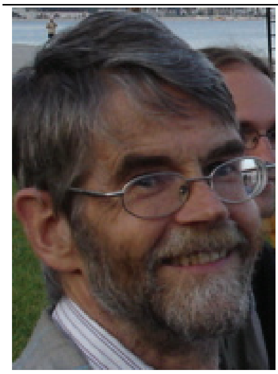
De ontdekking van... Tom Koornwinder

Als je bij een wiskundige denkt aan iemand die zó enthousiast met krijt, schoolbord en formules omgaat dat zijn handen en kleding steeds witter worden naarmate het college vordert, dan is professor Koornwinder waarschijnlijk jouw ideale mathematicus. Bij wiskundestudenten is hij bekend als docent Integratietheorie*,* Functionaalanalyse *en* Distribution Theory*, en ook bij informatica heeft hij vakken verzorgd. Maar een hoogleraar verdient natuurlijk niet alleen in het onderwijs zijn sporen, maar ook in het onderzoek. Scoop ging langs bij deze expert op het gebied van speciale functies, wortelsystemen en* q-*analoga.* — Timo Klück

“Ik begon met een doctoraal in theoretische fysica, maar die viel wat tegen: het was wiskundig niet zo rigoureus. Zodoende werd ik naar de wiskunde toe getrokken. Bovendien was er bij wiskunde een baantje vrij als student-assistent: ik gaf werkcollege en zat een dagdeel in de week in de bibliotheek om toezicht te houden en om wiskundevragen te beantwoorden.



Tom Koornwinder
“Ik ben daar natuurlijk niet zelf mee begonnen, maar deze polynomen heten tegenwoordig Koornwinder-polynomen.”

“Na mijn doctoraal wiskunde kwam ik bij het Mathematisch Centrum terecht, dat is nu het Centrum voor Wiskunde en Informatica. Ik zat op de afdeling Toegepaste wiskunde maar ik wilde eigenlijk mathematische fysica doen. Ik kon daarom in eerste instantie mijn draai niet vinden. Maar op een gegeven moment kwam de Amerikaanse hoogleraar Askey met sabbatical een jaar naar het Mathematisch Centrum. Hij hield zich bezig met speciale functies en orthogonale polynomen en gaf een serie voordrachten voor de promovendi. Die onderwerpen waren toen helemaal niet modieus, maar hij inspireerde ons enorm. Askey had een aantal open problemen en hij zag een goede mogelijkheid om Lie-groepen, die ik al van mijn studie in Leiden kende, en speciale functies te combineren.”

“Gedurende 1970-71 was er een themajaar op het Mittag-Leffler Instituut bij Stockholm over niet-commutatieve harmonische analyse. Dit instituut is gevestigd in het voormalige woonhuis van de wiskundige Mittag-Leffler, die met een rijke vrouw getrouwd was. Met haar erfenis wordt dit instituut nog steeds onderhouden. Het is een prachtige kasteelachtige villa vlak buiten Stockholm die letterlijk om een wiskundebibliotheek heen is gebouwd. Askey moedigde mij aan om er naartoe te gaan en gaf mij een aanbeveling. Er kwamen getalenteerde jonge mensen en grote namen uit de wiskunde. Vooral professor Helgason maakte veel indruk op mij.”

Mittag-Leffler Instituut

Optelformule

“Ik hield mij bezig met het vinden van een additieformule voor Jacobi-polynomen. Zo’n optelformule bestond al voor een deelklasse, en ik was de eerste die er een vond voor het algemene geval. Maar Helgason had maar weinig affiniteit met die materie, en in die tijd werd je als promovendus niet altijd goed aangemoedigd zoals dat nu gebeurt. Ik publiceerde dit daarom alleen maar in een rapport van het Mathematisch Centrum. Later heb ik een ander bewijs van deze formule wel ingediend voor peer-review en dat werd toen écht gepubliceerd.”

“In die tijd had je als promovendus de luxe situatie dat je vaak al voor onbepaalde tijd werd aangesteld. Natuurlijk werden sommige promovendi wel ‘aangemoedigd’ om na afloop uit te kijken naar iets anders, maar mij wilden ze wel graag houden. Ik ging toen ook jonge wiskundigen begeleiden, zoals Ida Sprinkhuizen.”

“Eind jaren ’80 kwamen er interessante ontwikkelingen op mijn vakgebieden. Dat was het werk van Ian Macdonald over wat later Macdonald-polynomen ging heten, en werk over quantumgroepen. Beide maken gebruik van een deformatieparameter q. Zo zijn quantumgroepen deformaties van gewone groepen. Macdonald introduceerde q-analoga van het werk van Gert Heckman en zijn promovendus Eric Opdam, die op hun beurt voortbouwden op mijn werk.

Eigen Polynomen

“Askey vond intussen, met behulp van q-analoga, een klassificatie van alle orthogonale polynomen. Dit noemt men nu Askey-Wilson polynomen. Het inspireerde mij om ook aan het werk te gaan, en ik vond uiteindelijk een soort polynomen die ook de Macdonald-polynomen nog eens met twee parameters uitbreidde. Ik ben daar natuurlijk niet zelf mee begonnen, maar deze polynomen noemt men tegenwoordig Macdonald-Koornwinder polynomen. Jasper Stokman vond later een interpretatie van deze polynomen op bepaalde quantumgroepen.”

“Inmiddels zijn de *q*-speciale functies door alle gevonden verbanden een gerespecteerd gebied geworden. Ze hebben toepassingen in de mathematische fysica, maar ook in de combinatoriek en in de kansrekening.”

Jacobi-polynomen

De polynomen, bijvoorbeeld op het interval (-1,1), vormen een lineaire ruimte die een inproduct heeft: $\langle p,q\rangle := \int p(x)q(x)dx$. Je kunt dus spreken van polynomen p en q die 'loodrecht' op elkaar staan, dat wil dan zeggen dat $\langle p,q\rangle = 0$. Meestal maakt men het inproduct wat interessanter door een (vaste) gewichtsfunctie w(x) toe te voegen: $\langle p,q\rangle := \int p(x)q(x)w(x)dx$.

Met orthogonale polynomen bedoelt men een rij polynomen $\{p_n\}$ zodat elke p_n graad *n* heeft, en zodat de verschillende polynomen loodrecht op elkaar staan. Natuurkundestudenten kennen bijvoorbeeld de Laguerre-polynomen als beschrijving van het waterstofatoom, en wiskundestudenten komen de Chebyshev-polynomen tegen bij numerieke wiskunde.

Deze laatste zijn voorbeelden uit de klasse van Jacobi-polynomen. Dat zijn polynomen die loodrecht op elkaar staan als je kijkt naar het inproduct met gewichtsfunctie $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$. Elke keuze van α en β levert dan een specifieke klasse op. Zo zijn Chebyshev-polynomen het geval $\alpha = \beta = -1/2$.

Tom Koornwinder was in 1972 degene die de optelformule voor Jacobi-polynomen vond:

$$
\begin{aligned}
P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\tfrac{1}{2}(1+x)(1+y)+\tfrac{1}{2}(1-x)(1-y)r^2+(1-x^2)^{(1/2)}(1-y^2)^{(1/2)}r\cos\phi-1\right) = \\
\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}(k+l+\alpha)(k-l+\beta) \\
\times\frac{(n+\alpha+\beta+1)_k(2\beta+1)_{k-l}(n-1+\beta+1)_l(n-k)!}{2^{2k}(k+\alpha)((k-l)/2+\beta)(\beta+1)_l(\beta+1/2)_{k-l}(k+\alpha+1)_{n-k+l}} \\
\times(1-x)^{((k+l)/2)}(1+x)^{((k-l)/2)}P_{(n-k)}^{(\alpha+k+l,\beta+k-l)}(x) \\
\times(1-y)^{((k+l)/2)}(1+y)^{((k-l)/2)}P_{(n-k)}^{(\alpha+k+l,\beta+k-l)}(y) \\
\times P_l^{(\alpha-\beta-1,\beta+k-l)}(2r^2-1)r^{k-l}P_{k-l}^{(\beta-1/2,\beta-1/2)}(\cos\phi)
\end{aligned}
$$

Q-analogon

Een q-analogon van een wiskundig concept, zoals een groep of een operator, kun je je voorstellen als een vervorming ervan. Zo is een quantumgroep helemaal geen groep, maar een familie van wiskundige structuren. De structuur bij $q = 1$ is een groep. Alle informatie over deze groep zit ook in de ruimte van functies op deze groep. Als je q laat lopen over de reële getallen vervorm je deze functieruimte – de vervorming hoeft dan niet veel meer met een groep te maken te hebben. Zo kun je een vervelende structuur die je aan het bestuderen bent (bijvoorbeeld omdat je hem in de natuurkunde tegenkomt) in verband brengen met een structuur die je al vrij goed begrijpt.

Jasper Stokman
"Ik kijk met veel bewondering naar Toms begeleidende rol bij mijn promotie: hij speelde me uitstekende onderzoeksvragen toe, hij wist me met precies de goede hints heel soepeltjes verder te helpen op momenten dat het onderzoek was vastgelopen, en hij gaf mij grote vrijheid om mijn eigen pad te vinden."

"Ik heb mij kort geleden ook verdiept in de wiskunde achter de mp3-codering. Wietse Steffen, een bachelorstudent, deed daar zijn scriptie over. Om de muziek te coderen heb je een bepaalde lijst getallen nodig. Deze lijst met 512 getallen op 10 decimalen nauwkeurig leek voor mij uit de lucht te vallen. Ik ben toen nagegaan waar ze op gebaseerd zijn. Ik leidde zodoende op mijn eigen manier een set coëfficiënten af, die zeker niet tot de laatste decimaal hetzelfde zijn, maar die kwalitatief net zo goed zijn. Later kwam ik Leon van den Kerkhof van Philips tegen, en hij bleek bij de specificatie betrokken te zijn geweest. Hij had persoonlijk indertijd de lijst met *brute-force* methoden numeriek uitgerekend."

De ontdekkingen

"De echte doorbraken komen als je je even ontspant. Toen het CWI op een gegeven moment een nieuw gebouw kreeg aan de Kruislaan, liep ik altijd van station Muiderpoort naar het CWI en terug. In die wandeling terug van een kwartiertje kreeg ik vaak de beste ideeën."

"Het idee voor de Macdonald-Koornwinder-polynomen kreeg ik toen ik op bezoek was in Ivoorkust. Het land was toen al onafhankelijk maar had nog een goede relatie met Frankrijk. Ik was uitgenodigd door professor Touré, die een goed vriend was van de president van Ivoorkust en die later ook minister werd. Op mijn hotelkamer daar heb ik deze polynomen gevonden."

"Tot een andere ontdekking had ik mijzelf min of meer gedwongen. Ik nam deel aan een NATO Summer Institute in Columbus, Ohio, en ik was uitgenodigd om twee voordrachten te geven. Ik had mij ten doel gesteld om een juiste interpretatie van de Askey-Wilson polynomen op de quantumgroep quantum-SU(2) te kunnen uitleggen, maar ik had die interpretatie nog niet gevonden! Ik had dus een redelijk vage abstract van mijn voordracht ingediend. Ik kwam pas ongeveer twee weken van tevoren op het goede spoor en ben tot vlak voor de voordracht bezig geweest om alle puntjes op de i te zetten."

Sigurdur Helgason
"Koornwinder was a big expert on special functions and was very eager to explore the connection with Lie group theory. This led to a very productive collaboration and had great influence on later mathematical activity in Holland."

Referenties

Over wortelsystemen (populair):
http://www.kennislink.nl/web/show?id=167365

Over speciale functies en wortelsystemen:
http://staff.science.uva.nl/~thk/art/1998/madras.pdf

De website van Tom Koornwinder (met veel materiaal over de besproken onderwerpen, op verschillende niveaus):
http://staff.science.uva.nl/~thk/