Gert Heckman
IMAPP
Radboud Universiteit Nijmegen
g.heckman@math.ru.nl

Tom Koornwinder
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
thkmath@xs4all.nl

Eric Opdam
Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Universiteit van Amsterdam
e.m.opdam@uva.nl

In Memoriam Ian Grant Macdonald (1928–2023)

Brits wiskundige kwam graag naar Nederland om aan de representatietheorie van groepen te werken

Ian Macdonald was een Brits wiskundige, bekend van zijn bijdragen op het gebied van Lie-theorie, combinatoriek en speciale functies. Hij volgde zijn opleiding aan het Trinity College in Cambridge, waar hij in 1952 afstudeerde. In plaats van aansluitend promotieonderzoek te doen werkte hij vijf jaar lang als overheidsambtenaar, waarna de aantrekkingskracht van de wiskunde hem terugbracht naar de universiteit, met aanstellingen in Manchester, Exeter, Oxford en Londen. Hij werd in 1979 gekozen tot Fellow van de Royal Society. In 2002 ontving hij een eredoctoraat van de Universiteit van Amsterdam. In zijn dankwoord sprak hij zijn waardering uit dat hem ten langen leste toch nog de titel van doctor ten deel was gevallen. Daarnaast vertelde hij dat hij zich de afgelopen twee decennia bij tijd en wijle op wiskundig vlak meer in Nederland dan in zijn eigen vaderland thuis had gevoeld. Wij zullen in deze bijdrage eerst enkele hoogtepunten van Macdonalds werk uit de jaren zeventig bespreken. Daarna komt zijn werk vanaf midden jaren tachtig over *orthogonale polynomen geassocieerd met wortelsystemen* aan bod. Het was dit onderwerp waarin ons eigen werk nauw met dat van Macdonald was verweven met wederzijdse stimulering, dankzij brieven en gesprekken tijdens de geregelde bezoeken, die hij aan ons land bracht. Het onderstaande is daarom niet alleen een overzicht van Macdonalds werk maar geeft ook een stukje Nederlandse wiskundegeschiedenis.

De wortels van Macdonalds werk

Om iets van het werk van Macdonald te begrijpen is het nodig te weten wat een wortelsysteem is. Deze term wordt uitgelicht in het kader op de volgende pagina. De theorie van wortelsystemen en hun symmetriegroepen is een hoofdstuk in de euclidische meetkunde, dat zich goed laat begrijpen door een tweedejaarsstudent wiskunde met enige kennis van lineaire algebra en groepentheorie. De irreducibele wortelsystemen, die niet te schrijven zijn als directe som van twee kleinere, worden geclassificeerd met letters

$$A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$$

en bijbehorende Coxeter-diagrammen. Maar dankzij het werk van Claude Chevalley uit de jaren vijftig weten we dat zij ook de taal zijn van de combinatorische infrastructuur van de enkelvoudige algebraische groepen $\mathbf{G}(\mathbb{F})$ over een lichaam $\mathbb{F}$. De representatietheorie van deze groepen geeft aanleiding tot subtiele identiteiten in termen van wortelsystemen, waarmee anderzijds de representatietheorie ook berekenbaar wordt.

Dit inzicht ontstond rond 1925 in het werk van Hermann Weyl met zijn in worteltermen expliciete formule voor de irreducibele karakters van een compacte enkelvoudige Lie-groep, gerealiseerd als een compacte reële vorm van $\mathbf{G}(\mathbb{C})$. Weyl bewees zijn formule met transcendente methoden. Een algebraïsche afleiding van de karakterformule met behulp van de kwadratische *Casimir-operator* werd in 1954 door Freudenthal gevonden.

Later herhaalde zich dit in het werk van Harish-Chandra [6] uit 1958 met zijn beschrijving van de elementaire bolfuncties voor een Riemannse symmetrische ruimte $\mathbf{G}(\mathbb{R})/K$ met K een maximaal compacte ondergroep van de niet-compacte enkelvoudige reële Lie-groep $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. De elementaire bolfuncties zijn eigenfuncties van een commuterend stelsel lineaire partiële differentiaaloperatoren, en hierbij speelt ook nu de in worteltermen expliciete uitdrukking voor de kwadratische Casimir-operator een dominante rol.

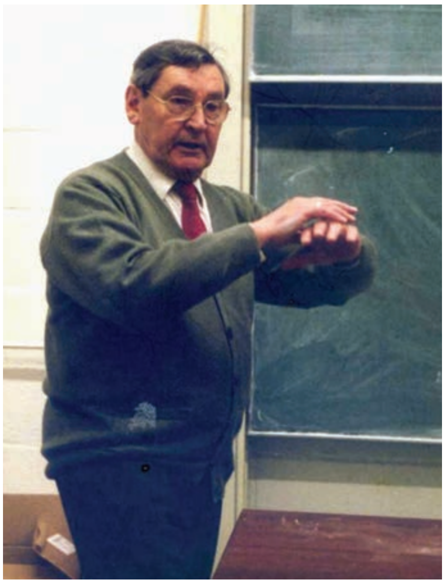
Foto: Peter van Emde Boas

Ian Macdonald leidt zijn voordracht in bij het verkrijgen van zijn eredoctoraat in 2002.

Wortelsystemen en hun Weyl-groepen
Zij V een euclidische vectorruimte van dimensie n met inwendig product $(\cdot,\cdot)$. Voor $\alpha \in V$ een niet-nulvector noteren we met

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - 2(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha)\alpha$$

de orthogonale spiegeling in V met het orthoplement van α als spiegel. Een *wortelsysteem* R in V is een eindige collectie niet-nulvectoren in V die V opspant en zo dat

$$s_\alpha(\beta) \in R \quad \text{en} \quad 2(\beta,\alpha)/(\alpha,\alpha) \in \mathbb{Z}$$

voor alle *wortels* $\alpha, \beta \in R$. Meestal wordt ook nog verlangd dat $\mathbb{Z}\alpha \cap R = \{\pm\alpha\}$ voor alle $\alpha \in R$. Zo'n R heet dan een *gereduceerd* wortelsysteem. De ondergroep W van de orthogonale groep $\mathrm{O}(V)$ voortgebracht door de spiegelingen s_α voor $\alpha \in R$ heet de *Weyl-groep* van R.

Belangrijke resultaten van Macdonald
In deze wereld heeft Macdonald essentiële resultaten geboekt, waarvan wij in chronologische volgorde een drieluik presenteren.

Als eerste werd het p-adisch analogon voor de elementaire bolfuncties op $\mathbf{G}(\mathbb{Q}_p)/\mathbf{G}(\mathbb{Z}_p)$ aangekondigd door Macdonald [15] in 1968. Zijn uitwerking [16] hiervan is gebaseerd op voordrachten op het Ramanujan Institute in Madras in 1970 en is zeer toegankelijk geschreven. Dit boek was exclusief en gratis verkrijgbaar door een brief naar de auteur te sturen. In zekere zin is het p-adische geval eenvoudiger, omdat de elementaire bolfuncties worden gegeven door een expliciete formule (voor $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_n$ in termen van Hall–Littlewood-polynomen [20, §V.3]), terwijl dit in de regel niet zo is in het reële geval van Harish-Chandra. Macdonalds expliciete formule was een van de ingrediënten voor Robert Langlands voor het formuleren van zijn vermoedens [12, p. 39].

Om het tweede resultaat te begrijpen zeggen we eerst wat over de *karakterformule van Weyl*. Deze geeft de waarde van het karakter op een maximale torus als quotiënt van twee Fourier-polynomen, die beide scheefsymmetrisch zijn voor de Weyl-groep W. De uitdrukking in de teller bevat een parameter λ — het *hoogste gewicht* van Élie Cartan — die de irreducibele representatie karakteriseert. In de noemer staat dezelfde uitdrukking met $\lambda = 0$ gesubstitueerd, en deze wordt de *Weyl-noemer* genoemd.

De *Weyl-noemerformule* herschrijft de Weyl-noemer als een product over de *positieve* wortels $\alpha > 0$, dat wil zeggen de wortels die aan een kant van een vast gekozen generieke lineaire deelruimte van V van codimensie 1 liggen. In deze formule van de vorm $\Sigma = \Pi$ staan in de uitwerking van het product termen met plus en min die tegen elkaar wegvallen, waardoor er in de som minder termen overblijven dan aanvankelijk gedacht. Macdonald realiseerde zich dat een zelfde verschijnsel voorkomt bij *Jacobi's tripelproductidentiteit*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} (-1)^m q^{m(m-1)/2} z^m = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)(1-q^n z^{-1})(1-q^{n-1}z).$$

Dit is een klassieke formule in termen van θ-functies waarin q, z complexe variabelen zijn (met $z \neq 0$ en $|q| < 1$) en hij herkende hierin de structuur van het affiene wortelsysteem van type $\tilde{A}_1$. Vervolgens vond hij analoge identiteiten voor alle andere affiene wortelsystemen [17]. Via specialisatie vond hij ook eenvoudige somformules voor η^d met *Dedekinds èta-functie* gegeven door

$$\eta = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)$$

en d de dimensie van een compacte, enkelvoudige Lie-groep. De theoretisch fysicus Freeman Dyson had voor enkele waarden van d die identiteit ook gevonden. In een belangwekkend artikel [5] betreurde hij zijn gemiste kans, omdat de fysicus Dyson en de mathematicus Dyson niet met elkaar gesproken hadden. Alternatieve bewijzen van de Macdonald-identiteiten werden later gegeven door Victor Kac [8] en Eduard Looijenga [14].

Ten slotte had Macdonald een speciale voorliefde voor de algemene lineaire groep $\mathbf{GL}_n$ en de symmetrische groep S_n, de 'All-embracing Majesties' van respectievelijk de lineaire algebraïsche en de eindige groepen, zoals Weyl ze wel liefkozend noemde. De representatietheorie heeft hier een sterk combinatorische inslag, met methoden die weliswaar elementair maar niet altijd eenvoudig zijn. Eind jaren zeventig schreef hij er zijn invloedrijke boek *Symmetric Functions and Hall Polynomials* [20] over, met een sterk uitgebreide tweede editie in 1995. Voor dit werk ontving hij in 2009 de Leroy P. Steele Prize for Mathematical Exposition.

Macdonalds contact met de Lage Landen
Het zal rond 1984 geweest zijn dat Macdonald te gast was bij zijn goede vriend Tonny Springer in Utrecht, en bij het stafcolloquium een voordracht hield over zijn constantetermvermoedens [18]. Noteren we de Weyl-noemer als

$$\Delta = \prod_{\alpha>0} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}),$$

dan zegt het *constantetermvermoeden* dat

$$\mathrm{CT}(\Delta^{2k}) = \prod_{j=1}^{n} \binom{kd_j}{k}$$

voor alle $k \in \mathbb{N}$. Hierbij staat CT voor de constante term van het betreffende Fourier-polynoom, en $d_1, \cdots, d_n$ zijn de graden van de fundamentele invarianten van de Weyl-groep van het betreffende wortelsysteem R van rang n. Voor de klassieke reeksen A_n, B_n, C_n, D_n was deze formule bekend dankzij werk van Selberg, Dyson en Good. Maar voor de exceptionele wortelsystemen E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 was het nog een open vraag.

In de jaren 1985–87 werkten Gert Heckman en Eric Opdam een theorie van multivariabele hypergeometrische functies uit, die voor speciale waarden van de bovengenoemde parameter k met de bolfuncties van Harish-Chandra samenvielen. Bij hun werk ging het onder meer om de existentie van een stelsel commuterende differentiaaloperatoren, die de gezochte functies als eigenfuncties hadden, dus om een natuurlijke deformatie in k van de commutatieve algebra gevonden door Harish-Chandra. Voor symmetrische ruimten van rang 1, waaronder bijvoorbeeld hyperbolische ruimten, zijn de bolfuncties inderdaad Gaussische hypergeometrische functies (in het compacte geval Jacobi-polynomen), zoals al bij Harish-Chandra stond te lezen. Voor wortelsystemen BC_2 en A_2 had Tom Koornwinder [9], als onderdeel van zijn proefschrift uit 1975, de commuterende differentiaaloperatoren en bijbehorende polynomiale eigenfuncties reeds gegeven.

Ook voor algemene rang waren deze zaken voor wortelsystemen van type A (Jack-polynomen) en BC inmiddels behandeld, met expliciete uitdrukkingen voor de commuterende differentiaaloperatoren (Sekiguchi, Debiard). Maar het ging Heckman en Opdam nu om een uniforme aanpak voor alle wortelsystemen zonder noodzakelijkerwijs expliciete uitdrukkingen.

In het slothoofdstuk [24] van zijn in januari 1988 verdedigde proefschrift lukte het Opdam met analytische methoden de existentie van dit hypergeometrisch stelsel voor algemene wortelsystemen te bewijzen. Dit gaf tegelijk ook de volledige orthogonaliteit van *Jacobi-polynomen geassocieerd met wortelsystemen*. In een verrassende wending liet Opdam korte tijd later zien dat de resultaten uit zijn proefschrift toegepast konden worden om het constantetermvermoeden voor algemene wortelsystemen te bewijzen [25].

Ondertussen had Macdonald in 1987 handgeschreven manuscripten rondgestuurd die de polynomen beschreven welke we nu als Macdonald-polynomen kennen. Zijn eerste manuscript behandelde een klasse van symmetrische polynomen met twee parameters q en t. Deze extrapoleerden zowel de Jack-polynomen als de Hall–Littlewood-polynomen door toevoeging van een q-parameter. Ook gaf hij een expliciet stelsel van commuterende differentie-operatoren waarvan zijn polynomen eigenfuncties waren. In hetzelfde jaar en onafhankelijk had Simon Ruijsenaars [27] dit expliciete stelsel gegeven. In 1988 bewees Koornwinder [10], [20, §VI.6] een zogenaamde *Pieri-formule* voor Macdonalds nieuwe klasse van polynomen door te bewijzen dat er een dualiteit bestaat tussen de variabele en spectrale parameters. Dit was geïnspireerd door zo'n eigenschap van de continue q-ultrasferische polynomen (waarin Macdonalds polynomen in het geval van twee variabelen worden uitgedrukt). Koornwinder was daar goed mee bekend door het werk van zijn leermeester Dick Askey [1]. Macdonald behandelt genoemde klasse van symmetrische polynomen uitgebreid in [20, Chapter VI].

De volgende twee manuscripten van Macdonald uit 1987 betroffen q-analoga van Jacobi-polynomen geassocieerd met wortelsystemen — het directe q-analogon dus van de polynomen van Heckman en Opdam uit diezelfde tijd, die door een limiet $q \to 1$ uit Macdonalds polynomen te verkrijgen zijn. Voor wortelsysteem van type A zijn deze polynomen bevat in Macdonalds klasse van symmetrische functies, dus dit zal hem zeker gemotiveerd hebben. Wellicht is het werk van Heckman en Opdam, waarvan hij tijdens een aantal bezoeken aan Leiden in 1987 en 1988 (als spreker en als opponent bij Opdams promotie) direct hoorde, ook een motivatie geweest. De extra q-vrijheid stelde Macdonald in staat om de orthogonaliteit van zijn q-polynomen elementair te bewijzen, en daarmee volgde het resultaat ook in de limiet voor $q \to 1$. Macdonald gaf voor zijn geval ook vermoedens voor norm en evaluatie in het eenheidselement van de polynomen. In het limietgeval geven die zijn door Opdam bewezen oudere vermoedens. In 1988 bundelde Macdonald de twee manuscripten tot een manuscript [19] en vermeldde er ook Opdams proefschrift en bewijs van het constantetermvermoeden. Zijn polynomen staan nu bekend als *Macdonald-polynomen geassocieerd met wortelsystemen*.

Wat er verder uit voortvloeide

In het voorjaar van 1989 gaf Heckman [7] een torische uitbreiding van het werk van Charles Dunkl [4] (zijn *Dunkl-operatoren*), en daarmee zowel een elementaire constructie van de hypergeometrische differentiaaloperatoren die Opdam [24] langs transcendente weg had geconstrueerd, als ook een elementair bewijs van de orthogonaliteit van hun polynomiale eigenfuncties, én van hun norm en evaluatie in de eenheid. Er rees de vraag naar een q-differentieconstructie voor het geval van Macdonald. Die werd al snel beantwoord.

In het najaar viel in Berlijn de muur en in de zomer van het volgende jaar waren er rond het ICM in Kyoto vele Russen, waaronder Ivan Cherednik. Enkele jaren later waren alle vermoedens van Macdonald door Cherednik in stellingen omgezet [2]. Ivan was niet altijd makkelijk te lezen, maar behulpzame auteurs als Opdam [26] en Macdonald [22] hielpen ons begrijpen. Het sleutelwoord was *Hecke-algebra*: allereerst de affiene Hecke-algebra van Iwahori en Matsumoto uit de p-adische wereld, de gedegenereerde Hecke-algebra van Drinfeld [3], en voor de dualiteit tussen variabele en spectrale parameter de *dubbele affiene Hecke-algebra* van Cherednik. De commuterende gegeneraliseerde Dunkl-operatoren hadden *niet-symmetrische* (niet W-invariante) Macdonald-polynomen als eigenfuncties en deze werden onder de symmetrisatie-afbeelding op de symmetrische (W-invariante) Macdonald-polynomen geprojecteerd.

Een andere nieuwe ontwikkeling [11] betreft wat nu bekend staat als *Koornwinder–Macdonald-polynomen*. Dat begon tijdens een werkbezoek van Tom Koornwinder

Foto: Peter van Emde Boas

De erepromotie van Macdonald in de Oude Lutherse Kerk in Amsterdam op 8 januari 2002. Aan het spreekgestoelte Eric Opdam en geheel rechts Gerrit van Dijk.

Foto: Margrit Rösler en Michael Voit

Greta en Ian Macdonald (links) in Amsterdam tijdens een workshop over speciale functies ter gelegenheid van Tom Koornwinders (midden, met rugzak) 60ste verjaardag in 2003.

aan Ivoorkust in december 1987. [Zie ook het interview met Tom Koornwinder elders in dit nummer, red.] Hij vond daar een significante uitbreiding met twee parameters van de 3-parameterfamilie van Macdonald-polynomen geassocieerd met het niet-gereduceerde wortelsysteem van type BC_n (waarbij q nu niet meer als parameter wordt opgevat). Dit was tegelijk ook een uitbreiding tot n variabelen van de 4-parameterfamilie van Askey–Wilson-polynomen [1] in één variabele. Ook voor dit geval formuleerde Macdonald vermoedens en deze konden weer met Hecke-algebramethoden bewezen worden [22, 28].

In de net beschreven periode vanaf circa 1985 deden ook de *quantumgroepen* hun intrede. Geleidelijk werd duidelijk dat $q =$ quantum: Macdonald-polynomen en (in mindere mate) Koornwinders uitbreiding daarvan leven voor speciale parameterwaarden als bolfuncties op quantumgroepen [13, 23].

De auteurs van dit artikel hebben, elk vanuit zijn eigen perspectief, de hier beschreven periode als enorm fascinerend ervaren. Allerlei ontwikkelingen, voortgekomen uit heel verschillende motivaties, bleken in elkaar te grijpen.

Foto: Margrit Rösler en Michael Voit

Macdonald tijdens de Amsterdamse grachtenboottocht bij de genoemde workshop in 2003. Naast hem Suzanne Faraut.

Macdonald als persoon

Tot slot nog iets meer over Ian Macdonald als persoon en wiskundige. Hij was een zeer begaafd spreker. Tijdens zijn Bourbaki-voordracht midden jaren negentig [21] zat een van ons naast Jim Arthur, een expert in het *Langlands-programma*. Na afloop was deze even stil en zei toen: "What an outstanding expositor." Wij voelden ons inderdaad bevoorrecht dat Macdonald zo geregeld in Nederland was om zijn inzichten met ons te delen.

Ian werd daarbij doorgaans vergezeld van zijn Belgische echtgenote Greta. Ian had geen rijbewijs, dus zij chauffeerde en hij las kaart. Tijdens een voordracht begin jaren negentig begon Ian aldus:

> "If you have a mathematical problem, there are four things you can do:
> 1. Prove it. 2. Disprove it. 3. Generalize it.
> 4. Forget about it."

Iedereen moest lachen, maar hij was natuurlijk ook gewoon serieus. Als je opties 1 en 2 goed hebt overdacht, dan kun je voordat je er de brui aan geeft altijd nog optie 3 overwegen. Alsof hij zich haast een beetje verontschuldigde dat hij alweer optie 3 ging bewandelen. Steeds bleken zijn generalisaties correcte vermoedens te zijn, en hij was daarmee een stimulans voor anderen.

Ian was ontegenzeggelijk een wiskundige met een zeer klassieke inslag. Tijdens zijn opleiding in Cambridge moet de geest van Hardy en Ramanujan nog hebben rondgewaard. Ian had een zeer uitzonderlijke begaafdheid voor formules, maar terugkijkend op zijn werk zijn al die formules erop gericht de representatietheorie van de enkelvoudige algebraïsche groepen (over een lichaam of ring) beter te begrijpen.

Referenties

1 R. Askey en J. Wilson, Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials, *Memoirs Amer. Math. Soc.* 319 (1985).

2 I. Cherednik, Double affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures, *Ann. Math. (2)* 141 (1995), 191–216.

3 V.G. Drinfeld, Degenerate affine Hecke algebras and Yangians, *Funct. Anal. Appl.* 20 (1986), 58–60.

4 C.F. Dunkl, Differential-difference operators associated to reflection groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 311 (1989), 167–183.

5 F.J. Dyson, Missed opportunities, *Bull. Amer. Math. Soc.* 78 (1972), 635–652.

6 Harish-Chandra, Spherical functions on a semisimple Lie group I, *Amer. J. Math.* 80 (1958), 241–310.

7 G.J. Heckman, An elementary approach to the hypergeometric shift operators of Opdam, *Invent. Math.* 103 (1991), 341–350.

8 V.G. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras and Dedekind's η-function, *Funct. Anal. Appl.* 8 (1974), 68–70.

9 T.H. Koornwinder, Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators, I, II and III, IV, *Indag. Math.* 36 (1974), 48–66, 357–381.

10 T.H. Koornwinder, Self-duality for q-ultraspherical polynomials associated with the root system A_n, (1988), ongepubliceerd.

11 T.H. Koornwinder, Askey–Wilson polynomials for root systems of type BC, *Contemp. Math.* 138 (1992), 189–204.

12 R.P. Langlands, Problems in the theory of automorphic forms, in *Lectures in Modern Analysis and Applications, III*, Lecture Notes in Math. 170, Springer, 1970, pp. 18–86.

13 G. Letzter, Quantum zonal spherical functions and Macdonald polynomials, *Adv. Math.* 189 (2004), 88–147.

14 E. Looijenga, Root systems and elliptic curves, *Invent. Math.* 38 (1976), 17–32.

15 I.G. Macdonald, Spherical functions on a p-adic Chevalley group, *Bull. Amer. Math. Soc.* 74 (1968), 520–525.

16 I.G. Macdonald, *Spherical Functions on a Group of p-adic Type*, Ramanujan Institute for Advanced Study in Mathematics, Madras, 1971.

17 I.G. Macdonald, Affine root systems and Dedekind's η-function, *Invent. Math.* 15 (1972), 91–143.

18 I.G. Macdonald, Some conjectures for root systems, *SIAM J. Math. Anal.* 13 (1982), 988–1007.

19 I.G. Macdonald, Orthogonal polynomials associated with root systems (1988), aanvankelijk ongepubliceerd, later verschenen in *Sém. Lothar. Combin.* 45 (2000), B45a.

20 I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Clarendon Press, 1995, Second Edition.

21 I.G. Macdonald, Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials, *Astérisque* 237 (1996), 189–207.

22 I.G. Macdonald, *Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials*, Cambridge University Press, 2003.

23 M. Noumi, M.S. Dijkhuizen and T. Sugitani, Multivariable Askey–Wilson polynomials and quantum complex Grassmannians, in *Special Functions, q-Series and Related Topics*, Fields Institute Communications 14, Amer. Math. Soc., 1997, pp. 167–177.

24 E.M. Opdam, Root systems and hypergeometric functions IV, *Compositio Math.* 67 (1988), 191–209.

25 E.M. Opdam, Some applications of hypergeometric shift operators, *Invent. Math.* 98 (1989), 1–18.

26 E.M. Opdam, Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras, *Acta Math.* 175 (1995), 75–121.

27 S.N.M. Ruijsenaars, Complete integrability of relativistic Calogero–Moser systems and elliptic function identities, *Comm. Math. Phys.* 110 (1987), 191–213.

28 S. Sahi, Nonsymmetric Koornwinder polynomials and duality, *Ann. Math. (2)* 150 (1999), 267–282.