oriëntatie, dan blijkt (6.40) weer te gelden. De juiste regel voor de keuze van de oriëntatie blijkt te zijn dat voor een parametrisering ϕ moet gelden dat $\mathbf{J}_\phi(t)$ naar buiten wijst (cf. Opmerking 6.21). Met deze conventie kan formule (6.40) heel algemeen voor verzamelingen met gaten bewezen worden.

Bekijk nu de integraal van $D_2 f$ over een verzameling

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b,\ \gamma(x) < y < \delta(x)\}.$$

Analoog aan (6.39) krijgen we dan:

$$\begin{aligned}\int_X (D_2 f)(x, y)\, dx\, dy &= \int_a^b \left(\int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} (D_2 f)(x, y)\, dy \right) dx \\ &= \int_a^b \big(f(x, \delta(x)) - f(x, \gamma(x))\big)\, dx = -\int_{\partial X} f(x, y)\, dx.\end{aligned}$$

Dus

$$\int_X (D_2 f)(x, y)\, dx\, dy = -\int_{\partial X} f(x, y)\, dx. \tag{6.41}$$

Ook deze formule geldt algemener zoals geschetst in verband met (6.40).

Zowel formule (6.40) als formule (6.41) kunnen worden opgevat als twee-dimensionale analoga van de hoofdstelling van de integraalrekening

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) \tag{6.42}$$

voor een C^1-functie f op $[a,b]$. In (6.42) is het rechterlid een "integraal" over een nul-dimensionale rand bestaande uit twee punten, waarbij de "oriëntatie" van de rand zorgt vor het min-teken bij $f(a)$.

Een gevolg van (6.40) en (6.41) (voor f identiek gelijk aan 1) is dat

$$\int_{\partial X} dx = 0 = \int_{\partial X} dy.$$

Algemener kunnen we schrijven:

$$\int_{\partial X} \big(f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy\big) = \int_X \big((D_1 g)(x,y) - (D_2 f)(x,y)\big)\,dx\,dy,$$

Dus

$$\int_{\partial X} \big(f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy\big) = 0 \quad \text{als} \quad D_1 g = D_2 f.$$

In het bijzonder zal de conditie $D_1 g = D_2 f$ gelden als f en g de partiële afgeleiden $D_1 F$ en $D_2 F$ van een C^2-functie F zijn. Dus:

$$\int_{\partial X} \big((D_1 F)(x,y)\,dx + (D_2 F)(x,y)\,dy\big) = 0.$$

Tenslotte merken we op dat, gezien formule (6.35), formules (6.40) en (6.41) ook geschreven kunnen worden als

$$\int_X (D_j f)(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial X} f(x,y)\,(\mathbf{n}_{x,y})_j\,d\ell(x,y) \quad (j = 1,2). \tag{6.43}$$

Formules (6.40), (6.41) en (6.43) blijken fraai gegeneraliseerd te kunnen worden tot het n-dimensionale geval.

6.27 Stelling (*Stelling van Green*)
Laat $X \subset \mathbb{R}^n$ begrensd en open. Neem aan dat $M := \partial X$ de structuur heeft van een $(n-1)$-dimensionale subvariëteit van $\mathbb{R}^n$ met oriëntatie zo dat de normaal $\mathbf{n}_x$ voor alle $x \in M$ naar buiten wijst. Zij $j \in \{1, \ldots, n\}$. Zij $f\colon X \to \mathbb{R}$ een C^1-functie zo dat f en $D_j f$ een continue uitbreiding hebben tot $\overline{X}$. Dan geldt:

$$\int_X (D_j f)(x)\,dx = (-1)^{j-1} \int_M f(x)\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n \tag{6.44}$$

en

$$\int_X (D_j f)(x)\,dx = \int_M f(x)\,(\mathbf{n}_x)_j\,d\sigma(x). \tag{6.45}$$

Als direct gevolg van (6.35) zijn de rechterleden van (6.44) en (6.45) aan elkaar gelijk. Verder zal (6.45) voor algemene j volgen uit het speciale geval $j = 1$. Het is dus voldoende voor het bewijs van Stelling 6.27 om formule (6.44) in het geval $j = 1$ te bewijzen, dus:

$$\int_X (D_1 f)(x)\,dx = \int_M f(x)\,dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n. \tag{6.46}$$

Net als in §6.26 kan (6.46) weer betrekkelijk snel worden afgeleid voor eevoudige gebieden X, en kan het geval van meer gecompliceerde gebieden vaak verkregen worden door combinatie van resultaten voor meer eenvoudige gebieden. We nemen als voorbeeld een gebied van de vorm

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_2 < x_2 < b_2, \ldots, a_n < x_n < b_n,\ \gamma(x_2,\ldots,x_n) < x_1 < \delta(x_2,\ldots,x_n)\},$$

met γ en δ C^1-functies. (Voor $n := 3$ is dit een blok waarvan de twee zijvlakken die loodrecht op de x_1-richting staan, gedeformeerd zijn.) Dan zien we met behulp van Fubini dat

$$\begin{aligned}
\int_X (D_1 f)(x)\,dx &= \int_{x_2=a_2}^{b_2} \cdots \int_{x_n=a_n}^{b_n} \left(\int_{\gamma(x_2,\ldots,x_n)}^{\delta(x_2,\ldots,x_n)} (D_1 f)(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1 \right) dx_2 \ldots dx_n \\
&= \int_{x_2=a_2}^{b_2} \cdots \int_{x_n=a_n}^{b_n} f(\delta(x_2,\ldots,x_n), x_2,\ldots,x_n)\,dx_2 \ldots dx_n \\
&\quad - \int_{x_2=a_2}^{b_2} \cdots \int_{x_n=a_n}^{b_n} f(\gamma(x_2,\ldots,x_n), x_2,\ldots,x_n)\,dx_2 \ldots dx_n \\
&= \int_{\partial X} f(x)\,dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n.
\end{aligned}$$

Bij de laatste identiteit moet je nagaan dat het klopt met de oriëntaties op de zij-oppervlakken $x_1 = \delta(x_2,\ldots,x_n)$ en $x_1 = \gamma(x_2,\ldots,x_n)$ (de normaal moet naar buiten wijzen). De integralen over de andere zij-oppervlakken geven geen bijdragen aan de integraal over de rand omdat daar een van de coördinaten $x_2,\ldots,x_n$ constant is.

Opmerking De gegevens van Stelling 6.27 kunnen worden afgezwakt zo dat de rand M "stuksgewijs C^1 " is, d.w.z., een eindige vereniging van C^1-variëteiten die op continue wijze aan elkaar passen. We geven geen precieze definitie, maar voor de hand liggende gevallen zoals de rand van een blok of van het net behandelde vervormde blok passen in de definitie. Merk op dat in Stelling 6.27 aan de C^1-conditie voor f op de rand zondermeer voldaan zal zijn als f een C^1-uitbreiding heeft tot een open verzameling $E \supset \overline{X}$.

Gevolg Met gegevens als in Stelling 6.27 geldt er dat

$$\int_M dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n = 0.$$

6.28 Definitie Zij $E \subset \mathbb{R}^n$ open en zij $f\colon E \to \mathbb{R}^n$ een C^1-afbeelding. Dan is $\operatorname{div} f$ (divergentie van f) gedefinieerd als de functie op E gegeven door

$$\operatorname{div} f = \nabla . f := \sum_{i=1}^n D_i f_i.$$

De notatie $\nabla . f$ komt voort uit het idee om ∇ als een vector op te vatten waarvan de coördinaten ∇_i de operatoren D_i zijn voor partieel differentiëren. Dan staat $\nabla . f$ voor het "inwendig product" van de vectoren ∇ en f. Dit past mooi bij onze eerdere notatie voor de gradiënt van een C^1-functie $g \colon E \to \mathbb{R}$:

$$\operatorname{grad} g = \nabla g := (D_1 g, \ldots, D_n g).$$

Merk op dat, als $g \colon E \to \mathbb{R}^n$ een C^2-afbeelding is, dan

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} g) = \nabla.(\nabla g) = \sum_{i=1}^{n} D_i^2 g = \Delta g.$$

Achtereenvolgens uitoefenen van de gradiënt en de divergentie-operator geeft dus de Laplace-operator.

Een onmiddellijk gevolg van Stelling 6.27 is nu:

6.29 Stelling (*Stelling van Gauss*)
Laat $X \subset \mathbb{R}^n$ begrensd en open. Neem aan dat $M := \partial X$ de structuur heeft van een $(n-1)$-dimensionale subvariëteit van $\mathbb{R}^n$ met oriëntatie zo dat de normaal $\mathbf{n}_x$ voor alle $x \in M$ naar buiten wijst. Zij $f \colon X \to \mathbb{R}^n$ een C^1-afbeelding zo dat voor alle i de functies f_i en $D_i f_i$ een continue uitbreiding hebben tot $\overline{X}$. Dan geldt:

$$\int_X (\operatorname{div} f)(x)\, dx = \int_M \langle f(x), \mathbf{n}_x \rangle \, d\sigma(x). \tag{6.47}$$

Voor $n = 3$ heeft deze stelling een fraaie interpretatie in de leer van de vloeistofstromingen. Zij $v(x)$ de snelheidsvector van de vloeistof ter plaatse x en zij $\rho(x)$ de massadichtheid van de vloeistof ter plaatse x. Zij $f(x) := \rho(x)\, v(x)$. Dan geeft het rechterlid van (6.47) de netto massa vloeistof die per seconde uitstroomt uit X via de rand M. Als $(\operatorname{div}(\rho\, v))(x) = 0$ voor alle $x \in X$ dan zal de netto uitstroming per seconde uit X vanwege (6.47) gelijk aan nul zijn.

Verdere vraagstukken

V6.1 Zij K de kromme in $\mathbb{R}^2$ die in poolcoördinaten gegeven wordt door $r = 1 + \sin\theta$ $(0 \le \theta \le \pi)$. Bereken de integralen van de functies $(x, y) \mapsto x$ en $(x, y) \mapsto y$ over deze kromme, dus:

$$\int_K x \, d\ell(x, y) \quad \text{en} \quad \int_K y \, d\ell(x, y).$$

V6.2 Bereken de oppervlakte van het volgende deel M van een paraboloïde:

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - y^2 - z^2 = x \ge 0\}.$$

V6.3 Bereken de oppervlakte van het volgende deel M van de sfeer S^2:

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 2x\}.$$

V6.4 Bereken de volgende integraal over de sfeer S^2:

$$\int_{S^2} (x_1^2 + 2x_2 + 3x_3^2)\, d\sigma(x).$$

V6.5 Laat $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 - z^2 = 1,\ x > 0\}$, een 2-dimensionale subvariëteit van $\mathbb{R}^3$. Zij $f(x, y, z) := (1 + 2y^2 + 2z^2)^{-\frac{1}{2}}$ als $y^2 + z^2 \le 1$ en overigens $f(x, y, z) := 0$. Bereken

$$\int_M f(x, y, z)\, d\sigma(x, y, z).$$

V6.6 Zij X de rechthoekige verzameling in $\mathbb{R}^2$ met hoekpunten $(1,2)$, $(5,2)$, $(5,4)$ en $(1,4)$. Zij M de rand van X met positieve oriëntatie. Bereken

$$\int_M \big((e^{-x^2} + y)\, dx + (x^2 + \arctan(y^{2/3}))\, dy\big).$$

V6.7 Laat $X \subset \mathbb{R}^2$ begrensd en open. Neem aan dat $M := \partial X$ de structuur heeft van een 1-dimensionale subvariëteit van $\mathbb{R}^2$ met oriëntatie zo dat de normaal overal op M naar buiten wijst.

a) Bewijs dat het 2-dimensionale volume $\mathrm{opp}(X)$ van X voldoet aan

$$\mathrm{opp}(X) = \int_M x\, dy = -\int_M y\, dx,$$

waarbij $x\, dy$ en $y\, dx$ differentiaalvormen op M zijn genoteerd in termen van Cartesische coördinaten x, y voor $\mathbb{R}^2$.

b) Zij X de begrensde verzameling in $\mathbb{R}^2$ omsloten door de kromme M die in poolcoördinaten wordt gegeven door $r = 2 + \cos\theta$. Bereken de oppervlakte van X.

V6.8 Laat $a, b, c > 0$ en $X := \{(x, y, z) \mid ax^2 + by^2 + cz^2 < 1\}$. Zij $M := \partial X$ (een ellipsoïde) met naar buiten gerichte normaal overal op M.

a) Bepaal de normaal in elk punt van M.

b) Bereken

$$\int_M (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)^{\frac{1}{2}}\, d\sigma(x, y, z)$$

door toepassing van Stelling 6.29 op de afbeelding $f\colon (x, y, z) \mapsto (ax, by, cz)$.

c) Bereken

$$\int_M (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\sigma(x, y, z)$$

door toepassing van Stelling 6.29 op de afbeelding $f\colon (x, y, z) \mapsto (x, y, z)$.

V6.9 Zij $R > 0$ en $a \in \mathbb{R}^3$ zo dat $|a| \neq R$. Zij $X := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x - a| < R\}$. Zij $M := \partial X$ en zij $\mathbf{n}_x$ $(x \in M)$ de naar buiten gerichte normaal. Zij $f\colon x \mapsto |x|^{-3}\, x\colon M \to \mathbb{R}^3$. Zij

$$I := \int_M \langle f(x), \mathbf{n}_x \rangle\, d\sigma(x).$$

a) Bewijs dat $I = 0$ als $R < |a|$.

b) Bewijs dat $I = 4\pi$ als $a = 0$.

c) Bewijs zonder veel rekenwerk uit b) dat $I = 4\pi$ als $|a| < R$.

V6.10 Zij $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ en $S^{n-1} = \partial B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$. Bewijs dat $\mathrm{opp}(S^{n-1}) = n\,\mathrm{vol}(B_n)$.

Aanwijzing Pas Stelling 6.29 toe met $f(x) := x$.

V6.11 Bewijs met volledige inductie naar n dat er positieve constanten c_n bestaan zo dat voor elke continue functie f op $[0, R]$ geldt dat

$$\int\limits_{x_1^2+\cdots+x_n^2 \le R^2} f(|x|)\,dx = c_n \int_0^R f(r)\,r^{n-1}\,dr. \tag{6.48}$$

Bewijs vervolgens dat $c_n = \mathrm{opp}(S^{n-1})$.
Aanwijzing voor eerste deel Herschrijf het linkerlid van (6.48) met behulp van Fubini als

$$\int_{x_n=-R}^{R} \Bigg(\int\limits_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2 \le R^2 - x_n^2} f\big(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2+x_n^2}\big)\,dx_1 \dots dx_{n-1} \Bigg) dx_n.$$

V6.12 Bewijs dat

$$\mathrm{opp}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac12 n}}{\Gamma(n/2)} = \begin{cases} \dfrac{2\pi^m}{(m-1)!} & \text{als } n = 2m, \\ \dfrac{2\pi^m}{(1/2)_m} & \text{als } n = 2m+1. \end{cases} \tag{6.49}$$

Aanwijzing Begin met

$$\int\limits_{[-R/\sqrt{n},R/\sqrt{n}]^n} e^{-|x|^2}\,dx < \int\limits_{|x|\le R} e^{-|x|^2}\,dx < \int\limits_{[-R,R]^n} e^{-|x|^2}\,dx,$$

pas Fubini en formule (5.25) op het linker- en rechterlid toe en pas Vraagstuk V6.11 toe op het middelste lid. Laat dan $R \to \infty$.
Controleer het resultaat door (6.49) nogmaals af te leiden met behulp van Vraagstuk V6.10 en formule (4.30).

V6.13 Laat $X \subset \mathbb{R}^n$ begrensd en open. Neem aan dat $M := \partial X$ de structuur heeft van een $(n-1)$-dimensionale subvariëteit van $\mathbb{R}^n$ met oriëntatie zo dat de normaal $\mathbf{n}_x$ voor alle $x \in M$ naar buiten wijst. Zij $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een C^2-functie.

a) Bewijs dat

$$f\,\Delta g - g\,\Delta f = \mathrm{div}\big(f\,\nabla g - g\,\nabla f\big).$$

b) Bewijs dat

$$\int_X \big(f(x)\,(\Delta g)(x) - g(x)\,(\Delta f)(x)\big)\,dx = \int_M \langle \mathbf{n}_x, f(x)\,(\nabla g)(x) - g(x)\,(\nabla f)(x)\rangle\,d\sigma(x).$$

c) Neem bovendien aan dat $X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$, dus $M = S^{n-1}$. Neem ook aan dat f een homogeen polynoom van graad m is en g een homogeen polynoom van graad m', en dat f en g harmonisch zijn (dus $\Delta f = 0 = \Delta g$). Bewijs dat, voor $m \ne m'$,

$$\int_{S^{n-1}} f(x)\,g(x)\,d\sigma(x) = 0.$$

Opmerking Een functie op S^{n-1} die verkregen is door restrictie tot S^{n-1} van een homogeen harmonisch polynoom van graad m, wordt een *sferische harmonische* van graad m genoemd. Het laatste resultaat toont dus aan dat sferische harmonischen van verschillende graad orthogonaal zijn t.o.v. het inwendig product op de ruimte van continue functies op S^{n-1} gedefinieerd door

$$\langle f, g\rangle := \int_{S^{n-1}} f(x)\,g(x)\,d\sigma(x).$$

Index