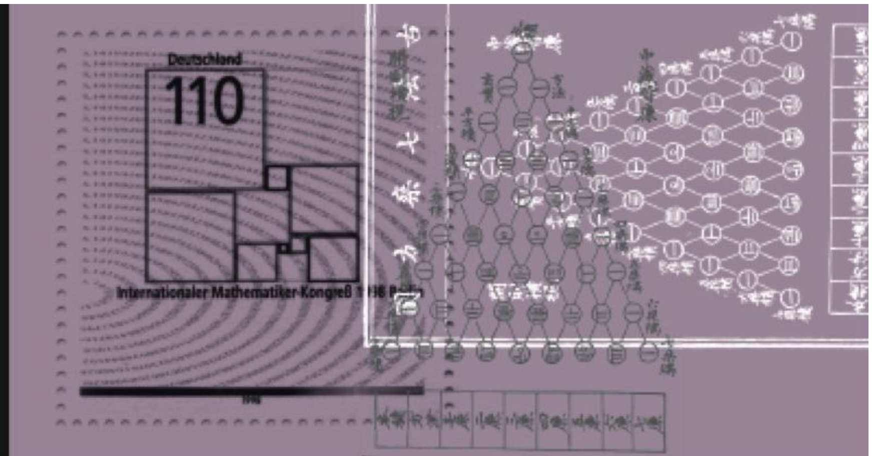


Afscheidscollege

Prof. dr. Tom Koornwinder

Vrijdag 12 december 2008

Universiteit van Amsterdam

De speciale functie van de wiskunde

Tom Koornwinder

Afscheidscollege, Universiteit van Amsterdam, 12 december 2008;
laatst gewijzigd 29 december 2010

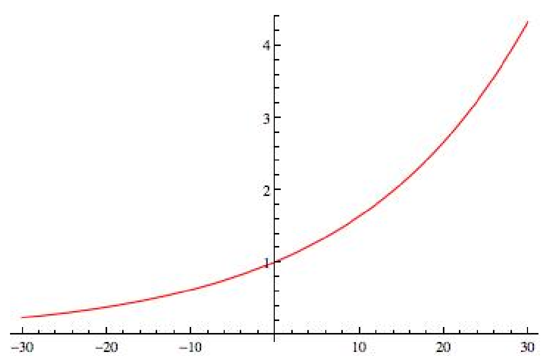
Dames en Heren,

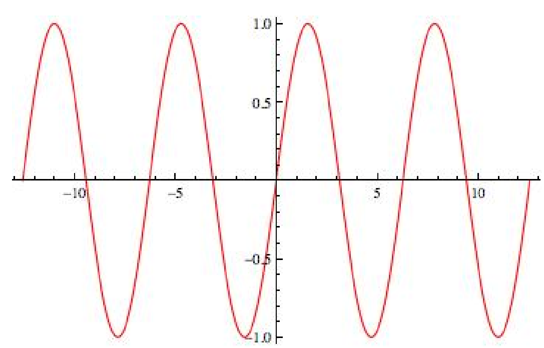
Het is een algemeen erkend feit dat wiskunde een speciale functie in de maatschappij heeft. Wiskunde is bijvoorbeeld wereldwijd een inspiratiebron voor postzegelontwerpers[1]. Binnen Nederland zullen scholieren, om voor hun eindexamen te slagen, over een paar jaar bij het centraal schriftelijk minstens een 5 voor Nederlands, Engels en wiskunde moeten halen, en minstens twee van die drie cijfers moeten voldoende zijn[2]. Tweede Kamerlid Alexander Pechtold zou nog liever minstens een 6 voor wiskunde zien. "Je hebt een probleem voor het leven als je met de kerncompetenties Nederlands, Engels en wiskunde niet uit de voeten kan"[3], zo zegt hij.

Het is misschien niet zo algemeen bekend dat speciale functies ook een technisch wiskundige betekenis hebben en dat zij als zodanig een niet verwaarloosbaar deelgebied van de wiskunde vormen[4]. Traditioneel valt dit deelgebied onder het wiskundige hoofdgebied Analyse. Mijn leeropdracht was Analyse, en mijn specialisme zijn die speciale functies. Maar speciale functies zijn heel breed. Ze worden ook bekeken vanuit de algebra en meetkunde, vanuit de discrete wiskunde en kansrekening, en vanuit de mathematische fysica. Ze kunnen heel zuiver wiskundig bestudeerd worden, maar ze hebben ook een sterk toegepaste component.

Functies

Over het wiskundige begrip *functie* en de historische ontwikkeling daarvan heb ik u uitgebreid verteld bij mijn oratie[5] in 1993. Laat ik het even met u ophalen. Hier zijn twee grafieken[6] die allebei een heel speciale functie voorstellen.





Beide plaatjes zullen u bekend voorkomen. Het linker beschrijft de ontwikkeling van uw spaarsaldo in de loop van de tijd, als u verder niets inlegt of opneemt, als de rente constant blijft en als de bank niet omvalt. Het rechter plaatje is een golflijn. De lucht in deze kerk zit bijvoorbeeld vol met zulke golflijnen waardoor mijn stemgeluid naar uw oren wordt overgebracht, en iets soortgelijks geldt voor de lichtgolven waardoor u mij kunt zien. De eerste grafiek stelt de exponentiële functie voor:

$$x \mapsto c^x,$$

waarbij c een constante groter dan 1 is, bijvoorbeeld $c = 1,05$ (bij 5% jaarrente) of c is het getal e van Euler[7]. De tweede grafiek stelt de sinus voor:

$$x \mapsto \sin x.$$

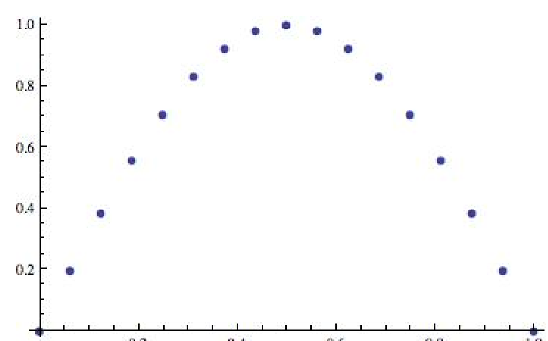
Zij heten functies in de wiskundige zin van het woord omdat er een voorschrift is om bij iedere x-waarde een functiewaarde te vinden. Veel preciezer dan uit het plaatje kan zo'n functiewaarde uit een formule berekend worden, die inderdaad voor beide voorbeelden gegeven kan worden[8]:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

Ik zou u nog een groot aantal verdere formules en eigenschappen voor deze twee functies kunnen geven[9]. Zij heten speciale functies omdat ze inderdaad heel speciaal zijn, maar ook omdat er zo veel over bekend is, en omdat ze in zoveel contexten binnen en buiten de wiskunde voorkomen, en omdat ze heel nuttig zijn in toepassingen. Binnen de speciale functies behoren ze tot de elementaire speciale functies. De niet-wiskundigen onder u zullen het waarschijnlijk met dit elementaire niet eens zijn.

Orthogonaliteit

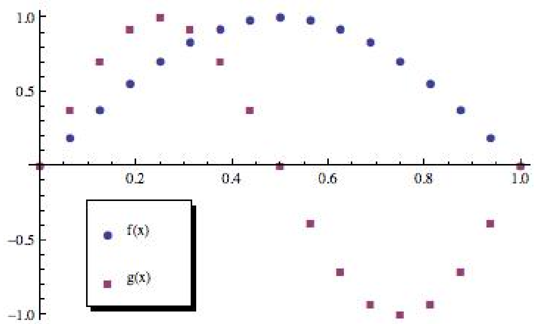
Ik ga u nu laten zien dat twee functies een hoek van 90 graden met elkaar kunnen maken. Hier ziet u een stukje sinus-functie.



Maar ik heb hem gesampled (ofwel bemonsterd): ik heb de functie maar voor een beperkt aantal x-waarden (hier 17) geplot. De 17 functiewaarden behorend bij die 17 x-waarden zijn getallen.

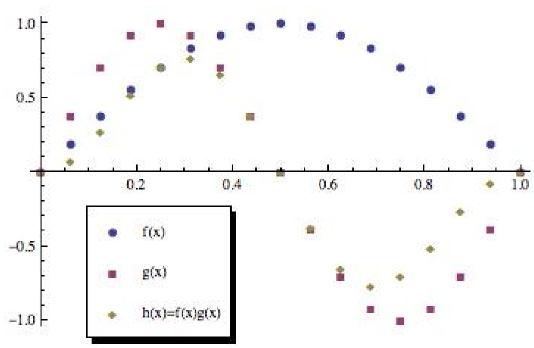
We kunnen ze opvatten als de coördinaten van een punt in de 17-dimensionale ruimte. Zeventien dimensies, dat is indrukwekkend. Het was in 1884 dat de Engelsman Abbott het bekende boekje *Flatland* [10] publiceerde. Daarin probeert een wezen levend in een twee-dimensionale wereld zich een voorstelling te maken van de derde dimensie. Het boekje beoogt ons drie-dimensionale wezens zo, naar analogie, inzicht te geven in de vierde dimensie. Overigens is *Flatland*, naast een geslaagd populariserend boek, ook een bijtende satire op de positie van de vrouw in het Victoriaanse Engeland.

Maar met de plotmethode kunnen we ruimtes van elke dimensie visualiseren. Elk punt van de 17-dimensionale ruimte komt bijvoorbeeld overeen met een plot met 17 punten. Hier ziet u twee punten uit deze 17-dimensionale ruimte.



Het zijn twee stukjes gesamplede sinus, maar de tweede oscilleert twee keer zo hard als de eerste.

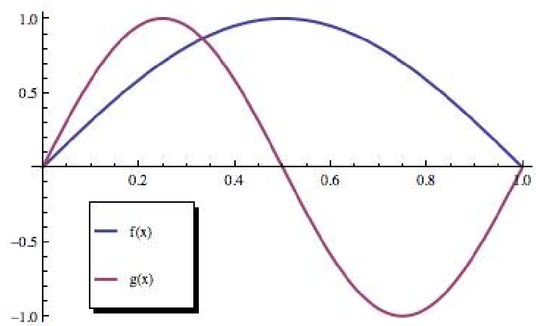
Nu beweer ik dat deze twee functies loodrecht op elkaar staan. Beschouw de twee functies als rijtjes van 17 coördinaten. Vermenigvuldig elke coördinaat van de eerste functie met de overeenkomstige coördinaat van de tweede functie. De zo verkregen 17 getallen leveren een nieuwe functie, die hier als derde plot is bijgetekend.



Tel nu die 17 getallen bij elkaar op. Als er nul uitkomt, dan zeggen we dat onze twee oorspronkelijke functies loodrecht op elkaar staan. En in ons voorbeeld komt er inderdaad nul uit. In meer wiskundige termen: twee vectoren staan loodrecht op elkaar als hun *inproduct* gelijk aan nul is. In 2 of 3 dimensies kunt u zich gemakkelijk van deze karakterisering van loodrechtheid overtuigen, maar het werkt in elke dimensie[11]. Dit idee is afkomstig van de negentiende-eeuwse

Duitse wiskundige Grassmann[12] (1809–1877). Maar de Ierse mathematisch fysicus Hamilton (1805–1865) zat er ook dichtbij[13]. In plaats van loodrecht spreken we ook van *orthogonaal*.

We kunnen ons nu indenken dat onze twee sinusfuncties steeds fijner gesampled worden. Dan komen ze in een ruimte van steeds hogere dimensie te liggen. Uiteindelijk, in de limiet, zijn het continu getekende functies geworden, en hebben ze oneindig veel coördinaten: voor alle x-waarden tussen 0 en 1 de functiewaarde.

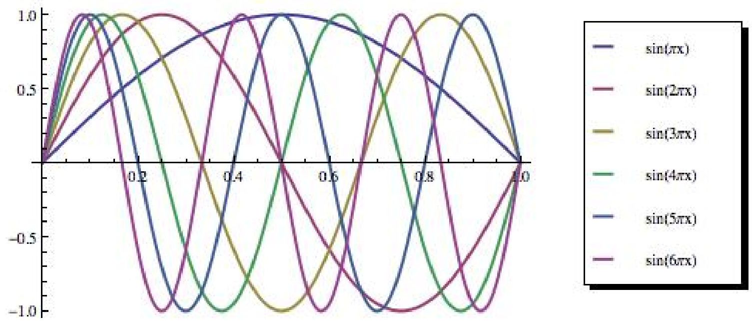


Ook in deze oneindig-dimensionale ruimte kunnen we de methode van Grassmann gebruiken om na te gaan of deze twee functies $f(x)$ en $g(x)$ loodrecht op elkaar staan. Voor elke waarde van x vermenigvuldigen we de twee functiewaarden met elkaar en dan berekenen we de integraal van de zo verkregen productfunctie, dat is een soort continue som. Als er nul komt uit die integraal dan zeggen we dat de twee functies orthogonaal zijn:

$$f \perp g \quad \Longleftrightarrow \quad \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx = 0$$

Deze voorwaarde zegt in alledaagse taal dat de productfunctie gemiddelde 0 moet hebben. Hieruit zien we direct een noodzakelijke eis voor orthogonaliteit: $f(x)$ en $g(x)$ mogen niet overal hetzelfde teken hebben, want als dat wel zo zou zijn dan zou de productfunctie overal positief zijn en zou die dus geen gemiddelde 0 kunnen hebben. Dit betekent dat, willen f en g loodrecht op elkaar staan, minstens een van de twee functies ergens van teken moet wisselen, en ook dat f en g niet op precies dezelfde punten van teken mogen wisselen. Dit suggereert dat als we een aantal functies hebben die onderling loodrecht zijn, deze zullen oscilleren maar niet allemaal even vaak.

Zo kunnen we bijvoorbeeld een oneindige rij sinus-functies bekijken, waarbij de n-de functie n keer zoveel oscilleert als de eerste functie. Hier ziet u de eerste zes.



Elk tweetal van deze functies is orthogonaal. In dit verband is het ook mooi om op te merken dat deze sinussen de elementaire trillingen vormen van een gespannen snaar met vaste eindpunten. Of beter gezegd, ze geven momentopnamen van zulke trillingen[14]. De eerste sinus geeft de grondtoon, de tweede sinus de eerste boventoon (het octaaf), de derde sinus de tweede boventoon (een octaaf en een quint), enzovoorts. Een eerste begin van deze klankleer wordt meestal in verband gebracht met Pythagoras[15] (ca. 569 v.Chr. – ca. 475 v.Chr.). Gecompliceerdere trillingen van de snaar (rijkere klanken), kunnen in deze elementaire trillingen ontbonden worden. Wiskundig heet dit proces *Fourier-analyse*[16] naar zijn grondlegger, de Franse wiskundige Fourier[17] (1768–1830). Sindsdien is deze wiskundige techniek uiterst vruchtbaar in zuivere en toegepaste wiskunde. Vooral door de opkomst van de computer en de daarmee gepaard gaande digitalisering is er veel aandacht gekomen voor de discrete Fourier-analyse, waarbij met de gesamplede sinussen gewerkt wordt. Deze techniek is bijvoorbeeld verwerkt in het mp3-geluidsformaat[18] en jpg-beeldformaat[19].

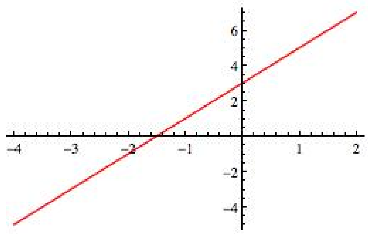
Deze file-formaten zijn fraaie combinaties van elegante wiskunde en software engineering. Hun enorme maatschappelijke impact behoeft geen nader betoog.

U kon uit het voorgaande proeven dat er een nauw verband is tussen wiskunde en muziek. Juist tegenwoordig wordt daar weer veel diepgravend onderzoek naar gedaan[20]. Voor mij is muziek ook erg belangrijk. Ongetwijfeld zal mijn muziekbeleving iets met mijn wiskundige habitus te maken hebben. Maar ik vermijd om al te analytisch met de muziek om te gaan, om alle andere aspecten van de muziek niet dood te slaan. Ik waardeer het zeer dat de dirigent

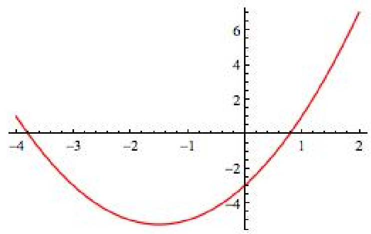
Paul de Boer van mijn Hilversumse kamerkoor Pur Sang[21] bereid was om voorafgaand aan dit afscheidscollege het orgel te bespelen.

Orthogonale polynomen

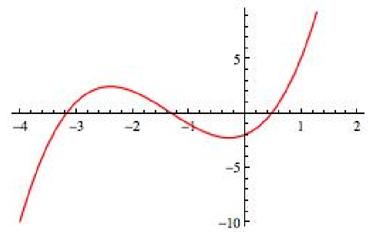
Nu ga ik u vertellen over orthogonale polynomen. Hier ziet u een paar voorbeelden van polynomen:



$2x + 3$



$x^2 + 3x - 3$



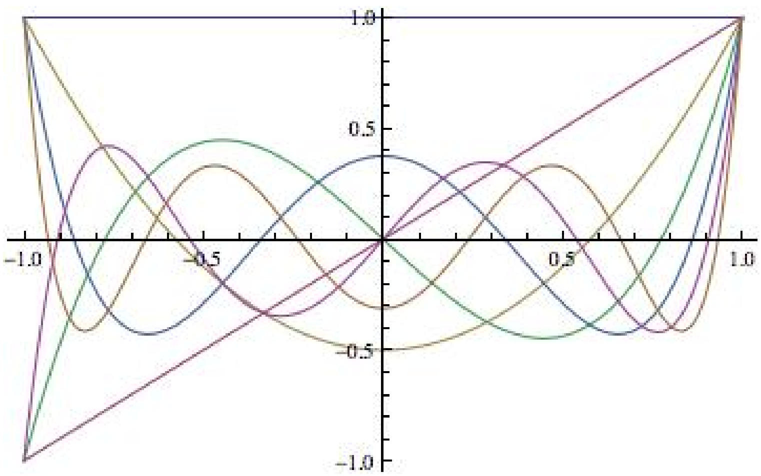
$x^3 + 4x^2 + 2x - 2$

De hoogst voorkomende macht van x noemen we de *graad* van het polynoom. De grafiek van een polynoom van graad 1 is altijd een rechte, en van een polynoom van graad 2 altijd een parabool. Vanaf graad 3 wordt het gecompliceerder. Een polynoom van graad n heeft hoogstens n nulpunten.

Nu bekijken we een rij polynomen die we nummeren vanaf 0. Het nulde polynoom is constant, het eerste polynoom heeft graad 1, het tweede heeft graad 2, enzovoorts. We eisen ook dat elk tweetal polynomen orthogonaal is. Hier mag orthogonaal wat algemener zijn dan zoëven: de integraal mag over een ander interval lopen dan van 0 tot 1, zeg van a tot b, en in de integraal mag ook nog een positieve gewichtsfunctie als factor geplaatst worden, laten we die $w(x)$ noemen:

$$f \perp g \quad \Longleftrightarrow \quad \int_a^b f(x)\, g(x)\, w(x)\, dx = 0.$$

In het algemeen heeft men zo een stelsel *orthogonale polynomen*[22]. Een voorbeeld met $a = -1$, $b = 1$ en $w(x)$ identiek gelijk aan 1, zijn de *Legendre-polynomen*[23] $P_n(x)$, die u in de grafiek ziet tot/met het Legendre-polynoom $P_6(x)$ van graad 6.

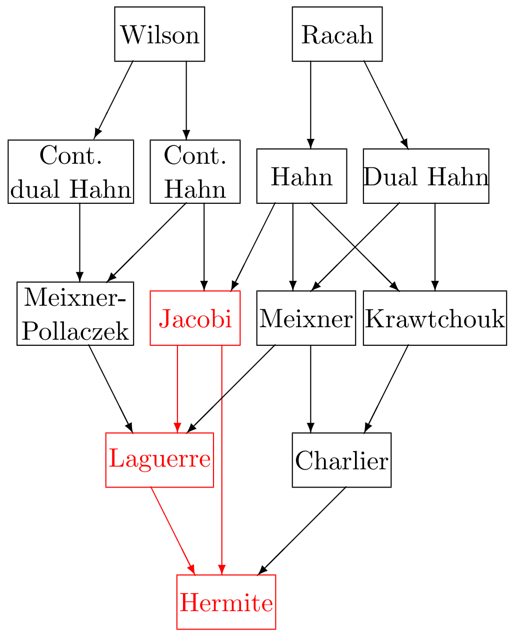


We zien iets opmerkelijks. Het polynoom $P_n(x)$ heeft precies n nulpunten die allemaal tussen -1 en 1 liggen. Ook ligt er tussen elke twee opeenvolgende nulpunten van $P_n(x)$ precies 1 nulpunt van $P_{n-1}(x)$. Dit kan algemeen voor orthogonale polynomen bewezen worden[24]. Hier zijn twee belangrijke formules voor Legendre-polynomen[25].

$$\frac{n+1}{2n+1}\,P_{n+1}(x)+\frac{n}{2n+1}\,P_{n-1}(x)=x\,P_n(x),$$
$$(1-x^2)\,P_n''(x)-2x\,P_n'(x)=-n(n+1)\,P_n(x).$$

De eerste is een *recurrentieformule*, en net zo'n formule geldt voor alle orthogonale polynomen[26]. Als we $P_{n-1}(x)$ en $P_n(x)$ kennen, dan kunnen we daaruit $P_{n+1}(x)$ berekenen, en zo kunnen we uit de eenvoudige startwaarden $P_0(x)$ en $P_1(x)$ successievelijk $P_n(x)$ berekenen voor alle n. De tweede formule is een *differentiaalvergelijking* voor de Legendre-polynomen. Zo'n type vergelijking is voor orthogonale polynomen tamelijk zeldzaam[27]. De twee vergelijkingen samen zijn een voorbeeld van *bispectraliteit*[28]. In de eerste vergelijking werkt een differentieoperator op de n-variable van $P_n(x)$ en levert eigenwaarde x. In de tweede vergelijking werkt een differentiaaloperator op de x-variable van $P_n(x)$ en levert eigenwaarde $-n(n+1)$ afhangend van n.

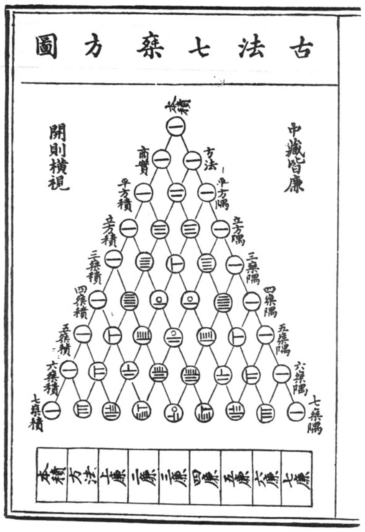
Alle families van orthogonale polynomen die een bepaald type van bispectraliteit vertonen zijn verenigd in het zogenaamde *Askey-tableau*[29].

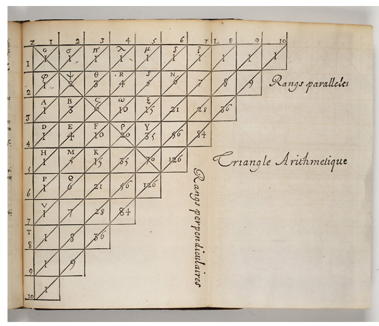


In elk hok staat een familie van orthogonale polynomen. De twee families bovenaan hangen van 4 parameters af. De pijlen geven limietovergangen. Dit zijn degeneraties waarbij parameterverlies optreedt. De polynomen van Jacobi, Laguerre en Hermite waren al in de 19e eeuw bekend. Zij heten de *klassieke orthogonale polynomen*[30]. De polynomen links boven werden 30 jaar geleden gevonden door Jim Wilson[31], een student van Dick Askey die de geestelijke vader van dit tableau is. Voor elke familie bestaat een omvangrijke collectie formules. De belangrijkste van deze formules zijn in een veel geciteerd compendium samengebracht door de Nederlanders Roelof Koekoek en René Swarttouw[32]. De polynomen uit het Askey-tableau duiken op veel plaatsen in de wis- en natuurkunde op. Met name zijn zij allemaal in verband te brengen met de symmetrieën van een bol en van een hyperboloïde, in meer technische termen met representaties van de groepen $SO(3)$, $SU(2)$ en $SL(2)$[33].

Hypergeometrische functies.

Wie mijn uitnodigingskaart heeft gezien, zal dit linker plaatje herkennen.





Dit is een voorloper van de Driehoek van Pascal afkomstig uit China, gepubliceerd door Chu Shi-Chieh in 1303 en teruggaand op eerder Chinees werk[34] omstreeks 1100. Daarnaast staat de Driehoek zoals gepubliceerd door Pascal[35] in 1665. In India kwam de Driehoek reeds in de tiende eeuw voor bij Halayudha[36], terwijl de getallen uit de Driehoek nog veel eerder in India verkregen werden door Pingala[37] (ca. 200 v. Chr.) door het tellen van mogelijke kort-lang patronen in poëzieregels. In de Islamitische wereld wordt de Driehoek toegeschreven aan Al-Karaji[38] (kort na 1000). Perzische geschriften borduurden hierop voort, en zo kwam de driehoek waarschijnlijk naar West-Europa, het eerst in een boek van Petrus Apianus[39] in 1527.

Hieronder staan links de bovenste zes rijen van de driehoek in onze gebruikelijke schrijfwijze. De getallen in deze driehoek worden ook als *binomiaalcoëfficiënten* geschreven, zie hieronder rechts.

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccccc} &&&&&\binom{0}{0}&&&&& \\ &&&&\binom{1}{0}&&\binom{1}{1}&&&& \\ &&&\binom{2}{0}&&\binom{2}{1}&&\binom{2}{2}&&& \\ &&\binom{3}{0}&&\binom{3}{1}&&\binom{3}{2}&&\binom{3}{3}&& \\ &\binom{4}{0}&&\binom{4}{1}&&\binom{4}{2}&&\binom{4}{3}&&\binom{4}{4}& \\ \binom{5}{0}&&\binom{5}{1}&&\binom{5}{2}&&\binom{5}{3}&&\binom{5}{4}&&\binom{5}{5} \end{array}$$

In de driehoek is ieder getal de som van de twee getallen links en rechts er boven (in India reeds sinds Pingala bekend als *Meru Prastara*):

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Er blijkt te gelden dat

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{waarbij} \quad n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$

Dus bijv.

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120$$

en

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{120}{2 \times 6} = 10.$$

De binomiaalcoëfficiënten komen voor in de *binomiaalformule*

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \quad (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3, \ldots,$$
$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + y^n.$$

Ze spelen een belangrijke rol in de *combinatoriek*, dit is de wiskunde van het slimme tellen. Bijvoorbeeld $\binom{5}{2} = 10$ is het aantal keuzen van 2 koekjes uit een schaal met 5 verschillende koekjes. Of $\binom{12}{4} = 495$ is het aantal metrische patronen voor versregels met 4 lange en 8 korte lettergrepen (een interpretatie die, zoals genoemd, teruggaat op Pingala). In het algemeen is $\binom{n}{k}$ het aantal deelverzamelingen van k elementen in een verzameling van n elementen.

In de loop van de eeuwen zijn talloze identiteiten met binomiaalcoëfficiënten gevonden. Een van de oudste kunnen we vinden bij de eerder genoemde Chinese wiskundige Chu Shi-Chieh[40] in 1303:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}.$$

Deze identiteit werd veel later, in 1772, herontdekt door de Franse wiskundige Vandermonde[41].

In de achttiende en negentiende eeuw werden de *hypergeometrische functies* ingevoerd[42]. Deze functies hangen ook van een aantal parameters af. Daardoor zijn ze zo rijk dat veel bekende speciale functies in termen van hypergeometrische functies kunnen worden herschreven. Alle orthogonale polynomen uit het Askey-tableau zijn bijvoorbeeld hypergeometrische functies.

Ook de wildgroei aan identiteiten met binomiaalcoëfficiënten kon beteugeld worden door ze te herschrijven als een beperkt aantal identiteiten voor hypergeometrische functies[43]. Dit is bijvoorbeeld ook gedaan met de identiteit van Chu en Vandermonde. De hypergeometrische identiteiten kunnen ook weer in een soort tableau geschreven worden, waarbij de meest gecompliceerde weer bovenaan staan en de pijlen degenererende limieten uitdrukken[44]. De identiteit van Chu en Vandermonde staat dan vrijwel onderaan.

q en elliptisch

Het Askey-tableau en het tableau van hypergeometrische identiteiten blijken op twee manieren als het ware opgetild te kunnen worden en op een hoger niveau te kunnen worden gebracht. De eerste manier loopt via de q-analoga. Hier is q een getal, vaak tussen 0 en 1, dat een deformatie bepaalt. Voor $q = 1$ is alles normaal, voor andere waarden van q zijn we in een q-gedeformeerde wereld. Bijvoorbeeld:

naam	$q = 1$	q-analogon
(q-)getal	a	$[a]_q = \dfrac{1-q^a}{1-q}$
(q-)faculteit	$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$	$[n]_q! = \dfrac{1-q}{1-q}\,\dfrac{1-q^2}{1-q}\,\cdots\,\dfrac{1-q^n}{1-q}$
(q-)binomiaalcoëfficiënt	$\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}$
(q-)afgeleide	$\dfrac{df(x)}{dx}$	$D_q f(x) = \dfrac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}$
(q-)integraal	$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$	$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,d_q x = (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} f(q^k)\,q^k$

Vanaf ongeveer 1975 was er een tijd lang een grote internationale opwinding over deze q-zaken, wat wel de *q-disease* genoemd werd en daarmee vooruit liep op de recente Q-koorts in de geitenstallen. Naast het Askey-tableau kwam er ook een q-Askey-tableau tot stand[45]. Bovenin dat tableau staan de *Askey-Wilson polynomen*[46], een familie van orthogonale polynomen die behalve van q van nog 4 parameters afhangt. Ook in dit q-tableau hebben we bispectraliteit, maar de operator die op de x-variable werkt is nu een q-differentie-operator. De al lang geleden ontwikkelde theorie van q-hypergeometrische functies[47] kreeg nieuwe aandacht en werd gesystematiseerd in het boek van Gasper & Rahman[48]. Zo blijkt er ook een tableau van q-hypergeometrische identiteiten te zijn[49].

De opwinding werd in de jaren ’80 nog groter toen de quantumgroepen ontdekt werden[50]. Dit zijn q-deformaties van de ons vertrouwde symmetrie-groepen zoals de groep van alle rotaties van een bol. q-Hypergeometrische functies en de polynomen uit het q-Askey-tableau bleken met die quantumgroepen in verband te kunnen worden gebracht, zo zelfs dat we kunnen zeggen dat die functies leven op die quantumgroepen[51]. Dit heeft mij ook flink beziggehouden samen met mijn toenmalige studenten Erik Koelink, Mathijs Dijkhuizen, Paul Floris en Jasper Stokman. Erik[52] en Jasper[53] hebben daar als zelfstandige onderzoekers vervolgens nog veel meer aan bijgedragen.

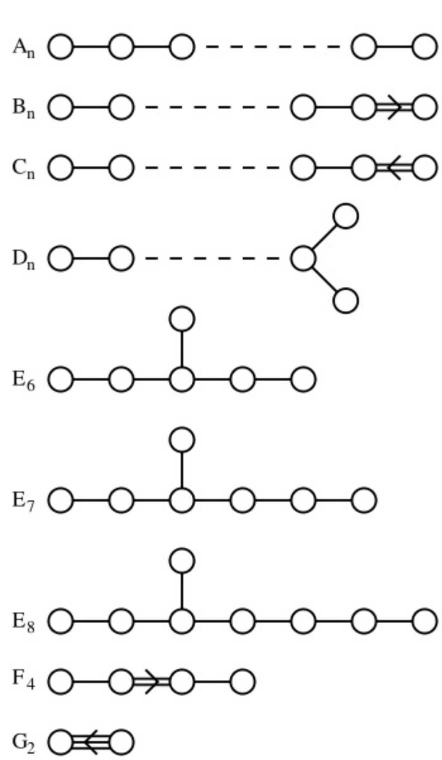
Sinds het werk van Frenkel en Turaev[54] uit 1997 weten we dat er boven het q-niveau nog een niveau is: het elliptische. Dit is gebaseerd op het elliptische analogon van een getal a:

$$[a]_{q,p} = \frac{\theta(q^a;p)}{\theta(q;p)}\,q^{(1-a)/2}, \quad \text{waarbij} \quad \theta(x;p) = \prod_{k=0}^{\infty}(1-xp^k)(1-x^{-1}p^{k+1}).$$

Het is zo heftig dat de *elliptic disease* nu rondwaart. Zo zijn er elliptische hypergeometrische functies en identiteiten voor deze functies[55], maar er is iets bijzonders mee. De identiteiten bestaan alleen op het hoogste niveau. Er is niet een groot tableau van identiteiten met pijlen die degeneraties aangeven. Wel kunnen we die elliptische identiteiten op het hoogste niveau laten degenereren naar q-identiteiten op het hoogste niveau[56], en daar hebben we alle vrijheid om limieten te nemen. Het doet een beetje denken aan de oerknal, waar alles nog in één toestand gefixeerd zit, dat is voor ons het elliptische niveau. Alle informatie is daar aanwezig, maar wordt pas zichtbaar in zijn grote verscheidenheid na voldoende uitzetting en afkoeling, dat is in mijn metafoor het q-niveau. Na een nog veel langere periode zijn we in het niveau $q = 1$ beland. Dat is het niveau dat we al het langste kenden omdat we dat niveau in onze directe waarneming zien.

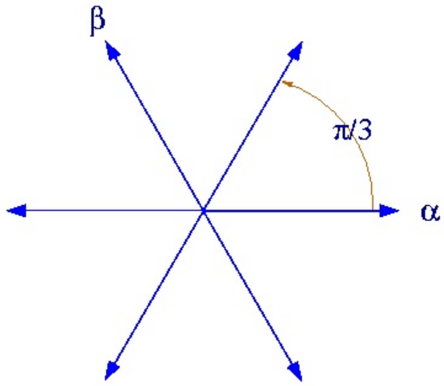
Wortelsystemen

De tweede manier waarop het Askey-tableau kan worden opgetild is door de uitbreiding tot functies van meer variabelen. Zulk soort uitbreidingen zijn al lang geleden gemaakt door expliciete formules op een tamelijk formele en voor de hand liggende manier tot meer variabelen uit te breiden. De interessantste en diepste uitbreidingen zijn minder voor de hand liggend. De sleutel tot deze uitbreidingen komt uit de halfenkelvoudige Lie-theorie[57], in het bijzonder uit de wortelsystemen[58], waarvan ik hier de bijbehorende Dynkin-diagrammen[59] laat zien.

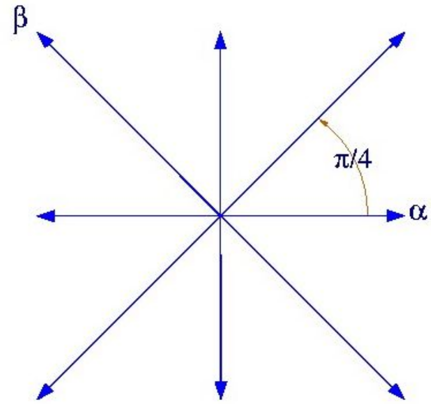


Er zijn 4 oneindige series A_n, B_n, C_n, D_n, waarbij n de natuurlijke getallen doorloopt. Verder zijn er 5 exceptionele gevallen: G_2, F_4, E_6, E_7 en E_8.

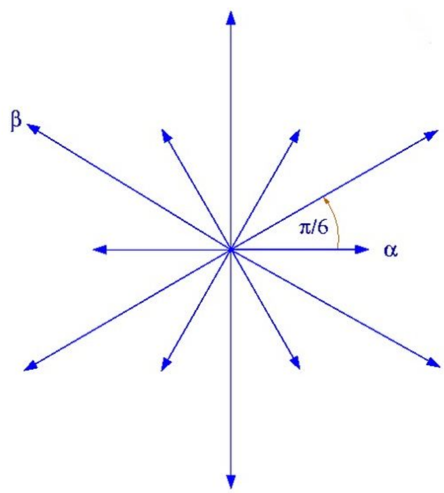
Voor het zogenaamde geval van rang 2 geef ik u hier de bijbehorende wortelsystemen.



A_2



B_2



G_2

Deze wortelsystemen kwamen tevoorschijn bij de classificatie van de complexe enkelvoudige Lie-algebra's door Wilhelm Killing en Elie Cartan eind negentiende eeuw. Sindsdien is gebleken dat wortelsystemen overal in de wiskunde opduiken. Van zeer uiteenlopende classificatieproblemen zijn zij het resultaat[60]. Laat ik u een korte en onvolledige historie geven van de speciale functies geassocieerd met wortelsystemen. Dit zal wat technischer worden zonder veel uitleg.

- Het begon met de sferische functies op Riemannse symmetrische ruimtes, een theorie ontwikeld door Cartan (1929), Gel'fand (1950) en Harish-Chandra (1958)[61].

- In mijn proefschrift[62] in 1975 liet ik mij inspireren door de sferische functies op compacte symmetrische ruimten van rang 2 om Jacobi-polynomen met algemene parameterwaarden in te voeren voor wortelsystemen BC_2 en A_2. Voor BC_2 werkte mijn student Ida Sprinkhuizen[63] dit verder uit in haar proefschrift[64] in 1979.

- In 1982 publiceerde Ian Macdonald[65] een vermoeden hoe de constante term van een zekere uitdrukking geassocieerd met wortelsystemen er uit zou zien.

- In de jaren 1987–1989 bewezen Gert Heckman en Eric Opdam[66] de hoofdeigenschappen van Jacobi-polynomen en hypergeometrische functies geassocieerd met wortelsystemen en bewees Opdam[67] Macdonald's constante-term-vermoeden voor een algemeen wortelsysteem.

- In 1987 voerde Macdonald orthogonale polynomen geassocieerd met wortelsystemen in het q-geval in[68]. In het geval van rang 1 passen deze in het q-Askey-schema, maar met hoogstens 2 parameters[69].

- In hetzelfde jaar verkreeg Simon Ruijsenaars[70] de Macdonald-polynomen voor A_n eveneens, maar in een radicaal andere opzet.

- In 1989 kwam Charles Dunkl[71] met zijn differentiaal-reflectie-operatoren geassocieerd met wortelsystemen. Zij werden bekend als *Dunkl-operatoren.*

- Cherednik en Heckman generaliseerden in 1991 de Dunkl-operatoren en voerden de niet-symmetrische Jacobi-polynomen voor wortelsystemen in als eigenfuncties van deze operatoren[72]. Door symmetrisatie hiervan kunnen de eigenschappen van de Jacobi-polynomen veel gemakkelijker worden verkregen.

- In 1992 publiceerde ik een artikel[73] waarin ik de Macdonald-polynomen voor BC_n met nog twee parameters uitbreidde, zodat zij in het geval van rang 1 samenvallen met de volledige 4-parameter-familie van Askey-Wilson-polynomen. Deze polynomen zijn bekend geworden onder de naam Macdonald-Koornwinder-polynomen. Door later werk van Stokman en anderen werd duidelijk dat het hele q-Askey-schema ook op het niveau van BC_n moet bestaan[74].

- In de jaren negentig zette Cherednik een theorie op van dubbele affiene Hecke-algebra's waarbinnen gegeneraliseerde Dunkl-operatoren en niet-symmetrische Macdonald-polynomen op een natuurlijke manier tevoorschijn komen. Zo kon hij door Macdonald geformuleerde vermoedens voor de symmetrische Macdonald-polynomen bewijzen[75]. Sahi breidde Cherednik's werk uit voor de Macdonald-Koornwinder-polynomen[76].

- In werk van o.a. Noumi en mijn oud-studenten Mathijs Dijkhuizen en Jasper Stokman werden interpretaties van Macdonald-polynomen en Macdonald-Koornwinder-polynomen op quantumgroepen gegeven[77]. Een algemene theorie hiervoor werd opgebouwd door Gail Letzter[78].

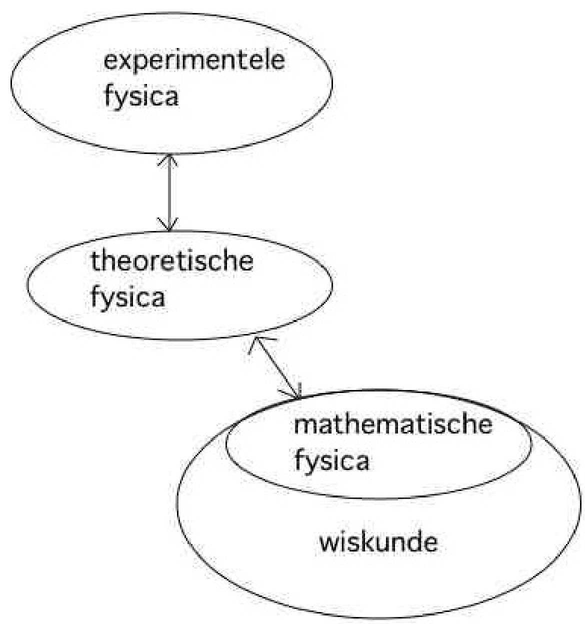
Wat in ieder geval moge doorklinken in dit beknopte overzicht is dat ideeën uit verschillende hoek samenkwamen en elkaar bevruchtten, en ook hoe belangrijk het Nederlandse aandeel in deze ontwikkelingen is geweest.

Waarom komen deze wortelsystemen, netzo als de hypergeometrische identiteiten en de orthogonale polynomen uit het Askey-tableau telkens weer tevoorschijn, in de wiskunde en de theoretische fysica? Is dat omdat wij die zaken nu eenmaal als mensen hebben leren kennen en er zo vergenoegd mee zij dat we ze telkens opnieuw willen gebruiken? Of is er een meer principiële reden. Zou een intelligente beschaving een miljoen lichtjaar hiervandaan er ook mee bezig zijn?

Ik ben er van overtuigd dat deze objecten, net zo als veel andere zaken in de wiskunde, er kunnen zijn en er moeten zijn omdat abstracte structuren juist deze objecten toelaten en geen andere van dezelfde rijkheid. Het is dus niet zo dat er een parallelle abstracte structuur is met bijv. een volledig ander Askey-tableau. Wel is eventueel een generalisatie op een hoger niveau mogelijk, bijv. van het Askey- naar het q-Askey-tableau of naar het elliptische niveau. In elke modellering van constellaties in de natuur of in de menselijke samenleving gebruiken we abstracte structuren, daarom keren de rijke objecten uit die abstracte structuren ook weer in de modelleringen terug.

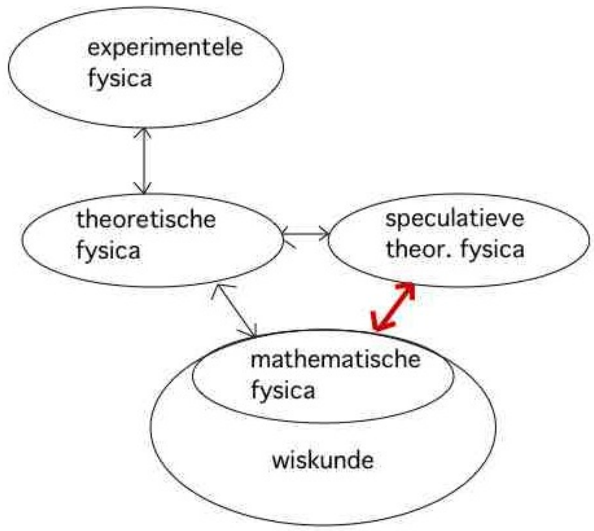
Mathematische fysica

De natuurkunde heb ik al een paar keer genoemd. Historisch heeft wiskunde een nauwe maar gecompliceerde relatie met de natuurkunde.



Sinds lang zijn er de experimentele en de theoretische fysica in onderlinge wisselwerking. De theoretische fysica levert de theorie die de meetresultaten van de experimentatoren verklaart en voorspelt. De theoretische fysica maakt intensief gebruik van wiskunde. Het deelgebied van de wiskunde dat het wiskundig gereedschap voor de theoretische fysica gereed maakt, heet mathematische fysica.

Vooral gedurende de laatse 30 jaar is hier de speculatieve theoretische fysica bijgekomen:



Deze doet op een veel vrijere manier aan theorievorming, wel uitgaande van een fysische intuïtie, maar minder gericht op de mogelijkheid van spoedige experimentele verificatie. Juist deze vorm van fysica doet een zwaarder beroep dan ooit tevoren op wiskundige hulpmiddelen, die via de mathematische fysica moeten worden aangeleverd. Sterker nog, vanuit de fysische intuïtie worden nieuwe wiskunderesultaten voorspeld, en herhaaldelijk zijn ze later juist gebleken. De rode pijl in twee richtingen is inderdaad uiterst vruchtbaar gebleken[79]. De snarentheorie is een belangrijk, maar niet het enige voorbeeld van zulke fysica.

Hoe passen de speciale functies hier nu in? Wel, in het schema van vroeger passen ze heel goed. De bekende klassieke speciale functies worden zelfs wel de speciale functies van de mathematische fysica genoemd[80]. In het wisselwerkingsschema dat nu actueel is, zijn de speciale functies minder prominent, maar fietsen ze wel mee. Dit meefietsen gaat dan vooral via de quantumgroepen, die al erg belangrijk zijn in de speculatieve theoretische fysica, maar nog wat minder gebruikt worden in de gewone theoretische fysica.

Overigens kunnen net zulke schema's als voor de mathematische fysica gemaakt worden met fysica vervangen door bijv. biologie of economie.

Onderwijs

Ik heb 24 jaar gewerkt op het CWI[81] als onderzoeker. Met de overstap in 1992 naar de universiteit kwamen er onderwijs en bestuur bij. Ik ben erg blij met de ervaringen die ik hierin heb opgedaan. Mijn professionele leven is zo rijker geworden dan wanneer ik als louter onderzoeker op het CWI zou zijn gebleven.

Eerst iets over het onderwijs. Ik heb dit leuker gevonden naarmate er meer interactie met de studenten kon worden bereikt. Vooral bij hoorcolleges is die interactie niet zo gemakkelijk te realiseren. Het hangt er sterk van af of er in de groep een paar communicatieve studenten zitten. Ik denk dat veel studenten zich tekort doen door niet vaker iets aan hun docenten te vragen, tijdens het hoorcollege, in de pauze, of bij de docent op de kamer langsgaand. De kleinschaligheid van onze opleiding kan zeker helpen bij deze interactie.

Bestuur

Nu over het besturen. In 1997 kwam de wet modernisering universitaire bestuursorganisatie tot stand, de z.g. MUB. Dat betekende inhoudelijk een radicale breuk met de WUB uit 1970, dat was de wet die de democratisering van de universiteiten bracht[82]. De praktijk van deze WUB, vooral in de beginjaren, heb ik niet meegemaakt, want toen werkte ik op het Mathematisch Centrum, dat ouderwets autoritair bestuurd werd. Toen ik in 1992 bij de UvA kwam, vormden we als vaste medewerkers bij de vakgroep wiskunde formeel nog het vakgroepsbestuur, maar in de praktijk maakte het dagelijks bestuur en vooral de vakgroepsvoorzitter de dienst uit. Wel had de gekozen faculteitsraad nog aanzienlijke macht. In 1995 trad het faculteitsbestuur van de net gevormde faculteit WINS af omdat de begroting door de faculteitsraad was afgestemd.

De MUB uit 1997, althans zoals die bij de UvA werd geïmplementeerd, bracht de vorming van onderzoeksinstituten met zich mee. Voor de wiskunde werd dat het *Korteweg-de Vries Instituut*[83]. Elk onderzoeksinstituut kreeg een directeur, die verantwoording schuldig was aan de decaan, maar verder bijna absolute macht had.

Ik werd in november 1997 de eerste directeur van het Korteweg-de Vries Instituut en ik bleef dat tot eind 2002. Hoewel ik dacht een democratische imborst te hebben, vond ik de autoritaire bevoegdheden die aan deze functie verbonden waren, eigenlijk wel makkelijk. Maar ook de collega's vonden het zo wel makkelijk, want ze beseften maar al te goed dat het directeurschap een zaak van lusten en lasten is, en de lasten zijn vaak groot. Toch streefde ik er naar om bij belangrijke beslissingen de collega's vooraf te informeren en consensus te bereiken.

De landelijke context

De UvA-wiskunde had uiteraard te maken met de landelijke context en de veranderingen daarin. Nederland is goed in het bedenken en invoeren van nieuwe interuniversitaire constructies, maar deze constructies slijten snel en na 10 jaar is er alweer behoefte aan iets nieuws. Zo zagen we in de jaren '80 de werkgemeenschappen, die een pre-adviserende rol hadden bij de beoordeling van de subsidie-aanvragen bij NWO[84]. In de jaren '90 ontstonden de onderzoekscholen die vooral een taak kregen bij de opleiding van de promovendi. De UvA-wiskunde zit bij onderzoekschool *Thomas Stieltjes*[85]. In mijn optiek was het academisch jaar 1994–95 het hoogtepunt van de Stieltjes-school, toen deze een stimulans-subsidie van NWO kreeg en we daarvan een interessant programma met buitenlandse gasten konden draaien.

In het huidige decennium kwamen de onderzoeksclusters[86] tot stand. Anders dan bij de werkgemeenschappen en de onderzoekscholen, die voor alle wetenschapsgebieden werden gevormd, waren de onderzoeksclusters exclusief voor de wiskunde en werd hun totstandkoming en financiering mogelijk gemaakt dank zij langdurig voorbereidend werk van een paar prominente bestuurders van wiskunde-onderzoekscholen[87]. Zij wisten bij de ministeries van OCW en EZ succesvol de boodschap over te brengen dat het maatschappelijk belang van de wiskunde te groot is om het aantal formatie-plaatsen wiskunde alleen maar te laten bepalen door het aantal wiskunde-studenten, dat lange tijd slinkende was. De UvA-wiskunde is vooral betrokken bij het onderzoekscluster GQT[88], dat staat voor meetkunde en quantumtheorie. Het heeft ons een paar voorfinancieringen opgeleverd voor nieuwe medewerkers in vaste dienst.

Verder is NWO[89], onze nationale tweede geldstroom-organisatie, steeds belangrijker geworden voor de financiering van het onderzoek. Vroeger betroffen deze gelden, waar in open competitie om gestreden moet worden, vooral kleine projecten voor een promovendus of een postdoc. Maar de grotere klappers zitten nu in de reeds genoemde onderzoeksclusters en in de persoonsgebonden steun, onder de namen Veni, Vidi, Vici en Spinoza.

Een aantal dingen vallen op bij deze achtereenvolgende organisatorische structuren. Allereerst hebben zij geleid tot een toenemende bestuurlijke en inhoudelijke samenwerking tussen wiskundigen van verschillende universiteiten. Maar bij de vorming zowel van de onderzoekscholen als van de onderzoekclusters is er een machtstrijd en politiek spel tussen de universiteiten geweest. De combinatie van samenwerking en competitie is ook op andere momenten duidelijk zichtbaar. Bij de voorlichting en werving van studenten is er samenwerking om de totale landelijke instroom te doen toenemen, maar er is vervolgens competitie om die instroom meer naar eigen opleiding te buigen. Duidelijke competitie is er ook bij het inhuren van veelbelovende jonge wiskundigen. Geregeld gaan instituten tot snelle bevordering van zo'n medewerker over als deze dreigt te worden weggekocht. Faculteiten die zich hierin wat ethischer opstellen zijn dan in het nadeel.

In de tweede plaats wordt de richting van het onderzoek in de toekomst steeds meer gestuurd door de successen nu in de tweede geldstroom, omdat die vaak voorfinancieringen betreffen van plaatsen die over een paar jaar zullen moeten landen in de eerste geldstroom. Een gevolg is dat elk wiskunde-instituut in Nederland zich moet profileren in een beperkt aantal deelgebieden. Profileringen van verschillende instituten vallen gedeeltelijk samen en zijn gedeeltelijk complementair, maar overdekken zelfs gezamenlijk de wiskunde niet geheel. Kleinere specialismen binnen de wiskunde verdwijnen hierdoor uit Nederland.

In de derde plaats worden de onderzoeksgroepen geleidelijk groter en wordt er meer samen met anderen gepubliceerd. Dit is niet slechts een autonome ontwikkeling, maar hij wordt ook van boven gestuurd, en hij heeft zelfs ideologisch meegespeeld bij de inrichting van ons faculteitsgebouw in aanbouw aan de Kruislaan. Toch produceren sommige wiskundigen hun beste onderzoek als ze rustig op hun kleine kamertje kunnen nadenken of als ze kunnen emailen met hun co-auteur aan het andere einde van de wereld.

De PR van de wiskunde

In de laatste 15 jaar is de wiskunde veel meer naar buiten getreden, in Nederland en in de hele wereld. We moesten ook wel, gezien de dramatische teruggang in studententallen. Maar het is niet alleen om defensieve redenen. Het wordt ook gedreven door een nieuw zelfbewustzijn en een plezier om je als wiskundige te laten zien. Te lang was de wiskunde weggedrukt uit de centrale positie binnen de cultuur die zij historisch innam en die zij op grond van haar recente functioneren nog steeds verdient. Laat ik een paar trends bespreken.

De productie aan boeken, toneelstukken en films die op wiskunde betrekking hebben, is enorm toegenomen. De website *Mathematical fiction*[90] van Alex Kasman telt nu 706 items, waarvan ongeveer de helft uit de laatste 16 jaar. Uiteraard kom je hier geregeld de steriotiepe wiskundige tegen, een onmodieus geklede man die onhandig is in sociale contacten en stuntelig in de liefde. Ook de science fiction is te verwachten. Maar we vinden er ook geromantiseerde levens van grote wiskundigen en plots waarin de oplossing van een wiskundig probleem een beslissende rol speelt. Hiernaast verschijnen er steeds vaker boeken waarin wiskunde gepopulariseerd wordt.

Het internet is gretig door de wiskundigen gebruikt om zich te laten zien. Wil je een snelle uitleg van een wiskundig begrip, typ maar de passende trefwoorden in Google en je wordt op je wenken bediend. Een steeds grotere rol hierin gaan de wiskunde-pagina's op Wikipedia spelen. In het begin was ik sceptisch over Wikipedia en zag ik veel onjuistheden op hun wiskunde-pagina's staan, maar het collectieve proces heeft wonderwel goed gewerkt. Althans op de Engelstalige Wikipedia is er een indrukwekkend geheel tot stand gekomen[91]. Niet zelden zal ook de professionele wiskundige er goed geholpen worden als hij een definitie of stelling buiten zijn eigen specialisme in korte beschrijving zoekt. Kennelijk zijn de positieve verbeteraars op dit onderdeel van Wikipedia sterker dan de vandalen en de dommen.

Kijken we naar de wiskundige pagina's op de Nederlandstalige Wikipedia[92], dan steken die wel erg bleek af bij de Engelstalige. Ik wil hier een oproep doen aan de Nederlandse en Vlaamse wiskundestudenten om hier wat aan te doen. Het lijkt me een mooie voorbereiding voor een tentamen om wat je net hebt geleerd op een heldere manier voor een algemener publiek dan je docent te plaatsen op Wikipedia.

De wiskundigen zijn ook gaan bloggen. Sommigen doen uitstekend werk terwijl ze zich richten op een professioneel niveau van minstens master-student. Ik noem als voorbeelden John Baez[93] in de mathematische fysica en de Fields-medaille-winnaar Terence Tao[94] op het brede wiskundige terrein dat hij overziet. In Nederland hebben we onze eigen wiskundemeisjes (`www.wiskundemeisjes.nl`) die perfect de nieuwe generatie weten aan te spreken. Ongelooflijk zoveel goeds als zij doen voor de popularisering van de wiskunde in Nederland.

Dankwoord

Het is tijd om af te ronden. Ik had u nog veel meer willen vertellen en meer opinies bij u willen neerleggen. Maar ja, het is weliswaar mijn afscheidscollege, maar niet mijn laatste woord. Het is meer een tussentijds verslag. Gesponsord door een andere broodheer, het ABP, hoop ik in de wiskunde actief te blijven.

Beste oud-promovendi, het was plezierig om met jullie te werken en het is fijn om veel van jullie nu weer te ontmoeten.

Dear former postdocs, I learnt at least as much from you as you did from me.

Dear organizers and speakers in yesterday's and today's symposium "Special functions and quantum groups", I very much enjoyed to be together with you these days, and to hear about the last progress and the review of what happened before.

Waarde collega's van het Korteweg-de Vries Instituut, ik heb de goede collegiale sfeer altijd zeer gewaardeerd. Ons instituut heeft een prachtnaam en het doet prachtwerk. Met alle hens aan dek, om een bekend Nederlander te citeren, zal het de storm die nu raast zeker doorstaan.

Collega's in het land, met velen van u heb ik in een of andere context te maken gehad. Het zal u en mij goed doen om te zien dat de BV Wiskunde Nederland floreert.

Lieve Marita, mijn veertigjarige wiskundige leven en ons samenleven beslaan nagenoeg dezelfde periode. Er is duidelijk meer dan wiskunde in het leven.

Ik heb gezegd

Noten

[1]Zie bijv. Jeff Miller's webpagina `http://members.tripod.com/jeff560/stamps.html`, waaraan ik ook de afbeeldingen van postzegels op de titelpagina heb ontleend.

[2]Brief van staatsecretaris van Onderwijs, Cultuur en Wetenschap aan Tweede Kamer d.d. 23 oktober 2008 over "examinering voortgezet onderwijs", §3.2.

[3]Citaat in NRC Handelsblad, 24 oktober 2008, p.3, *Calculerende scholier krijgt het lastiger*.

[4]Zie de *2010 Mathematics Subject Classification*, `http://e-math.ams.org/msc/`. Hierin heeft categorie 33 de titel *Special functions*.

[5]Zie [38].

[6]Alle grafieken in dit boekje zijn gemaakt met behulp van het computerprogramma *Mathematica*® 7, `http://www.wolfram.com/products/mathematica/`.

[7]Het getal $e = 2,718281828459\ldots$ van Euler, zie bijv. `http://nl.wikipedia.org/wiki/E_(wiskunde)` .

[8] Hier is $2! = 1\times 2 = 2$, $3! = 1\times 2\times 3 = 6$, $4! = 1\times 2\times 3\times 4 = 24, \ldots$. De gegeven formules voor e^x en $\sin x$ zijn zogenaamde *machtreeksen*, zie `http://nl.wikipedia.org/wiki/Machtreeks`, en ze convergeren voor elke waarde van x. Daarom is voor elke waarde van x de som van zo'n machtreeks in principe gegeven en is die tot op elke gewenste nauwkeurigheid te berekenen.

[9]Verrassend genoeg zijn de twee functies nauw met elkaar verbonden door de formule $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$. Hier is i de imaginaire eenheid: $i^2 = -1$.

[10]Zie [1].

[11]Als $a = (a_1, \ldots, a_n)$ en $b = (b_1, \ldots, b_n)$ twee punten (vectoren) in de n-dimensionale reële vectorruimte zijn dan is hun *inproduct* gedefinieerd als $\langle a, b\rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$. De vectoren a en b staan dan loodrecht op elkaar dan en slechts dan als $\langle a, b\rangle = 0$.

[12]Volgens Crowe [15, pp. 70, 80, 81] introduceerde Grassmann het inproduct in zijn *Ausdehnungslehre* in 1844 en meer gedetailleerd in een publicatie in 1847.

[13]Zie [15, p.86] voor een commentaar door Hamilton op het werk van Grassmann in een brief uit 1853.

[14]Zie een animatie van deze grafiek, waarbij het verloop in de tijd te zien is, op `http://www.science.uva.nl/~thk/art/popular/afscheidscollege/animatie.pdf`. Hiertoe moet de pdf file in Adobe Reader worden geopend.

[15]Zie `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Pythagoras.html`. Volgens Derk Pik [50] zijn stemmingen op basis van eenvoudige verhoudingen echter al gevonden in Babylonische teksten van 3500 v. Chr.

[16]Een populariserend boek van Barbara Hubbard [33], uiteindelijk gericht op wavelets, begint met een uiteenzetting over Fourier-analyse.

[17]Zie `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Fourier.html`.

[18]Zie `http://en.wikipedia.org/wiki/MP3`.

[19]Zie `http://en.wikipedia.org/wiki/JPEG`.

[20]Zie bijv. een recent boek van Benson [8]. Zie ook een artikel van Derk Pik [50].

[21]Zie `http://www.pursangkamerkoor.nl/`.

[22]Standaardboeken over orthogonale polynomen zijn Szegő [55] en Chihara [14].

[23]Zie http://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials.

[24]Zie [55, Theorem 3.3.2].

[25]Zie [35, §1.8.3].

[26]Zie [55, Theorem 3.2.1].

[27]De orthogonale polynomen met deze eigenschap worden de *klassieke orthogonale polynomen* genoemd, zie [14, Ch. V, §2].

[28]Zie [26].

[29]Dit tableau verscheen voor het eerst in druk aan het eind van de Memoir [5] van Askey en Wilson, met kleine aanvulling in [4]. Een grote poster van dit tableau werd gemaakt door J. Labelle [40], en hij gaf er de naam Askey-tableau aan. Zoals Askey zelf vaak vertelde, was de oorsprong van dit tableau tijdens een conferentie *Kombinatorik und spezielle Funktionen* in Oberwolfach (een bekende plek voor wiskunde-conferenties in het Zwarte Woud, Duitsland). Michael R. Hoare presenteerde daar in een voordracht een pijlendiagram dat de kiem vormde van het latere Askey-tableau.

[30]Zie [14, Ch. V, §2].

[31]Zie [57].

[32]Zie [35].

[33]Zie [56].

[34]Zie Needham [46, pp. 133–137]. De afbeelding staat voorop het boek *Ssu Yuan Yü Chien* (Precious mirror of the four elements) van Chu Shih-Chieh uit 1303. Als naam van de afbeelding wordt gegeven: "The old method chart of the seven multiplying squares". De binomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{k}$ tot/met de rij met $n = 8$ worden er gegeven. Deze Driehoek werd in China eerder gegeven door Yang Hui (1261) en zou teruggaan op werk omstreeks 1100 door Chia Hsien en Liu Ju-Hsieh.

[35]In *Traité du triangle arithmétique* door Blaise Pascal gepubliceerd in 1665. Zie Edwards [22].

[36]Zie [22, p.31].

[37]Zie [22, p.30]. Pingala's methode staat bekend als *Meru Prastara* (berg Meru). Ik dank Gerard van der Geer voor het attenderen op Pingala's werk.

[38]Zie [22, p.52]. Al-Karaji werkte in Bagdad maar kwam mogelijk uit Perzië.

[39]Zie [22, pp. 52, 53].

[40]Zie Needham [46, pp. 138, 139] commentaar hierop in Askey [3, pp. 59,60].

[41]Zie [3, p.138]

[42]Zie Dutka [21] over de geschiedenis van de hypergeometrische functie van Gauß. Zie ook een paar mini-biografieën in Andrews [2].

[43]Zie [7].

[44]Maar zo'n tableau zit meer in de hoofden van de onderzoekers dan in druk. In het q-geval is er sinds kort wel iets beschikbaar, zie verderop.

[45]Zie [35, pp. 61, 62].

[46]Zie [5].

[47]Een systematische opbouw van de theorie van de theorie van de q-hypergeometrische functies werd voor het eerst gegeven door Heinrich Heine in zijn artikel in J. Reine Angew. Math. 34 (1878). Zie biografische gegevens over Heine op `http://www.mathematik.uni-halle.de/history/heine/`. Zie ook een paar mini-biografieën van latere onderzoekers in Andrews [2].

[48]Zie [24].

[49]Zie Appendix A in van de Bult & Rains [10].

[50]Quantumgroepen werden ingevoerd door Drinfel'd en Jimbo. Zij zijn nauw verwant met Hopf-algebra's, maar ze hebben eigenlijk geen precieze definitie. Zie `http://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_group` of Majid [45] voor een eerste kennismaking.

[51]Het blijft curieus dat de 'q' in q-hypergeometrisch, die teruggaat tot de negentiende eeuw, nu een nadere betekenis heeft gekregen als beginletter van '*quantum*'. Hier liepen de Branges en Trutt al op vooruit met hun artikel *Quantum Cesàro operators* [9] uit 1978.

[52]Zie Erik Koelink's homepage `http://www.math.ru.nl/~koelink/` .

[53]Zie Jasper Stokman's homepage `http://staff.science.uva.nl/~jstokman/` .

[54]Zie [23].

[55]Zie [24, Ch. 11].

[56]Zie [10].

[57]Zie Herb [32, p.16] voor een verhaal verteld door Harish-Chandra en toegeschreven aan Chevalley over een discussie tussen God en de duivel: Een aantal speciale zaken waaronder de halfenkelvoudige groepen wil God exclusief voor zijn rekening nemen bij de schepping.

[58]Zie `http://en.wikipedia.org/wiki/Root_system` .

[59]Zie `http://en.wikipedia.org/wiki/Dynkin_diagram` .

[60]Zie [28] and `http://math.ucr.edu/home/baez/week230.html` .

[61]Zie [11], [25] and [27].

[62]Zie [37].

[63]Zie Ida Sprinkhuizen's homepage `http://www.nici.ru.nl/~idak/`.

[64]Zie [53].

[65]Zie [42].

[66]Zie [31], [29], [48].

[67]Zie [49].

[68]Dit waren twee manuscripten. Het eerste betrof het wortelsysteem A_n en werd gepubliceerd in 1988, zie [43]. Het tweede betrof het geval van algemene wortelsystemen. Pas in 2000 verscheen dit in druk, zie [44]. Zij werden bekend als Macdonald-polynomen.

[69]Macdonald-polynomen vallen samen met de continue q-ultrasferische polynomen (een 1-parameterklasse) voor wortelsysteem A_1 en met de continue q-Jacobi-polynomen (een 2-parameterklasse) voor wortelsysteem BC_1.

[70]Zie [51].

[71]Zie [20].

[72]Zie Cherednik [12] en Heckman [30].

[73]Zie [39].

[74]Zie [54] en [16].

[75]Zie [13].

[76]Zie [52].

[77]Zie [18] en [19].

[78]Zie [41].

[79]Zie het artikel van Jaffe en Quinn [34] uit 1993 en de daarop volgende discussie [6]. Robbert Dijkgraaf spreekt van de "onredelijke effectiviteit van de fysica in de moderne wiskunde" [17]. Een beroemd voorbeeld van voorspelling van wiskunderesultaten vanuit de fysica is het vermoeden van Witten [58] uit 1991 over een verband tussen intersectietheorie voor $\overline{M}_{g,n}$ (de compactificatie van de moduli-ruimte van algebraïsche krommen van geslacht g met n gemarkeerde punten) en een hiërarchie van Korteweg-de Vries vergelijkingen. Dit vermoeden werd het eerst bewezen door Kontsevich [36] en later op andere manier, o.a. door Okounkov en Pandharipande [47].

[80]Sinds WO2 zijn er minstens 5 boeken verschenen met in de titel "special functions of mathematical physics".

[81]Zie `http://www.cwi.nl/`.

[82]Zie `http://www.lofnet.nl/actueel/publicatiesdigitaal/hoofdstuk11mubmaster.php`.

[83]Zie `http://www.science.uva.nl/math/`.

[84]Zie een terugblik hierover door Cor Baayen in
`http://www.math.leidenuniv.nl/~naw/serie5/deel05/sep2004/pdf/ereleden.pdf`, p.216 (als nieuw erelid van het Koninklijk Wiskundig Genootschap werd hij geïnterviewd in Nieuw Archief voor Wiskunde). Zelf startte ik samen met wijlen prof. Lekkerkerker het mededelingenblad *Nieuws Analyse* voor de werkgemeenschap Analyse op. De redactie werd later voortgezet door Nico Temme. Het blad werd opgeheven in 1999, zie `http://projects.cwi.nl/etna/`.

[85]Zie `http://www.stieltjes.org/`.

[86]Zie `http://www.nwo.nl/nwohome.nsf/pages/NWOP_5TLDGS`.

[87]Rien Kaashoek en Henk van der Vorst brachten in 2002 de nota "Nieuwe dimensies, ruimer bereik" uit. Zie hun artikel "De toekomst van het wiskundeonderzoek",
`http://www.math.leidenuniv.nl/~naw/serie5/deel03/jun2002/pdf/kaashoek.pdf`
in Nieuw Archief voor Wiskunde.

[88]Zie `http://www.gqt.nl/`.

[89]Zie `http://www.nwo.nl/`.

[90]Zie `http://kasmana.people.cofc.edu/MATHFICT/`.

[91]Zie `http://en.wikipedia.org/wiki/Category:Mathematics`.

[92]Zie `http://nl.wikipedia.org/wiki/Categorie:Wiskunde`.

[93]John Baez verzorgt sinds 1993 een column *This Week's Finds in Mathematical Physics* op het web, zie `http://math.ucr.edu/home/baez/TWF.html`

[94]Zie `http://terrytao.wordpress.com/`.

Referenties

[1] E. A. Abbott, *Flatland. A romance of many dimensions*, 1884, reprinted by Dover, 1992.

[2] G. E. Andrews, The well-poised thread: an organized chronicle of some amazing summations and their implications, *Ramanujan J.* 1 (1997), 7–23.

[3] R. Askey, *Orthogonal polynomials and special functions*, Regional Conference Series in Applied Math. 21, SIAM, 1975.

[4] R. Askey, Continuous Hahn polynomials, *J. Phys. A* 18 (1985), L1017–L1019.

[5] R. Askey and J. Wilson, *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials*, Mem. Amer. Math. Soc. 54 (1985), no. 319.

[6] M. Atiyah et al., Responses to: A. Jaffe and F. Quinn, "Theoretical mathematics: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics", *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 30 (1994), 178–207.

[7] W. N. Bailey, *Generalized hypergeometric series*, Cambridge University Press, 1935; reprinted by Hafner, 1972.

[8] D. Benson, *Music: a mathematical offering*, Cambridge University Press, 2007.

[9] L. de Branges and D. Trutt, Quantum Cesàro operators, in *Topics in functional analysis*, I. Gohberg and M. Kac (eds.), Advances in Mathematics Supplementary Studies 3, Academic Press, 1978, pp. 1–24.

[10] F. van de Bult and E. Rains, Basic hypergeometric functions as limits of elliptic hypergeometric functions, *SIGMA* 5 (2009), paper 059; `arXiv:0902.0621v2 [math.CA]`.

[11] E. Cartan, Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos, *Rend. Circ. Mat. Palermo* 53 (1929), 217–252.

[12] I. Cherednik, A unification of Knizhnik-Zamolodchikov and Dunkl operators via affine Hecke algebras, *Invent. Math.* 106 (1991), 411–431.

[13] I. Cherednik, Double affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures, *Ann. of Math. (2)* 141 (1995), 191–216.

[14] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach, 1978.

[15] M. J. Crowe, *A history of vector analysis*, University of Notre Dame Press, 1967.

[16] J. F. van Diejen and J. V. Stokman, Multivariable q-Racah polynomials, *Duke Math. J.* 91 (1998), 89–136.

[17] R. Dijkgraaf, De onredelijke effectiviteit van de fysica in de moderne wiskunde, *Ned. Tijdschr. Natuurk.* 62 (1996), 255-257; `http://staff.science.uva.nl/~rhd/ntvn.html`.

[18] M. S. Dijkhuizen and M. Noumi, A family of quantum projective spaces and related q-hypergeometric orthogonal polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* 350 (1998), 3269–3296.

[19] M. S. Dijkhuizen and J. V. Stokman, Some limit transitions between BC type orthogonal polynomials interpreted on quantum complex Grassmannians, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 35 (1999), 451–500.

[20] C. F. Dunkl, Differential-difference operators associated to reflection groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 311 (1989), 167–183.

[21] J. Dutka, The early history of the hypergeometric function, *Arch. Hist. Exact Sci.* 31 (1984), 15–34.

[22] A. W. F. Edwards, Pascal's arithmetical triangle, Charles Griffin, London, 1987.

[23] I. B. Frenkel and V. G. Turaev, Elliptic solutions of the Yang-Baxter equation and modular hypergeometric functions, in *The Arnold-Gelfand mathematical seminars*, V. I. Arnold et al. (eds.), Birkhäuser, 1997, pp. 171–204.

[24] G. Gasper and M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, 2nd edn., Cambridge University Press, 2004.

[25] I. M. Gel'fand, Spherical functions on symmetric spaces, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 70 (1950), 5–8; *Amer. Math. Soc. Transl.* 37, 1964, pp. 39–44.

[26] F. A. Grünbaum, The bispectral problem: an overview, in *Special functions 2000: current perspective and future directions*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., Vol. 30, Kluwer, 2001, pp. 129–140.

[27] Harish-Chandra, Spherical functions on a semisimple Lie group. I, II, *Amer. J. Math.* 80 (1958), 241–310, 553–613.

[28] M. Hazewinkel, W. Hesselink, D. Siersma and F. D. Veldkamp, The ubiquity of Coxeter-Dynkin diagrams (an introduction to the A-D-E problem), *Nieuw Arch. Wisk.* (3) 25 (1977), 257–307.

[29] G. J. Heckman, Root systems and hypergeometric functions II, *Compositio Math.* 64 (1987), 353–373.

[30] G. J. Heckman, An elementary approach to the hypergeometric shift operators of Opdam, *Invent. Math.* 103 (1991), 341–350.

[31] G. J. Heckman and E. M. Opdam, Root systems and hypergeometric functions I, *Compositio Math.* 64 (1987), 329–352.

[32] R. A. Herb, Harish-Chandra and his work, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 25 (1991), 1–17.

[33] B. B. Hubbard, *The world according to wavelets*, A K Peters, 1998.

[34] A. Jaffe and F. Quinn, "Theoretical mathematics": toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 29 (1993), 1–13.

[35] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*, Report 98-17, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology, 1998; `http://aw.twi.tudelft.nl/~koekoek/askey/`.

[36] M. Kontsevich, Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function, *Comm. Math. Phys.* 147 (1992), 1–23.

[37] T. H. Koornwinder, *Jacobi polynomials and their two-variable analogues*, PhD thesis, University of Amsterdam, 1975.

[38] T. H. Koornwinder, *Gelijk en ongelijk in de analyse*, Oratie, Universiteit van Amsterdam, 19 februari 1993; `http://staff.science.uva.nl/~thk/art/popular/`.

[39] T. H. Koornwinder, Askey-Wilson polynomials for root systems of type BC, in *Hypergeometric functions on domains of positivity, Jack polynomials, and applications*, D. St. P. Richards (ed.), Contemp. Math. 138, Amer. Math. Soc., 1992, pp. 189–204.

[40] J. Labelle, Tableau d'Askey, in *Orthogonal polynomials and applications*, Lecture Notes in Math. 1171, Springer-Verlag, 1985, pp. xxxvi–xxxvii.

[41] G. Letzter, Invariant differential operators for quantum symmetric spaces, *Mem. Amer. Math. Soc.* 193 (2008), no. 903; `arXiv:math/0406193v1 [math.QA]` and `arXiv:math/0406194v1 [math.QA]`.

[42] I. G. Macdonald, Some conjectures for root systems, *SIAM J. Math. Anal.* 13 (1982), 988–1007.

[43] I. G. Macdonald, A new class of symmetric functions, *Sém. Lothar. Combin.* 20 (1988), B20a, 41 pp.; `http://www.emis.de/journals/SLC/opapers/s20macdonald.html`

[44] I. G. Macdonald, Orthogonal polynomials associated with root systems, *Sém. Lothar. Combin.* 45 (2000), B45a, 40 pp.; `arXiv:math/0011046v1 [math.QA]`.

[45] S. Majid, What is a quantum group?, *Notices Amer. Math. Soc.* 53 (2006), nr. 1, pp. 30–31; `http://www.ams.org/notices/200601/what-is.pdf`.

[46] J. Needham, *Science and civilisation in China, Vol. 3*, Cambridge University Press, 1959.

[47] A. Okounkov and R. Pandharipande, Gromov-Witten theory, Hurwitz numbers, and matrix models, in *Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math. 80, Amer. Math. Soc., 2009, pp. 325–414; `arXiv:math/0101147v2 [math.AG]`.

[48] E. M. Opdam, Root systems and hypergeometric functions. III, IV, *Compositio Math.* 67 (1988), 21–49, 191–209.

[49] E. M. Opdam, *Some applications of hypergeometric shift operators*, Invent. Math. 98 (1989), 1–18.

[50] D. Pik, Vanuit het gezichtspunt van de muziek, *Nieuw Arch. Wisk.* (5) 10 (2009), no. 2, pp. 102–110; `http://www.math.leidenuniv.nl/~naw/serie5/deel010/jun2009/pik.pdf`.

[51] S. N. M. Ruijsenaars, Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities, *Comm. Math. Phys.* 110 (1987), 191–213.

[52] S. Sahi, Nonsymmetric Koornwinder polynomials and duality, *Ann. of Math. (2)* 150 (1999), 267–282.

[53] I. G. Sprinkhuizen-Kuyper, *Koornwinder polynomials: a special class of orthogonal polynomials in two variables*, PhD thesis, University of Amsterdam, 1979.

[54] J. V. Stokman, On BC type basic hypergeometric orthogonal polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* 352 (2000), 1527–1579

[55] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. 23, American Mathematical Society, Fourth ed., 1975.

[56] N. Ja. Vilenkin and A. U. Klimyk, *Representation of Lie groups and special functions, Vol. 1: Simplest Lie groups, special functions and integral transforms*, Kluwer, 1991.

[57] J. A. Wilson, Some hypergeometric orthogonal polynomials, *SIAM J. Math. Anal.* 11 (1980), 690–701.

[58] E. Witten, Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space, in *Surveys in differential geometry*, Lehigh Univ., Bethlehem, Pennsylvania, 1991, pp. 243–310.

Tom H. Koornwinder
Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam
Postbus 94248
1090 GE Amsterdam
email: `T.H.Koornwinder@uva.nl`