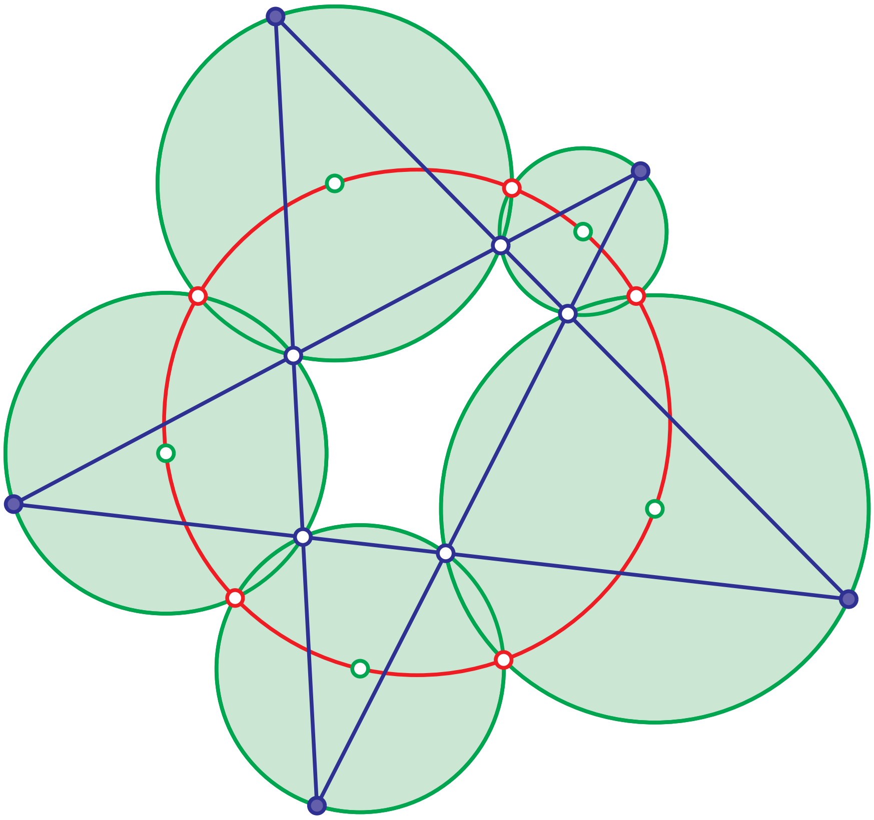
Morley's vijf-cirkelsstelling

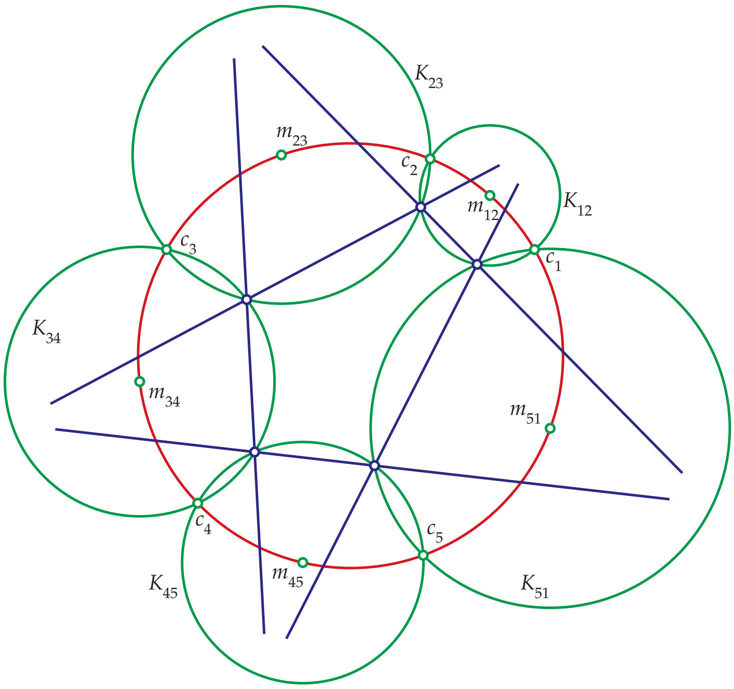
Jan van de Craats



Teken een ring van vijf cirkels (groen) met hun middelpunten op een gegeven cirkelomtrek (rood). Zorg ervoor dat elke groene cirkelomtrek zijn beide buren snijdt op de rode cirkelomtrek. Verbind de vijf andere snijpunten van opvolgende naburige cirkelomtrekken door lijnen waardoor er een vijfhoek ontstaat (blauw). Als je de zijden van die vijfhoek doortrekt, zullen ze elkaar opnieuw snijden en zo een vijfpuntige ster vormen. Het verrassende is dat de punten van die ster weer op de groene cirkelomtrekken liggen.

De bovenstaande stelling met illustratie sierde onze nieuwjaarskaart 2018. Die stelling is in de eerste helft van de twintigste eeuw gevonden door Frank Morley (1860-1937). Voor een bewijs ervan verwees ik daar naar mijn recente artikel *Morley chains of osculant curves* in het Nieuw Archief voor Wiskunde, dat ook als pdf te beschikbaar is op mijn homepage, zie `https://staff.fnwi.uva.nl/j.vandecraats/MorleyChainsHP.pdf`. Daar wordt de stelling gepresenteerd en bewezen als bijzonder geval van een algemener resultaat.

Voor wie ertegenop ziet om het hele artikel te lezen, geef ik hier een verkort, zelfstandig bewijs. Als voorkennis is echter wel nodig dat je kunt rekenen met complexe getallen. In plaats van 'cirkelomtrek' zeg ik steeds eenvoudigweg 'cirkel'.



Ik neem aan dat de gegeven rode cirkel de eenheidscirkel in het complexe vlak is, dat wil zeggen de cirkel met middelpunt 0 en straal 1. De groene cirkels noem ik achtereenvolgens K_{12}, K_{23}, K_{34}, K_{45}, K_{51} met middelpunten m_{12}, m_{23}, m_{34}, m_{45}, m_{51} (de cirkels zijn hier genummerd tegen de klok in), waarbij K_{51} en K_{12} elkaar op de eenheidscirkel snijden in c_1, K_{12} en K_{23} in c_2, K_{23} en K_{34} in c_3, K_{34} en K_{45} in c_4 en K_{45} en K_{51} in c_5, zie de bovenstaande figuur.

Omdat m_{12} op de eenheidscirkel halverwege c_1 en c_2 ligt, geldt $c_2/m_{12} = m_{12}/c_1$, dus $m_{12}^2 = c_1c_2$ et cetera. Laat t_1 een vierkantwortel zijn van c_1, dus $c_1 = t_1^2$, en definieer

$$\begin{aligned} t_2 &= -m_{12}/t_1 \quad \text{dus} \quad t_2^2 = m_{12}^2/c_1 = c_2 \\ t_3 &= -m_{23}/t_2 \quad \text{dus} \quad t_3^2 = m_{23}^2/c_2 = c_3 \\ t_4 &= -m_{34}/t_3 \quad \text{dus} \quad t_4^2 = m_{34}^2/c_3 = c_4 \\ t_5 &= -m_{45}/t_4 \quad \text{dus} \quad t_5^2 = m_{45}^2/c_4 = c_5. \end{aligned}$$

Dan geldt dus $m_{12} = -t_1t_2$, $m_{23} = -t_2t_3$, $m_{34} = -t_3t_4$, $m_{45} = -t_4t_5$. Merk op dat de punten t_1, t_2, t_3, t_4 en t_5 ook punten op de eenheidscirkel zijn, want producten en quotiënten van complexe getallen op de eenheidscirkel zijn weer complexe getallen op de eenheidscirkel.

De cirkelbogen $m_{51}c_1$, $m_{12}c_2$, $m_{23}c_3$, $m_{34}c_4$, $m_{45}c_5$ beslaan samen precies de helft van de eenheidscirkel, dus

$$\frac{c_1}{m_{51}}\frac{c_2}{m_{12}}\frac{c_3}{m_{23}}\frac{c_4}{m_{34}}\frac{c_5}{m_{45}} = -1$$

met andere woorden: $c_1c_2c_3c_4c_5 = -m_{51}m_{12}m_{23}m_{34}m_{45}$. Uit het bovenstaande volgt dan dat

$$t_5t_1m_{12}m_{23}m_{34}m_{45} = t_1^2t_2^2t_3^2t_4^2t_5^2 = c_1c_2c_3c_4c_5 = -m_{51}m_{12}m_{23}m_{34}m_{45}$$

zodat ook geldt dat $m_{51} = -t_5t_1$.
In het vervolg laten we de variabele t de eenheidscirkel doorlopen. Dan doorloopt $x = -t_1t_2 - (t_1 + t_2)t$ een cirkel met middelpunt $m_{12} = -t_1t_2$ en straal $|t_1 + t_2|$. Dexe uitdrukking voor x kunnen we zien als een parametervoorstelling van die cirkel, waarbij de parameter t dus de eenheidscirkel doorloopt.
Voor $t = -t_1$ geeft de parametervoorstelling $x = t_1^2 = c_1$ en voor $t = -t_2$ geeft die $x = t_2^2 = c_2$. De parametervoorstelling beschrijft dus de cirkel K_{12}:

$$K_{12}: \qquad x = -t_1t_2 - (t_1 + t_2)t.$$

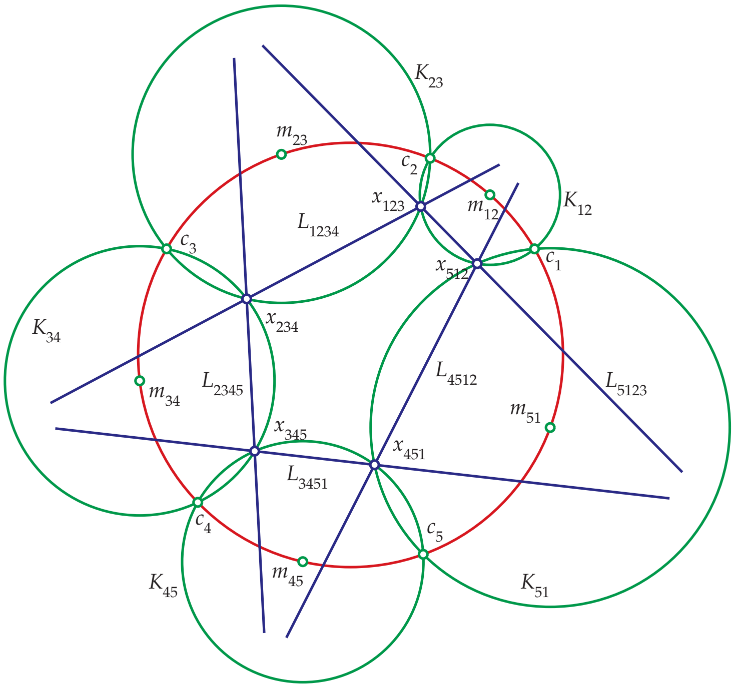
Evenzo vinden we voor de andere vier cirkels de parametervoorstellingen

$$\begin{aligned}
K_{23}: &\qquad x = -t_2t_3 - (t_2 + t_3)t \\
K_{34}: &\qquad x = -t_3t_4 - (t_3 + t_4)t \\
K_{45}: &\qquad x = -t_4t_5 - (t_4 + t_5)t \\
K_{51}: &\qquad x = -t_5t_1 - (t_5 + t_1)t.
\end{aligned}$$

De keuze $t = t_3$ bij K_{12} geeft x = $-t_1t_2 - t_1t_3 - t_2t_3$. Maar datzelfde punt krijgen we door $t = t_1$ te kiezen bij K_{23}, dus dit moet het tweede snijpunt zijn van K_{12} en K_{23}. Evenzo voor de andere snijpunten van de opvolgende cirkelparen. Samengevat zijn die snijpunten

$$\begin{aligned}
x_{123} &= -t_1t_2 - t_2t_3 - t_3t_1 \\
x_{234} &= -t_2t_3 - t_3t_4 - t_2t_4 \\
x_{345} &= -t_3t_4 - t_4t_5 - t_3t_5 \\
x_{451} &= -t_4t_5 - t_5t_1 - t_1t_4 \\
x_{512} &= -t_5t_1 - t_1t_2 - t_2t_5.
\end{aligned}$$

Deze punten vormen de hoekpunten van de (blauwe) vijfhoek uit de stelling. De zijden ervan noemen we L_{4512}, L_{5123}, L_{1234}, L_{2345}, L_{3451} (zie de onderstaande figuur). Rest nog het bewijs dat de verlengde zijden elkaar weer snijden op de groene cirkels.



Het is niet moeilijk om te raden wat die snijpunten moeten zijn. De keuze $t = t_4$ in de parametervoorstelling van K_{12} geeft $x_{124} = -t_1t_2 - t_1t_4 - t_2t_4$, en dit zal dan het snijpunt moeten zijn van L_{4512} en L_{1234}. We moeten daartoe bewijzen dat x_{451}, x_{512} en x_{124} collineair zijn, dat wil zeggen op één lijn liggen, en ook dat x_{234}, x_{123} en x_{124} collineair zijn.

Zulke bewijzen gaan het gemakkelijkst met behulp van het begrip *clinant* van een lijn. Als x en c verschillende punten op een lijn L zijn, dan geven de vectoren $x - c$ en $c - x$ beide de richting van L aan, maar in tegengestelde zin. Echter, het quotiënt $t = (x - c)/(\bar{x} - \bar{c})$, dat een punt op de eenheidscirkel is, hangt niet af van de volgorde van x en c. In feite hangt t alleen maar af van L en niet van de keuze van de punten x en c op L. Dit is per definitie de *clinant* van L. Het argument van de clinant t is twee maal de gerichte hoek tussen de reële as en L. Twee lijnen zijn parallel dan en slechts dan als hun clinanten gelijk zijn.

Als we dus willen bewijzen dat, bijvoorbeeld, de punten x_{451}, x_{512} en x_{124} collineair zijn, hoeven we alleen maar aan te tonen dat de clinant van de lijn L_{4512} door x_{451} en x_{512} gelijk is aan de clinant van de lijn door x_{451} en x_{124}. De eerste clinant is

$$\frac{x_{451} - x_{512}}{\overline{x_{451}} - \overline{x_{512}}} = \frac{-t_4t_5 - t_1t_4 + t_2t_5 + t_1t_2}{-\overline{t_4t_5} - \overline{t_1t_4} + \overline{t_2t_5} + \overline{t_1t_2}} = -t_4t_5t_1t_2$$

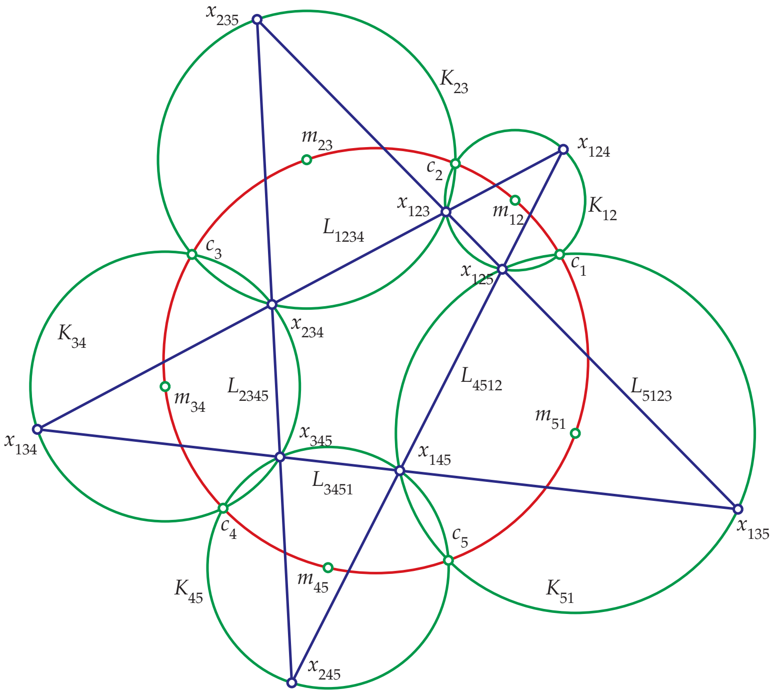
(bedenk dat voor elk punt t op de eenheidscirkel geldt dat $\bar{t} = 1/t$).

Evenzo geldt voor de clinant van de lijn door x_{451} en x_{124}

$$\frac{x_{451} - x_{124}}{\overline{x_{451}} - \overline{x_{124}}} = \frac{-t_4t_5 - t_1t_5 + t_2t_4 + t_1t_2}{-\overline{t_4t_5} - \overline{t_1t_5} + \overline{t_2t_4} + \overline{t_1t_2}} = -t_4t_5t_1t_2$$

De beide clinanten zijn gelijk, dus de drie punten zijn collineair.

Op dezelfde manier kan bewezen worden dat de punten x_{234}, x_{123} en x_{124} collineair zijn, en sterker nog, dat *alle* paren verlengde zijden van de blauwe vijfhoek uit Morley's vijf-cirkelsstelling elkaar op de desbetreffende groene cirkel snijden, waarmee de stelling bewezen is. De onderstaande figuur illustreert de situatie.



De lezer heeft er wellicht aardigheid in om nu zelf te bewijzen dat drietallen punten als m_{12}, x_{123} en c_3 collineair zijn, en dat de lijnen $m_{12}m_{34}$, $m_{23}m_{45}$, $m_{34}m_{51}$, $m_{45}m_{12}$, $m_{51}m_{23}$ evenwijdig zijn aan respectievelijk L_{1234}, L_{2345}, L_{3451}, L_{4512} en L_{5123}.

Degenen die hun kennis van het rekenen met complexe getallen willen opfrissen, wijs ik graag op mijn gratis internetboek *Complexe getallen voor Wiskunde D*, beschikbaar als pdf op `https://staff.fnwi.uva.nl/j.vandecraats/#cg`.

Oosterhout, 7 januari 2018