Eenvoud bij tekenen en rekenen

Jan van de Craats

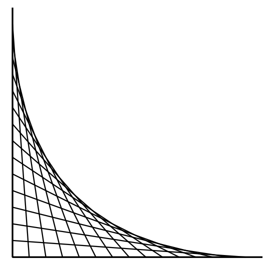
In het decembernummer 2005 van Euclides doen Paul Drijvers, Swier Garst, Peter Kop en Jenneke Krüger verslag van een experimenteel project in vwo-5 wiskunde-B met computeralgebra [1]. De resultaten ervan waren niet in alle opzichten bevredigend. Afgezien van praktische moeilijkheden (bezette computerlokalen, haperende software) doken er ook inhoudelijke problemen op: het pakket liet meer dan eens onverwachte en voor leerlingen onbegrijpelijke tussenstappen zien en de eindresultaten waren verre van overzichtelijk. Ik kan me moeilijk indenken dat het project voor leerlingen in deze vorm erg inspirerend is geweest. Toch biedt dit onderwerp tal van aanknopingspunten voor prachtige wiskunde, ook op 5-vwo niveau. Daarbij kan de computer wel een rol spelen, maar voornamelijk om mooie en motiverende figuren te maken. En dat kan met elk tekenpakket waarin je met coördinaten en herhalingsloops kunt werken. Zelfs op de gewone grafische rekenmachine kun je een heel eind komen, ook al zien de plaatjes er op zo'n apparaat natuurlijk niet zo aantrekkelijk uit. Ik heb zelf alle illustraties voor dit stuk in PostScript gemaakt (zie mijn homepage `www.science.uva.nl/~craats` onder "Wiskunde in beeld").

Kindertekeningen

Uitgangspunt is het plaatje dat veel kinderen zelf wel eens getekend zullen hebben (figuur 1) waarbij je punten met gelijke tussenruimtes op de x-as en de y-as met elkaar verbindt zodat er een kromme lijn als omhullende ontstaat. Dat je een kromme lijn ziet die je niet getekend hebt, is verrassend en fascinerend. Wat zit daarachter? En hoe kun je die kromme nader bepalen? Als de grafiek van een functie? Of als de kromme die hoort bij een vergelijking, zoals bijvoorbeeld de eenheidscirkel hoort bij de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$?

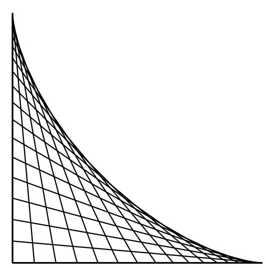
Een variant ontstaat als je de verbindingslijnen allemaal dezelfde lengte geeft (zie figuur 2). Er ontstaat dan een andere kromme. Kun je die nader bepalen?

Uit het artikel in Euclides blijkt dat de leerlingen in het project van Drijvers c.s. eigenlijk helemaal niet aan het beantwoorden van deze voor de hand liggende en motiverende vragen zijn toegekomen. Bij het eerste probleem werd



Figuur 1: *Kindertekening met een kromme als omhullende.*

eenvoudig een functie gegeven die de mysterieuze kromme als grafiek zou hebben. De leerlingen moesten alleen maar controleren dat het klopt. Hoe je zoiets zelf vindt, werd niet gezegd. Bij het tweede probleem werd een prachtig idee gelanceerd, maar helaas ging dat bij de uitwerking ervan een beetje de mist in doordat leerlingen gedwongen werden de knoppen van het pakket te bedienen, in plaats van zelf na te denken en de wiskunde te gebruiken die ze op school geleerd zouden moeten hebben.



Figuur 2: *Variant met lijnstukken van een vaste lengte.*

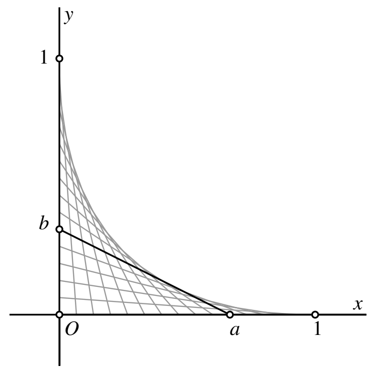
Hoe je hier wél een prachtig project van kunt maken, zal ik nu laten zien.

Eenvoud en symmetrie

In alle gevallen gaat het om de verbindingslijn van een punt $(a, 0)$ op de x-as met een punt $(0, b)$ op de y-as (zie figuur 3). De vergelijking van die lijn is

$$bx + ay = ab \tag{1}$$

In het eerste probleem (figuur 1) is de som van a en b constant. In het Euclidesstuk nemen Drijvers c.s. $a + b = 10$, maar daarmee introduceren ze een willekeurig getal 10 dat in de latere berekeningen alleen maar storend is. Een van



Figuur 3: *De lijn* $bx + ay = ab$.

de hoofdthema's van de wiskunde is het zoeken naar eenvoud, en in dit geval bereik je dat door $a + b = 1$ te kiezen, zoals ik dat ook in figuur 3 heb gedaan.

Naast vergelijking (1) geldt dus voor het eerste probleem ook

$$a + b = 1 \tag{2}$$

In het tweede probleem (figuur 2) is de lengte $\sqrt{a^2 + b^2}$ constant. Dan nemen we natuurlijk 1 als die lengte om de formules zo eenvoudig mogelijk te houden, dus de extra vergelijking waaraan dan voldaan moet zijn, luidt

$$a^2 + b^2 = 1 \tag{3}$$

Het eerste probleem luidt dus de omhullende te vinden van de lijnen $bx + ay = ab$ onder de voorwaarde dat $a + b = 1$. Voordat je daaraan gaat rekenen, is het goed om de *symmetrie* op te merken die er in het probleem zit en die je ook in de tekening terugziet. De coördinaten x en y spelen dezelfde rol. Verwisselen van x en y (dus spiegelen in de lijn $y = x$) verandert het probleem niet. Als we dus een vergelijking voor de omhullende kromme vinden, zal die vergelijking ook symmetrisch moeten zijn in x en y, of in een symmetrische vorm gebracht kunnen worden. Verder spelen a en b ook een vergelijkbare rol. Dat houden we in het achterhoofd.

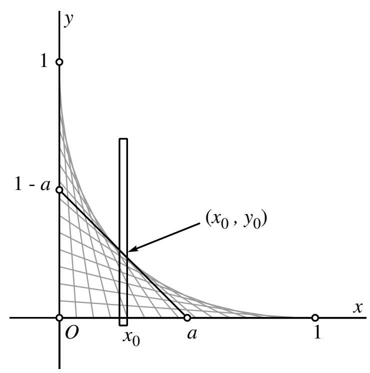
Probleem 1

Bij probleem 1 is de voorwaarde waaraan a en b moeten voldoen $a + b = 1$. De symmetrie tussen a en b gaan we nu verbreken doordat we $b = 1 - a$ stellen. Vergelijking (1) wordt dan

$$(1 - a)x + ay = a(1 - a) \tag{4}$$

Er is nu nog maar één parameter over, namelijk a. Elke a met $0 \leq a \leq 1$ geeft een lijn, en we zoeken een vergelijking voor de omhullende van die lijnencollectie.

Nu komt het geniale idee uit het stuk van Drijvers c.s. Zij bewaren het voor Probleem 2, maar ik zal het hier al gelijk toepassen. Bekijk voor een *vaste* x-waarde x_0 een smal verticaal venstertje rond de lijn $x = x_0$ (zie figuur 4) met daarin de (delen van de) lijnen van vergelijking (4). Als de parameter a van 0 naar 1 loopt, zie je binnen het venster de lijnen omhoog komen totdat ze bij een zekere a-waarde een maximum bereiken en dan weer naar beneden gaan. *Dat maximum zit precies bij de lijn die de raaklijn is aan de gezochte omhullende kromme!*



Figuur 4: *Het verticale venstertje bij* x_0.

Nu komt de wiskunde die we geleerd hebben van pas. Maximum bepalen betekent differentiëren en de afgeleide gelijk aan nul stellen. Niet met computeralgebra, maar gewoon met de hand. De lijn (4) heeft voor $x = x_0$ als y-waarde

$$y = (1 - a) - \frac{1 - a}{a}\, x_0 \tag{5}$$

Je ziet dat y nog afhankelijk is van de parameter a, en dat komt goed uit, want we willen de waarde van a bepalen waarvoor deze y maximaal is. Differentieer het rechterlid dus met de quotiëntregel naar a

$$\frac{dy}{da} = -1 - \frac{-a - (1 - a)}{a^2}\, x_0 = -1 + \frac{x_0}{a^2}$$

De afgeleide is nul voor $x_0 = a^2$, dus voor $a = \sqrt{x_0}$. Voor deze waarde van a is (4) dus de raaklijn aan de omhullende kromme. De x-waarde van het raakpunt is $x_0 = a^2$ en de symmetrie van de probleemstelling geeft ons het vermoeden dat de y-waarde van het raakpunt moet voldoen aan $y_0 = b^2$. We kunnen immers net zo goed de rol van a en b verwisselen en werken met een horizontaal venstertje.

Maar als je dit te kort door de bocht vindt, kun je het ook direct verifiëren. Invullen van $a = \sqrt{x_0}$ in vergelijking (5) geeft de bijbehorende y-waarde y_0

$$y_0 = 1 - \sqrt{x_0} - (1 - \sqrt{x_0})\sqrt{x_0} = 1 - 2\sqrt{x_0} + x_0 = (1 - \sqrt{x_0})^2 \tag{6}$$

Omdat $a = \sqrt{x_0}$ geldt inderdaad $y_0 = (1-a)^2 = b^2$ zoals we al vermoedden.

Hoe dan ook, we weten nu dat voor elk punt (x, y) op de omhullende kromme geldt dat $x = a^2$ en $y = b^2$. Wegens $a + b = 1$ wordt een vergelijking van die kromme dus in een mooie symmetrische vorm gegeven door

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \tag{7}$$

Er is over deze vergelijking en de bijbehorende kromme nog wel meer te zeggen, en aan het eind van dit artikel zal ik dat ook doen. Maar eerst wil ik nog even de methode recapituleren. Bij vaste $x = x_0$ hoort een punt (x_0, y_0) op de omhullende kromme. De raaklijn aan die kromme in dat punt is één van de lijnen uit de collectie (4). De bijbehorende a-waarde vonden we via de venstermethode door (5) naar a te differentiëren en de afgeleide nul te stellen. Dat leverde $x_0 = a^2$ oftewel $a = \sqrt{x_0}$ en substitutie hiervan in (5) gaf het verband (6) tussen x_0 en y_0 waarin de parameter a niet meer voorkomt. Dit verband is, als je x en y in plaats van x_0 en y_0 schrijft, niets anders dan de *vergelijking van de omhullende kromme*! Deze vergelijking kun je door worteltrekken in de symmetrische vorm (7) brengen, maar ik heb ook aangegeven hoe je op een snellere manier tot (7) kunt komen door direct al van de symmetrie in a en b gebruik te maken, namelijk via $y_0 = b^2$ en de relatie $a + b = 1$.

Als je zo'n project in de klas doet, is het goed om aan al deze stappen en overwegingen uitgebreid aandacht te besteden. Dat geeft inzicht en bovendien kan ik me niet indenken dat een leerling daarbij niet onder de indruk komt van de kracht en de elegantie van de wiskunde die je hier gebruikt. Maar laat de leerlingen in dit stadium alsjeblieft niet te veel zelf aanmodderen. Goede sturing is hier essentieel! Verderop in dit artikel komen er nog gelegenheden genoeg waarbij de leerlingen zelf op onderzoek uit kunnen gaan.

Probleem 2

Bij Probleem 2 hebben alle verbindingslijnstukjes een vaste lengte, die we op 1 hebben gesteld. Het gaat dus om de lijnen (1) met als extra voorwaarde (3), dat wil zeggen $a^2 + b^2 = 1$ oftewel $b = \sqrt{1 - a^2}$. We passen weer de methode toe van het smalle verticale venster. Vergelijking (5) wordt nu

$$y = \sqrt{1 - a^2} - \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}\, x_0 \tag{8}$$

en de quotiëntregel geeft nu na vereenvoudigen

$$\frac{dy}{da} = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{-1}{a^2\sqrt{1-a^2}}\,x_0$$

Nogmaals: doe dit niet met computeralgebra maar met de hand. Dat is niet alleen een goede oefening in formulevaardigheid (die in het vervolgonderwijs broodnodig is!), maar met de hand kun je je resultaten ook veel beter eenvoudig en overzichtelijk houden. En pen en papier bevorderen de concentratie meer dan een computerscherm.

Nul stellen van de afgeleide geeft $x_0 = a^3$ en op een soortgelijke manier $y_0 = b^3$ (symmetrie!). Wegens $a^2 + b^2 = 1$ is de vergelijking van de omhullende nu

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \tag{9}$$

Parametrisaties

Een vergelijking van een kromme is mooi, maar om hem te (laten) tekenen, is een parametrisatie wel zo handig. En in dit geval is het ook niet moeilijk om zo'n parametrisatie te vinden als je gebruik maakt van de bekende relatie $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Voor Probleem 1 (met vergelijking (7)) kun je nemen

$$x = \cos^4\varphi, \quad y = \sin^4\varphi$$

met $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Voor Probleem 2 (met vergelijking (9)) wordt een parametrisatie gegeven door

$$x = \cos^3\varphi, \quad y = \sin^3\varphi$$

In dit geval kun je φ het hele traject $0 \le \varphi \le 2\pi$ laten doorlopen waardoor de volledige *astroïde* getekend wordt (zie ook [2], bladzijde 156, opgave 19.6 (c)).

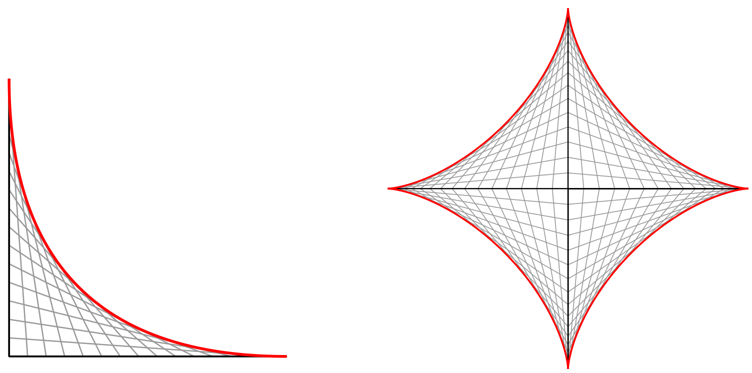
In figuur 5 zie je de lijnfiguren en de omhullende krommen voor de beide problemen. Die omhullenden zijn met behulp van de parametrisaties in rood getekend.

Generalisaties

De voorwaarden (2) en (3) zijn beide van de vorm

$$a^p + b^p = 1 \tag{10}$$

namelijk voor $p = 1$ (probleem 1) respectievelijk $p = 2$ (probleem 2). We kunnen dit generaliseren voor een willekeurige waarde van p, en zoeken dan dus naar de omhullende van de lijnen die gegeven worden door vergelijking (1),



Figuur 5: *Parametrisaties (rood getekend) voor de problemen 1 en 2.*

dat wil zeggen $bx + ay = ab$, onder de voorwaarde (10). De techniek met het verticale venster levert dan met $b = \sqrt[p]{1-a^p}$ de volgende vergelijking in plaats van (5)

$$y = \sqrt[p]{1-a^p} - \frac{\sqrt[p]{1-a^p}}{a}\, x_0 \tag{11}$$

Met behulp van de quotiëntregel krijgen we nu na vereenvoudigen

$$\frac{dy}{da} = \frac{-a^{p-1}}{(1-a^p)^{(p-1)/p}} + \frac{x_0}{a^2(1-a^p)^{(p-1)/p}}$$

Nul stellen levert $x_0 = a^{p+1}$ en evenzo $y_0 = b^{p+1}$ zodat de vergelijking van de omhullende gegeven wordt door

$$x^{p/(p+1)} + y^{p/(p+1)} = 1 \tag{12}$$

In dit geval wordt een parametrisatie gegeven door

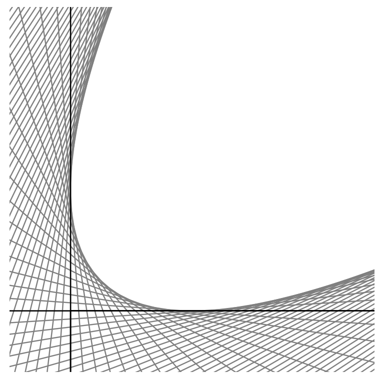
$$x = \cos^{p/(2(p+1))} \varphi, \quad y = \sin^{p/(2(p+1))} \varphi$$

Het is leuk om op te merken dat er ook een waarde van p is die als omhullende de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ geeft, namelijk $p = -2$. Evenzo geeft $p = -\frac{4}{3}$ de 'supercirkel' $x^4 + y^4 = 1$. De waarde $p = -1$ zal problemen geven. Maar wat gebeurt er als $p \downarrow -1$ of als $p \uparrow -1$? Of als $p \to \infty$ of $p \to 0$? Kortom, genoeg stof voor verder onderzoek. Wie durft?

Nogmaals Probleem 1

Tot nu toe hebben we ons beperkt tot waarden van a en b die tussen 0 en 1 liggen. Voor x en y geldt dan hetzelfde, en het verband tussen x en a en tussen y en b via $x = a^{p+1}$ en $y = b^{p+1}$ is één-aan-één. Maar in het geval $p = 1$

(Probleem 1) is die beperking niet noodzakelijk. We kunnen a ook buiten het interval $[0,1]$ kiezen en de verbindingslijn van $(a,0)$ en $(0,b) = (0,1-a)$ tekenen. We krijgen dan een veel grotere omhullende kromme (zie figuur 6) die de beide assen raakt in $(1,0)$ respectievelijk $(0,1)$. Wat is dat voor een kromme?



Figuur 6: *De volledige omhullende voor* $p = 1$.

We hadden met behulp van de venstermethode afgeleid dat voor elk punt (x,y) op de omhullende geldt dat $x = a^2$ en $y = b^2$. Hieruit concludeerden we $a = \sqrt{x}$ en $b = \sqrt{y}$. Maar dat geldt alleen als a en b groter dan of gelijk aan nul zijn. Voor een negatieve a of b moeten we $a = -\sqrt{x}$, respectievelijk $b = -\sqrt{y}$ nemen. Vergelijking (7) wordt dan

$$\pm\sqrt{x} \mp \sqrt{y} = 1$$

(a en b kunnen niet tegelijkertijd negatief zijn want $a + b = 1$). Kwadrateren van deze vergelijking of van vergelijking (7) geeft

$$x \pm 2\sqrt{xy} + y = 1$$

Herschrijven als $\pm 2\sqrt{xy} = (1 - x - y)$ en nogmaals kwadrateren geeft

$$4xy = 1 + x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$$

en dat kunnen we ook schrijven als

$$2(x + y) = 1 + (x - y)^2$$

oftewel, via $u = x + y$, $v = x - y$

$$2u = 1 + v^2 \tag{13}$$

De omhullende is dus een *scheve parabool* met de lijn $v = 0$ oftewel $y = x$ als symmetrie-as.

Je ziet hoeveel mogelijkheden tot verdieping en herhaling van bekende stof het bovenstaande biedt: er zit blijkbaar een coördinatentransformatie $(x, y) \longrightarrow (u, v)$ achter. Schets de lijnen $u =$ constant en $v =$ constant om het nieuwe stelsel, inclusief u-as en v-as, in beeld te krijgen, en controleer dat vergelijking (13) inderdaad een parabool voorstelt.

Verdere onderzoeksvragen liggen ook hier weer voor het oprapen. Hoe zit het bijvoorbeeld voor het geval $p = 3$? Komt er dan ook een mooie, bekende kromme uit?

Verwijzingen:

[1] Paul Drijvers, Swier Garst, Peter Kop, Jenneke Krüger, *Rechtlijnige krommen*, Euclides 81, nr. 3, december 2005, 120-125

[2] Jan van de Craats en Rob Bosch, *Basisboek wiskunde,* Pearson Education Benelux, 2005, ISBN 90-430-1156-8