Dr. J. van Mill

Over het verschuiven van problemen naar het oneindige door middel van kleine bewegingen.

REDE *uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van persoonlijk hoogleraar in de zuivere wiskunde in het bijzonder de topologie aan de faculteit der wiskunde en natuurwetenschappen/subfaculteit der wiskunde en informatica van de Vrije Universiteit te Amsterdam op 24 april 1986.*

Dr. J. van Mill

Over het verschuiven van problemen naar het oneindige door middel van kleine bewegingen.

Mijnheer de Rector,

Dames en Heren,

In deze rede, waarmee ik mijn ambt aanvaard, zal ik het hebben over iets dat in het normale leven een veelvuldig gebruikt mechanisme is, namelijk, het ontlopen van moeilijkheden. Diepe denkers zijn van mening dat dit mechanisme essentieel is voor het welzijn van iedere mens, dus ook voor het welzijn van een nieuw benoemde hoogleraar in de wiskunde. Het feit dat mijn ambtsaanvaarding enkele jaren na mijn benoeming plaatsvindt duidt hier al op en het is dan ook te danken aan een zeer overredende figuur binnen de Subfaculteit Wiskunde en Informatica van de Vrije Universiteit dat ik nu voor U sta en het probleem van de oratie niet naar het oneindige verschoven heb.
Vanmiddag zullen wij hopelijk zien dat de zojuist genoemde diepe denkers het soms bij het goede eind hebben: in de wiskunde kunnen we moeilijkheden van een bepaalde soort oplossen door ze oneindig vaak uit de weg te gaan. Door deze vreemde gang van zaken is het mogelijk het onmogelijke waar te laten worden en een onversaagd dienaar van de wetenschap te zijn.
Aan het voorafgaande merkt U vermoedelijk al dat er een verschil is tussen de dagelijkse en de wiskundige wereld. Wij, gewone stervelingen, kunnen moeilijkheden slechts een eindig aantal malen uit de weg gaan: op zeker moment gaan we er aan ten onder, lossen we ze op, leren we er mee te leven zoals dat zo mooi heet, of veranderen we de werkelijkheid. Het achteloos uitgesproken zinnetje: 'In de wiskunde kunnen we moeilijkheden van een bepaalde soort oplossen door ze oneindig vaak uit de weg te gaan', duidt er op dat in de wiskundige wereld soms een grotere vrijheid bestaat dan in het dagelijks leven. Deze vrijheid bestaat er niet in dat het mogelijk is de werkelijkheid te veranderen maar stelt de wiskundige soms in staat zijn leefwereld zo te kiezen dat binnen redelijke grenzen de verschijnselen zijn zoals hij dat wil. In het extreme komen we dit tegen bij de moderne verzamelingenleer. Daar is het normaal zich op hetzelfde moment binnen verschillende wiskundige werelden te bevinden, de zogenaamde modellen, en vanuit de ene wereld een andere te creëren waarbinnen een bepaald verschijnsel zich wel of niet voordoet.(1) Het is nu niet het juiste moment daar verder op door te gaan. Wij stellen ons ten doel een wiskundige wereld van meetkundige aard te construeren waarbinnen het mogelijk is bepaalde moeilijkheden te ontlopen en die ons bovendien in staat stelt om zinnige uitspraken over de 'normale' wereld te doen. In de wetenschap is zo'n procedure niet ongewoon. De speciale relativiteitstheorie van Einstein kan het beste worden geformuleerd door aan de driedimensionale euclidische ruimte een nieuwe coördinaatrichting toe

te voegen, de zogenaamde tijdas, en de problemen binnen de daardoor ontstane vierdimensionale euclidische ruimte op te lossen. Hierdoor kunnen verschijnselen uit de normale fysische werkelijkheid verklaard worden die voordien onbegrijpelijk waren. Ook dichter bij huis zijn er dergelijke voorbeelden te vinden. Ik doceer met veel plezier aan eerstejaars studenten het vak Lineaire Algebra. De belangrijkste stelling uit mijn college is de volgende:

Iedere reële symmetrische n x n - matrix heeft een reële eigenwaarde.

Deze stelling heeft zeer belangrijke toepassingen: er kan bijvoorbeeld mee bewezen worden dat elke kegelsnede op hoofdassen gebracht kan worden, en ook dat bij ieder aantal waarnemingen een lijn bestaat die het 'beste' bij die waarnemingen aansluit, een zogenaamde regressielijn. Het bewijs van de stelling is indirect. Het lichaam van de reële getallen wordt uitgebreid tot het lichaam van de complexe getallen - wereldvergroting - en een bepaalde vergelijking wordt door het aanroepen van de hoofdstelling van de algebra binnen die nieuwe wereld opgelost. Van de oplossing van de vergelijking wordt tenslotte aangetoond dat deze toch eigenlijk tot de 'oude' wereld van de reële getallen behoort en zo is bewezen dat de vergelijking binnen het lichaam van de reële getallen oplosbaar is.[2]
Ik heb vanmiddag de opgave U iets van mijn wiskundige wereld te laten zien. Niet alles zal helder, duidelijk, en op het eerste horen begrijpelijk zijn; mocht U echter door mijn rede gegrepen worden en mocht in U de behoefte ontstaan meer van dit alles te weten te komen dan raad ik U aan zich als student wiskunde aan deze universiteit te laten inschrijven. Ik verzeker U dat U later deze daad als één van de meest opwindende uit Uw leven zult beschouwen.
Laten we nu een rechte lijn bekijken, voor het gemak de reële rechte $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$

Figuur 1.

Deze lijn is in de ogen van vele wiskundigen een eenvoudig object. Toch doen zich al snel merkwaardige verschijnselen voor. Bezie de volgende oneindige sommen:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1081} + \dots\dots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1024} + \dots\dots$$

Enige eenvoudige berekeningen laten het volgende zien:

$$1 = 1$$

$$1 + \frac{1}{2} = 1{,}5$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1{,}833333$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 2{,}083333$$

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{8} = 2{,}717857$$

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{1081} = 7{,}563320$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0{,}75$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0{,}875$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0{,}9375$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots + \frac{1}{512} = 0{,}9980468$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{1024} = 0{,}9990233$$

$$\vdots$$

Het is duidelijk dat de eindige sommen steeds groter worden, terwijl de 'stapjes' die we nemen gedurig kleiner worden. Maar de opeenvolgende 'stapjes' bij de tweede reeks zijn aanzienlijk kleiner dan die bij de eerste.

Het is gemakkelijk te bewijzen dat bij de eerste reeks het oneindige bereikt wordt, dat wil zeggen:

voor ieder reëel getal r bestaat een n zodat $\mathbf{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}$ **groter is dan r.**

Voor de tweede reeks kan daarentegen afgeleid worden dat geen enkele eindige som groter is dan **1**, terwijl **1** toch steeds dichter benaderd wordt, dat wil zeggen:

voor ieder getal r tussen 0 en 1 bestaat een n zodat voor elke m groter dan n geldt dat $\mathbf{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + (\frac{1}{2})^m}$ **kleiner is dan 1 maar groter dan 1 - r.**

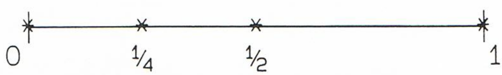
We concluderen dat de eerste van de oneindige sommen

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1081} + \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{1024} + \ldots\ldots$$

niet bestaat terwijl de tweede gelijk is aan **1**; de wiskundige noemt de eerste een *divergente reeks* terwijl de tweede *convergent* heet. Het feit dat divergente reeksen bestaan is zo onaangenaam dat het de bekende wiskundige Abel verleid heeft tot de volgende uitspraak: *Divergente reeksen zijn het werk van de duivel* (Abel, 1825).[3]

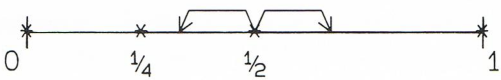
Deze opmerkingen benadrukken dat de uitkomst van een oneindig proces afhangt van de grootte van de successievelijk uitgevoerde stappen. Als we niet in het oneindige willen verzanden zullen we er zorg voor moeten dragen dat bij een oneindig proces de afzonderlijke stappen klein genoeg zijn.
Bezie nu de verzameling van punten in **IR** die tussen **0** en **1** liggen, inclusief de punten **0** en **1** zelf. We noemen dit het interval van **0** tot **1**.



Figuur 2.

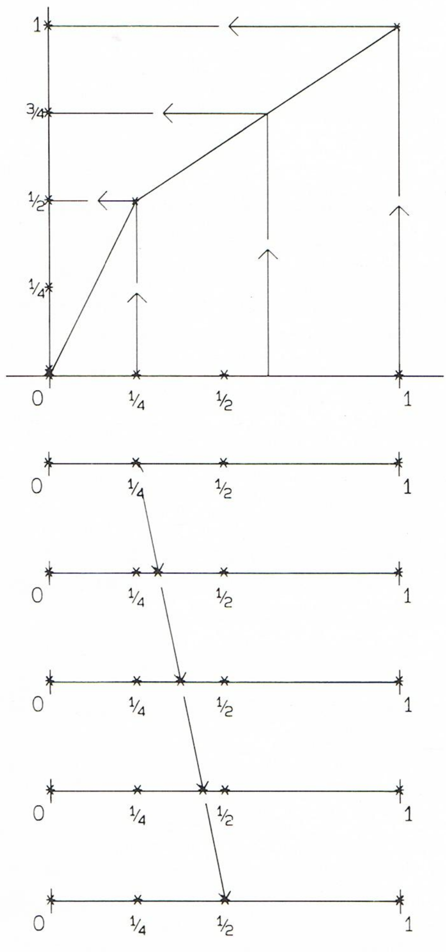
Notatie: [0,1].

Een element van het interval **[0,1]** heeft weinig bewegingsvrijheid: het kan zich slechts naar links of naar rechts bewegen en daarmee uit.



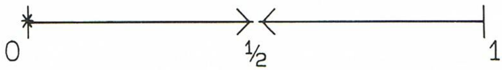
Figuur 3.

Het is gemakkelijk in te zien dat het punt ¼ over te voeren is in het punt ½ door een vloeiende beweging die het interval op zichzelf overvoert en die bovendien de structuur van het geheel niet al te zeer wijzigt; een voorbeeld van zo'n beweging wordt in Figuur 4 gesuggereerd.



Figuur 4.

Het interval van **0** tot ¼ wordt uitgerekt tot het interval van **0** tot ½ en het interval van ¼ tot **1** ingekrompen tot het interval van ½ tot **1**. De gesuggereerde beweging wordt in de wiskunde een *homeomorfisme* genoemd en de punten ¼ en ½ heten *topologisch equivalent binnen* **[0,1]**. Als het punt ½ uit het interval **[0,1]** wordt weggelaten dan bestaat het restant uit twee losse stukjes

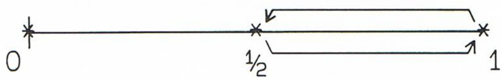


Figuur 5.

terwijl dat door weglating van het punt **1** niet het geval is.

Figuur 6.

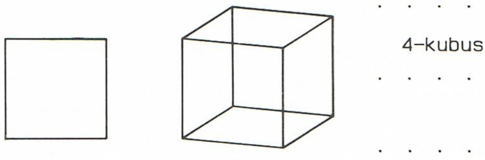
De punten **1** en ½ blijken zich binnen het interval **[0,1]** verschillend te gedragen. Daarom is het niet mogelijk het punt **1** over te voeren in het punt ½ door een homeomorfisme, dat wil zeggen, ze zijn *niet topologisch equivalent binnen* **[0,1]**. Het is natuurlijk wèl mogelijk de punten **1** en ½ botweg te verwisselen.



Figuur 7.

Deze beweging voert het interval **[0,1]** in zichzelf over, maar is niet vloeiend en wordt daarom afgekeurd; het punt **1** wordt door de verplaatsing ruwweg losgetrokken en dat geldt ook voor ½.

Bij het vierkant, de 3-kubus, de 4-kubus, ..., de 1081-kubus, etc., doet zich hetzelfde verschijnsel voor.



Figuur 8.

Deze objecten hebben elk een rand en een inwendige en geen enkel randpunt is topologisch equivalent met een inwendig punt. Hoewel dit intuïtief duidelijk is valt het niet mee het streng te bewijzen.
In 1906 introduceerde de wiskundige D. Hilbert de zogenaamde *fundamentaalkubus* I^{∞}.[4] Deze kubus bestaat uit alle oneindige rijtjes

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\ldots),$$

waarbij iedere $\mathbf{x}_i$ element is van $[0,1]$. De fundamentaalkubus I^{∞} heeft oneindig veel *coördinaatrichtingen* en we zeggen dat $\mathbf{x}_i$ de **i-de** coördinaat is van het punt **x**. Als **x** en **y** twee punten zijn uit $\mathbf{I}^{\infty}$ dan wordt hun afstand **d(x,y)** gegeven door:

$$(1)\ \mathbf{d}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}|x_1 - y_1| + \frac{1}{4}|x_2 - y_2| + \ldots + \frac{1}{2^n}|x_n - y_n| + \ldots\ldots,$$

waarbij $|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i|$ de afstand is van de punten $\mathbf{x}_i$ en $\mathbf{y}_i$. Omdat de reeks '$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$' convergeert en de punten $\mathbf{x}_i$ en $\mathbf{y}_i$ tot het interval $[0,1]$ behoren, is de uitdrukking (1) goed gedefinieerd.
De fundamentaalkubus blijkt een generalisatie te zijn van het interval $[0,1]$, het vierkant, de 3-kubus, ..., de 1081-kubus, etc., en heeft veel eigenschappen met deze objecten gemeen. Ook heeft $\mathbf{I}^{\infty}$ een *inwendige* en een *rand;* het inwendige bestaat uit alle oneindige rijtjes $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots)$ met de eigenschap dat geen enkele $\mathbf{x}_i$ gelijk is aan **0** of **1** en de rand is uiteraard het complement van het inwendige. Van de punten

$$\mathbf{u} = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \ldots\ldots) \text{ en } \mathbf{v} = (1,1,1,\ldots\ldots)$$

behoort het eerste tot het inwendige en het tweede tot de rand van $\mathbf{I}^{\infty}$. Gezien de bovenstaande opmerkingen lijkt het voor de hand te liggen dat de punten u en v niet topologisch equivalent zijn binnen $\mathbf{I}^{\infty}$. In **1936** bewees de wiskundige O.H. Keller echter de verrassende stelling dat *alle* punten van $\mathbf{I}^\infty$ topologisch equivalent zijn, dus ook **u** en **v**.[5] Het belang van dit resultaat werd pas in 1966 onderkend door R.D. Anderson.[6] Ik zal U nu een zeer ruwe en onvolledige schets geven van het bewijs dat **u** en **v** topologisch equivalent zijn. De technische details zal ik U zoveel mogelijk besparen; mijn verdere betoog zal toegespitst zijn op de essentie van het bewijs.

De strategie die we volgen is deze: stap voor stap veranderen we iedere coördinaat van **v** in ½. In de eerste stap wordt de eerste coördinaat 'behandeld', in de tweede stap de tweede, etc. Dat wil zeggen,

stap 1: (1,1,1,......) wordt overgevoerd in (½,1,1,......),
stap 2: (½,1,1,......) wordt overgevoerd in (½,½,1,......),

.

.

.

stap n:
$$(\underbrace{\tfrac12,\tfrac12,\ldots,\tfrac12}_{\mathbf{n-1}},1,1,1,\ldots\ldots) \text{ wordt overgevoerd in } (\underbrace{\tfrac12,\tfrac12,\ldots,\tfrac12}_{\mathbf{n}},1,1,1,\ldots\ldots),$$

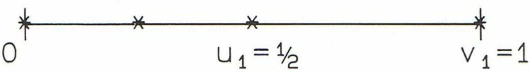
.

.

.

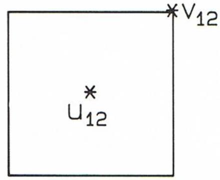
Aan het einde van dit proces is iedere coördinaat van **v** veranderd in ½, dus is **v** overgevoerd in **u**.

We zullen nu stap 1 beschrijven. Het ligt voor de hand alle coördinaatrichtingen van $\mathbf{I}^\infty$ even te vergeten, behalve de eerste.



Figuur 9.

We hebben opgemerkt dat de punten **1** en ½ niet topologisch equivalent zijn binnen **[0,1]**. De eerste stap van ons proces kan zich daardoor niet uitsluitend binnen de wereld van de eerste coördinaatrichting van $\mathbf{I}^\infty$ afspelen. Door wereldvergroting proberen we de opgetreden moeilijkheid te ontlopen. Laat ons daartoe alle coördinaatrichtingen van $\mathbf{I}^\infty$ vergeten, behalve de eerste twee.

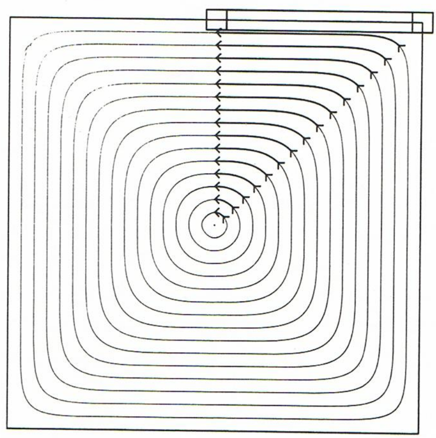


$$\mathbf{v}_{12} = (1,1)$$

$$\mathbf{u}_{12} = (½,½)$$

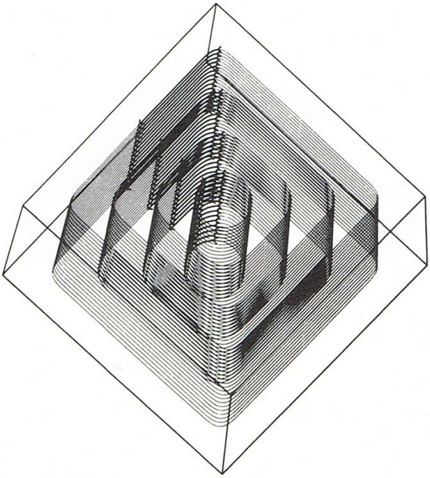
Figuur 10.

Dit lost schijnbaar niets op omdat de punten $\mathbf{u}_{12}$ en $\mathbf{v}_{12}$ niet topologisch equivalent zijn binnen het vierkant: het punt $\mathbf{v}_{12}$ kan niet worden 'losgemaakt' van de rand. Door een simpele draaiing van het vierkant is het wèl mogelijk het punt $\mathbf{v}_{12}$ over te voeren in een ander punt dat in de eerste coördinaatrichting gelijk is aan ½.



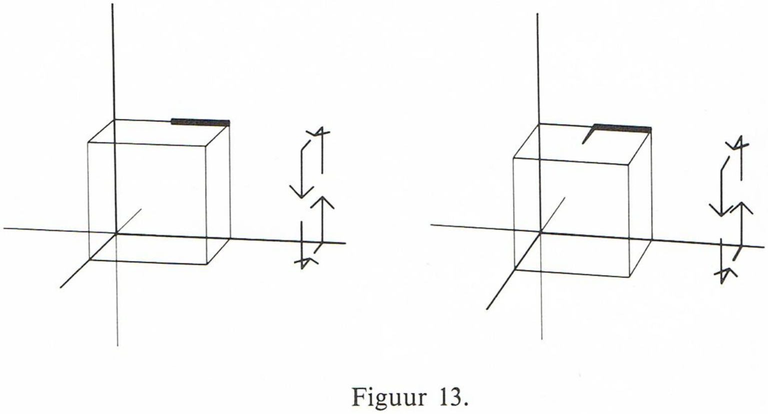
Figuur 11.

Deze actie in de eerste twee coördinaatrichtingen van $\mathbf{I}^\infty$ induceert een actie op geheel $\mathbf{I}^\infty$ die er ongeveer als volgt uit ziet:



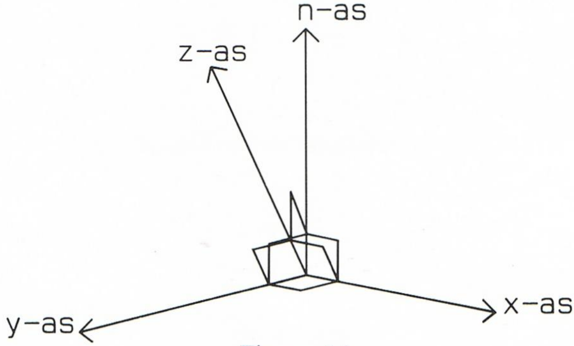
Figuur 12.

Deze beweging voert het punt **(1,1,1,......)** vloeiend over in het punt **(½,1,1,......)** en dat is precies wat we wilden in stap 1. Door gebruik te maken van de tweede coördinaatrichting van $\mathbf{I}^\infty$, die we immers tot onze beschikking hebben, wordt het probleem dat **[0,1]** een rand zowel als een inwendige heeft ontlopen. Een zelfde probleem doet zich ook in de tweede coördinaatrichting voor en om het nogmaals te kunnen ontlopen, betrekken we ook de derde coördinaatrichting van $\mathbf{I}^\infty$ in de beschouwingen.



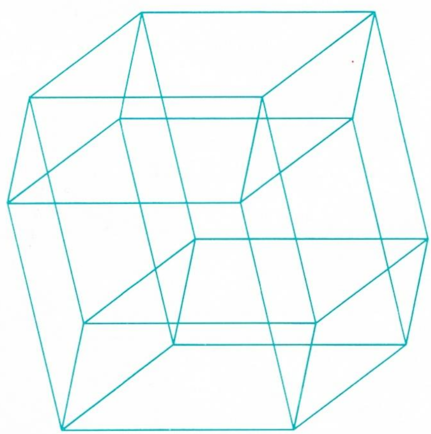
Figuur 13.

Door een simpele draaiing van het **yz-vlak** wordt het punt **(½,1,1)** overgevoerd in het punt **(½,½,1,)**. Deze beweging induceert weer een beweging van $\mathbf{I}^{\infty}$ die precies realiseert wat in stap 2 beschreven staat.
Om stap 3 te kunnen beschrijven voeren we een nieuwe coördinaatrichting in, de zogenaamde **n-as**. Aldus verkrijgen we een vierdimensionaal coördinatenstelsel.

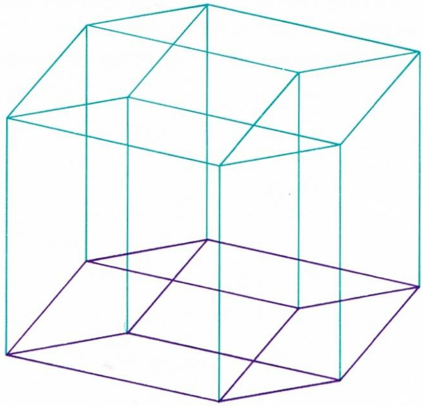


Figuur 14.

In het volgende plaatje wordt een vierdimensionale kubus gesuggereerd. De voorstelling is bedrieglijk, daar slechts de rand getekend is, zodat U er het inwendige zèlf bij moet denken. Als U daar problemen mee heeft bent U ongetwijfeld niet de enige. De wiskundige en filosoof Bertrand Russell moet gezegd hebben: *De wiskunde behandelt zaken waarvan men niet weet wat zij voorstellen en bestaat uit zinnen waarvan men niet weet of ze goed of fout zijn* (toegeschreven aan B. Russell).[7]


Figuur 15.

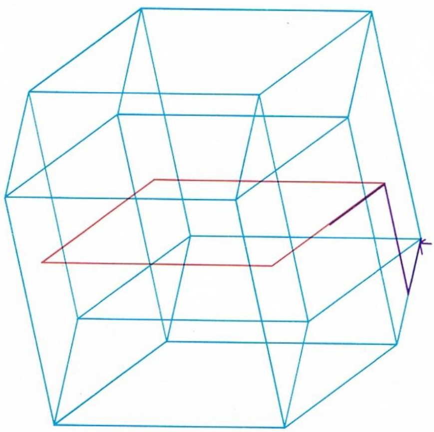
U kunt nu gemakkelijk inzien hoe de kubus van figuur 13 gedacht moet worden binnen figuur 15.



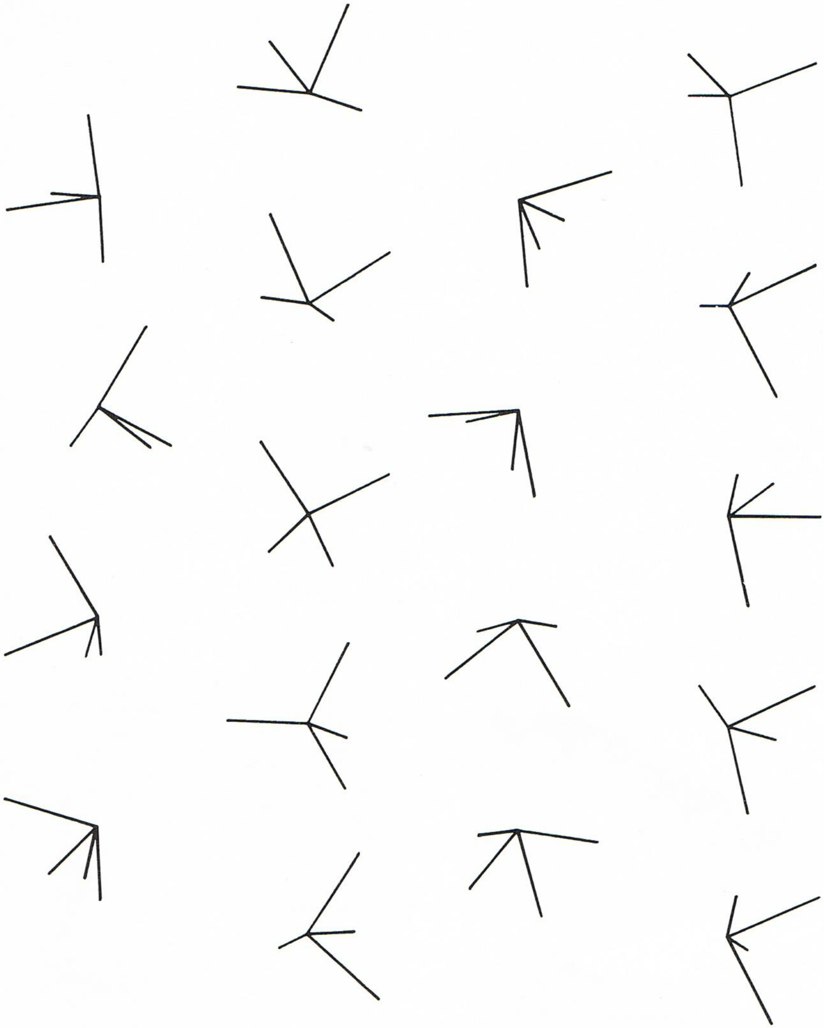
Figuur 16.

Door een eenvoudige draaiing, die slechts de **z-as** en de **n-as** aangaat, wordt het punt **(½,½,1,1)** overgevoerd in het punt **(½,½,½,1)**.

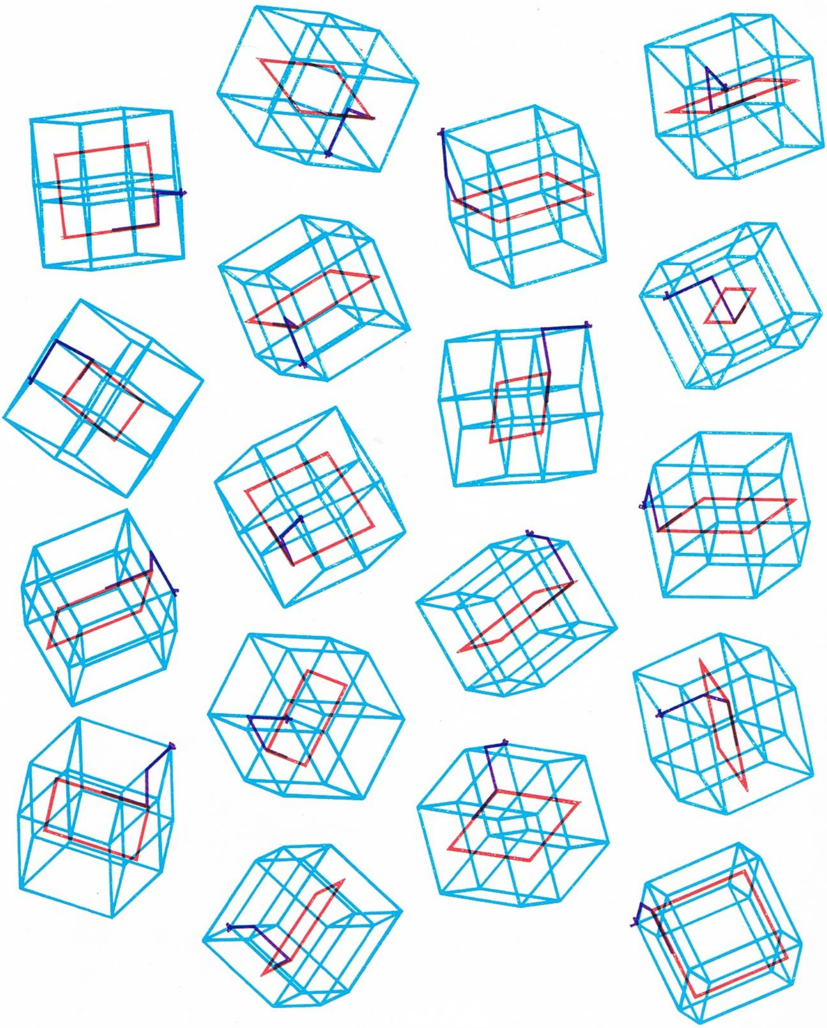
Deze actie induceert weer een beweging van $\mathbf{I}^{\infty}$ die precies realiseert wat beschreven staat in stap 3. Om U een indruk te geven hoe het punt **v** door $\mathbf{I}^{\infty}$ beweegt laat ik U binnen de vierdimensionale kubus alle beschreven stappen zien; daarna vanuit 18 verschillende invalshoeken.



Figuur 17.



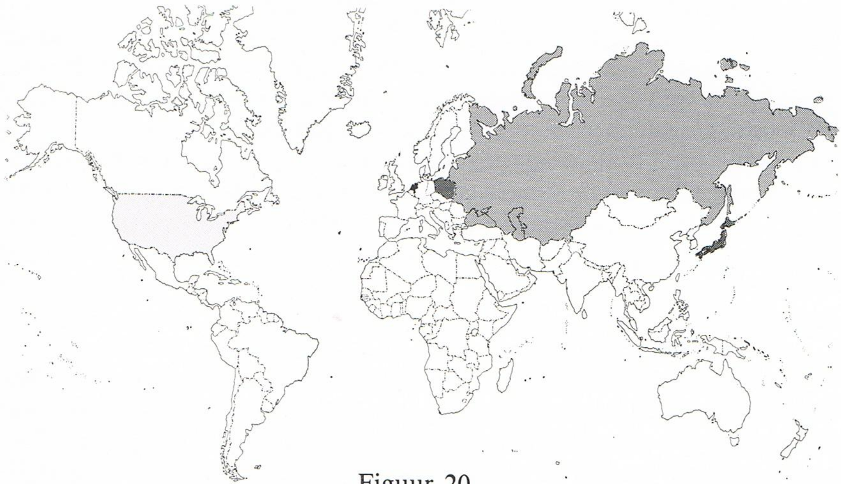
Figuur 18.



Figuur 19.

Deze zelfde procedure herhalen we nu keer op keer. Na oneindig veel stappen hebben we het probleem oneindig vaak ontlopen: het punt **v** is vloeiend overgevoerd in het punt **u**.[8]
De fundamentaalkubus $\mathbf{I}^{\infty}$ blijkt een object te zijn waarbinnen het mogelijk is bepaalde moeilijkheden te ontlopen door ze oneindig vaak uit de weg te gaan: hij is de wereld van meetkundige aard waar ik in de inleiding van mijn rede op doelde. Het onderdeel van de wiskunde dat zich met de

fundamentaalkubus bezighoudt heet *oneindig-dimensionale topologie.*
Ik veroorloof mij een tussenopmerking. Op de onderstaande kaart heb ik centra van activiteit in de oneindig-dimensionale topologie aangegeven.



Figuur 20.

U merkt dat Nederland een enigszins geïsoleerde positie inneemt tussen Oost en West. Helaas is gebleken dat het op andere hier niet nader aan te geven gebieden onmogelijk is deze positie ook in te nemen; maar dit terzijde. Een aangenaam aspect van het ingeklemd zitten tussen twee werelden is dat wetenschappers op reis van Oost naar West, of omgekeerd, vaak Amsterdam aandoen als tussenstation. Zo worden wij van de nieuwste ontwikkelingen terdege op de hoogte gehouden. Ik constateer verheugd dat, ondanks de financiële misère waar de Nederlandse universiteiten en hogescholen zich in bevinden, hier in Amsterdam nog steeds voldoende middelen aanwezig zijn om de contacten met buitenlandse wetenschappers te onderhouden. Ik zie deze financiële ruimte als een essentiële voorwaarde voor de goede voortgang van mijn onderzoek en dat van anderen. Maar nu terug naar het hoofdbetoog.
De oneindig-dimensionale topologie heeft een aantal zeer beroemde problemen in de wiskunde opgelost, bijvoorbeeld:

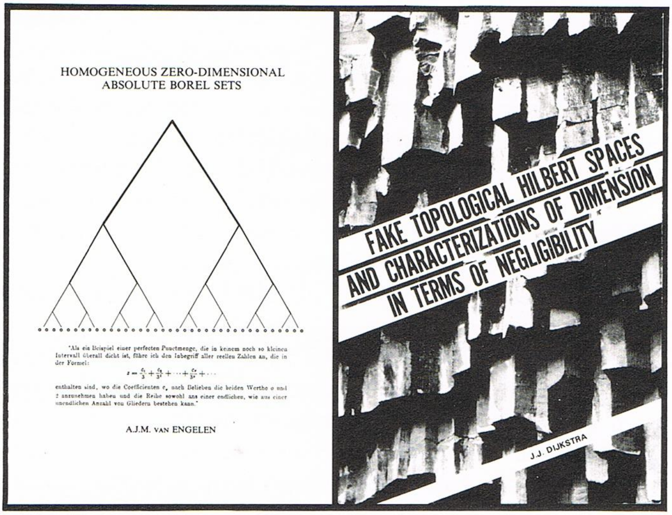
(1) *Het vermoeden van Fréchet dat alle oneindig-dimensionale Fréchet ruimten topologisch homeomorf zijn* (door Anderson en Kadec[9]),
(2) *De invariantie van Whitehead-torsie* (door Chapman[10]),
(3) *Het eindig zijn van het homotopie-type van compacte absolute omgevingsretracten - het vermoeden van Borsuk* (door West[11]).

We merken op dat de genoemde problemen zich voordoen in de normale wereld maar dat de bewijzen zich binnen de oneindig-dimensionale wereld van de fundamentaalkubus afspelen. Het bewijs gaat ruwweg als volgt. Zij ε de hoeveelheid narigheid die weggewerkt moet worden. Zoals bij het zojuist geschetste oneindige draaiingsproces wordt de eerste coördinaatrichting benut om ε te reduceren tot $\varepsilon/2$. Een volgende coördinaatrichting wordt benut om $\varepsilon/2$ verder te reduceren tot $\varepsilon/4$. Na n stappen is de hoeveelheid narigheid nog maar $\varepsilon/2n$. Indien er binnen een eindig-dimensionale euclidische ruimte gewerkt wordt blijft er nog iets van de oorspronkelijke hoeveelheid narigheid over. In de fundamentaalkubus zijn er oneindig veel richtingen en kan er oneindig vaak gereduceerd worden. Uiteindelijk blijkt de overgebleven narigheid

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon/2n = 0$$

te zijn: de narigheid is verdwenen. Na het probleem aldus binnen de wereld van de fundamentaalkubus opgelost te hebben, keren we terug naar de normale wereld en blijkt het probleem daar ook opgelost te zijn. Precies zo'n gang van zaken heb ik U al geschetst toen ik sprak over mijn eerstejaars college Lineaire Algebra.
Deze beschouwingen wekken wellicht de indruk dat de fundamentaalkubus een hulpobject is om problemen in de normale wiskundige wereld op te lossen. Dat is juist, maar ook de bestudering van I^∞ als doel in zichzelf is zinvol. Het invloedrijke werk van Toruńczyk[12] ondersteunt deze opvatting.

Het is vaak geen gemakkelijke opgave voor een wiskundige om binnen de oneindige wereld van de fundamentaalkubus zijn weg te vinden. Een bijzonder concentratievermogen en de bereidheid veel werk te verzetten zijn essentiële voorwaarden. Dat bij voortduring toch studenten gegrepen worden door de fundamentaalkubus en verwante objecten zoals de Cantor verzameling, en bereid zijn tot de ergste zelfkwelling, namelijk het schrijven van een dissertatie, vervult mij met grote dankbaarheid en motiveert mij in belangrijke mate. Vol trots laat ik U hierbij de werkstukken van mijn eerste twee promovendi zien.



Figuur 21.

J.J. Dijkstra, 16 november 1983.[(13)]
A.J.M. van Engelen, 6 november 1985.[(14)]

Ik spreek de hoop uit dat nu de eerste schapen over de dam zijn er nog een aantal zal volgen maar dat dit aantal niet het oneindige zal gaan benaderen.

Dames en Heren,

In het afgelopen halfuur heb ik stilgestaan bij een wereld vol verrassingen. Sommigen van U zullen wellicht beschouwingen van meer filosofische aard verwacht hebben. Anderen vinden misschien dat een kommer-en-kwel verhaal over de moeilijke positie waar wetenschappers zich heden ten dage in bevinden meer op zijn plaats zou zijn geweest. Ik laat dergelijke verhandelingen echter gaarne aan anderen over. Mijn mening over verschillende zaken van niet-wiskundige aard acht ik niet belangrijk genoeg om U daar bij deze gelegenheid mee te confronteren. Omdat ik voornemens ben mijn hele verdere leven op gezette tijden in mijn wiskundige denkwereld te vertoeven, heb ik het mijn taak gedacht U iets van die wereld te laten zien. Of ik in mijn streven geslaagd ben weet ik niet, dat is aan U ter beoordeling. Wel hoop ik dat U althans iets van mijn enthousiasme voor de wetenschap en voor de wiskunde in het bijzonder heeft mogen proeven.

Dames en Heren,

Aan het einde van mijn rede gekomen wil ik enkelen onder U persoonlijk toespreken. Hooggeachte Baayen, Maurice, Van de Vel en Wattel. Uw leiding, daadwerkelijke steun en vriendschap en de samenwerking met U hebben voor mij altijd veel betekend. Altijd was U aanwezig op de momenten dat dat nodig was. Ik zal eens, maar ik weet nog niet wanneer, op een geheel eigen wijze aan mijn dank uiting geven. In het verleden heb ik het U niet altijd even gemakkelijk gemaakt. Ik spreek de hoop uit dat dat ook in de toekomst zo zal blijven: dat zal Uw en mijn geest levendig houden.
Toen ik op zestienjarige leeftijd aan mijn toenmalige wiskundelerares mevr. H.J. Dengerink kenbaar maakte dat ik aan de Universiteit van Amsterdam wiskunde wilde gaan studeren, merkte zij op: 'Wiskunde is een uitstekende keuze maar de Universiteit van Amsterdam niet: jij, jongen, hoort op de Vrije Universiteit thuis'. Erop vertrouwende dat het U duidelijk is dat deze uitspraak haar grond vindt in het speciale karakter van de Vrije Universiteit, sluit ik mij er gaarne bij aan. Ik wil het Bestuur van de Vereniging voor Wetenschappelijk Onderwijs op Gereformeerde Grondslag en het College van Bestuur van de Vrije Universiteit danken voor het in mij gestelde vertrouwen. Ik beschouw het als een voorrecht aan een universiteit als deze verbonden te zijn.

Ik dank U voor Uw aandacht.

Noten:

1. Zie K. Kunen, *Set theory: An Introduction to Independence Proofs,* North-Holland, Amsterdam, 1980.
2. Zie S. Lang, *Linear Algebra* (second edition), Addision - Wesley, Reading 1972.
3. N.H. Abel, *Letter to Holmboë,* 1825, in S. Lie en L. Sylow (eds.): Oevres Complètes, vol 2. Christiana: Grøndahl, 1881, pp. 257-258.
4. D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen,* 4. Mitteilung, Gött. Nachr., 1906, p. 200, en 5. Mitteilung, Gött. Nachr., 1906, p. 439.
5. O.H. Keller, *Die homoiomorphie der kompakten konvexen Mengen in Hilbertschen Raum,* Math. Ann., 105, 1931, pp. 748-758.
6. R.D. Anderson, *Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines,* Bull. Am. Math. Soc., 72, 1966, pp. 515-519.
   R.D. Anderson *Topological properties of the Hilbert cube and the infinite product of intervals,* Trans. Am. Math. Soc., 126, 1967 pp. 200-216.
7. W. Heisenberg, *Fysica in Perspectief,* Aulapaperback 23, Het Spectrum, Utrecht - Antwerpen, 1974, p. 103.

8. De geïnteresseerde lezer kan gemakkelijk inzien dat het mogelijk is alle bewegingen zo te kiezen dat het punt **u** niet verplaatst wordt. In de limiet is **v** dan overgevoerd in **u**, maar niet door een *homeomorfisme.* Om dat wel te laten gebeuren is een aangepast, maar niet essentieel ingewikkelder draaiproces nodig. Dit technische detail werd door mij bewust genegeerd om het geheel begrijpelijk te houden.

9. R.D. Anderson *Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines,* Bull. Am. Math. Soc. 72, 1966, pp. 515-519.
   M.I. Kadec, *On topological equivalence of separable Banach spaces,* Soviet Math. Dokl. 7, 1966, pp. 319-322.
10. T.A. Chapman, *Topological invariance of Whitehead torsion,* American J. Math. 96, 1974, pp. 488-497.
11. J.E. West, *Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's: a solution of a conjecture of Borsuk,* Ann. Math., 106, 1977, pp. 1-18.
12. H. Toruńczyk, *On CE-images of the Hilbert cube and characterizations of* Q*-manifolds,* Fund. Math., 106, 1980, pp. 31-40.
    H. Toruńczyk, *Characterizing Hilbert space topology,* Fund. Math., 111, 1981, pp. 247-262.
13. J.J. Dijkstra, *Fake topological Hilbert spaces and characterizations of dimension in terms of negligibility,* Proefschrift Universiteit van Amsterdam, November 1983.
14. A.J.M. van Engelen, *Homogeneous zero-dimensional absolute Borel sets,* Proefschrift, Universiteit van Amsterdam, November 1985 (dit proefschrift kwam tot stand mede onder leiding van prof.dr. A.B. Paalman-de Miranda).

ISBN 90-6256-219-1

VU Boekhandel/Uitgeverij
Hoofdgebouw Vrije Universiteit
De Boelelaan 1105, 1081 HV Amsterdam
Postbus 7161, 1007 MC Amsterdam
Telefoon 020 - 444 355, Telex 18191 vuboe nl

Tekenwerk: Evert Wattel
VU Amsterdam