FNWI, UvA, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam

Tentamen **Integratietheorie**, 29 maart 2007, 13.30–16.30 uur

Lebesgue-maat wordt aangeduid met λ.
In som 1b) mag je zonder bewijs gebruiken dat $c\int_{\mathbb{R}} f(cx)\,d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\lambda(x)$ als f integreerbaar is op $\mathbb{R}$ en $c > 0$.
In som 3b), 3c) mag je zonder bewijs gebruiken dat $\int_I f(x+h)\,d\lambda(x) = \int_{I+h} f(x)\,d\lambda(x)$ als f integreerbaar is op $\mathbb{R}$, I een interval is, en $h \in \mathbb{R}$.

Alle sommen tellen even zwaar.

1. Zij f een Lebesgue-integreerbare functie op $\mathbb{R}$ en zij g een continue en begrensde functie op $\mathbb{R}$. Definieer

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(x-y)\, d\lambda(y) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

a) Bewijs dat de functie $f * g$ continu is op $\mathbb{R}$.

b) Laat $f_\varepsilon(y) := \varepsilon^{-1} f(\varepsilon^{-1} y) \quad (y \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0)$. Als bovendien gegeven is dat $\int_{\mathbb{R}} f\,d\lambda = 1$, bewijs dan dat

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (f_\varepsilon * g)(x) = g(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2a) Als $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ en $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-eindige maatruimtes zijn en f een meetbare functie is op $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, formuleer dan onder welke voorwaarden je op grond van de (tweede) stelling van Fubini mag concluderen dat

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2).$$

b) Bewijs dat

$$\int_{[0,\infty)} \frac{\sin x}{x} \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} - e^{-x} \right) d\lambda(x) = \tfrac{1}{2} \log 2.$$

Aanwijzing Substitueer $\displaystyle \frac{1}{x} \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} - e^{-x} \right) = \int_{[0,1]} y\, e^{-xy}\, d\lambda(y).$

3. Zij f een Lebesgue-integreerbare functie op $\mathbb{R}$.

a) Veronderstel eerst dat f continu is. Laat zien dat op elk gesloten begrensd interval $[a,b]$ geldt:

$$\lim_{h \to 0} \int_{[a,b]} |f(x+h) - f(x)|\, d\lambda(x) = 0. \qquad (*)$$

b) Bewijs $(*)$ zonder de aanname dat f continu is. Hierbij mag je gebruiken dat $C([a-1, b+1])$ dicht ligt in $L^1([a-1, b+1])$.

c) Bewijs dat

$$\lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+h) - f(x)|\, d\lambda(x) = 0.$$

z.o.z

4a) Laten ρ en μ maten zijn op een meetbare ruimte $(X, \mathcal{A})$. Geef de definities van de begrippen "μ is absoluut continu t.o.v. ρ" en "μ is singulier t.o.v. ρ".

b) Zij μ een Borel-maat op $[-1, 1)$ zo dat

$$\mu([-1, x]) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0; \\ 2^{-n} + x^{\frac{1}{2}}, & 2^{-n-1} \leq x < 2^{-n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Vind Borel-maten μ_1 en μ_2 op $[-1, 1)$ zo dat μ_1 absoluut continu is t.o.v. λ, μ_2 singulier is t.o.v. λ, en $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

Succes!