Over een Oefening van Van der Waerden.

Aufgabe 2 in §168 von Van der Waerdens *Algebra II* läutet: Man führe den Beweis von E_4 durch. — Solches ist aber leider unmöglich.

Voorbeeld. $\mathbf{Q} = \langle \mathbb{Q}, + \rangle$ met de euclidische topologie is een topologische groep. Laat $\mathfrak{U}$ het omgevingsfilter zijn van 0, en $U = (-1, 1)$. Dan is er geen omgeving V van 0 zo dat $\hat{V} \subseteq \mathfrak{U} + \hat{U} - \mathfrak{U}$. Want onvermijdelijk $\mathfrak{E} \in \hat{V}$; maar geen enkel element van $\mathfrak{U} + \hat{U} - \mathfrak{U}$ bevat een eindige verzameling.

Het voorbeeld laat zien dat Van der Waerdens benadering van het completeringsprobleem niet zozeer lastig is — Van der Waerdens betoog loopt om via topologische halfgroepen — als wel ondeugdelijk. Er zijn twee oplossingsrichtingen. De ene dwingt af dat filters kleine verzamelingen bevatten door zich te beperken tot ultrafilters; dit is de route van Bourbaki. De omgekeerde aanpak: Cauchyfilters die kleine verzamelingen bevatten buiten beschouwing laten, werkt ook. Laat $\mathfrak{E}_0$ het omgevingsfilter zijn van e. Men bewijst eenvoudig dat $\mathfrak{E}_0^{-1} = \mathfrak{E}_0$ en $\mathfrak{E}_0\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}_0$. Noemen we nu een Cauchy-filter $\mathfrak{A}$ *grof* als er een Cauchy-filter $\mathfrak{B}$ bestaat zo dat $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{E}_0$. De grove Cauchyfilters vormen een groep; met een voor de hand liggende topologisering is die groep volledig, en de oorspronkelijke groep ligt er dicht in ingebed.