Bewijzen met coördinaten

Jan van de Craats

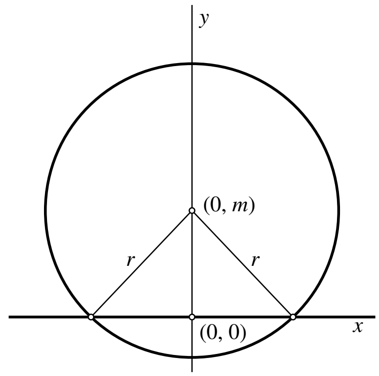
(leadtekst)
Zo'n tien jaar geleden meenden sommigen dat 'redeneren en bewijzen' meer aandacht moest krijgen in de schoolwiskunde. Als gevolg hiervan werd in het vwo-profiel Natuur en Techniek de vlakke meetkunde volgens de klassieke axiomatische methodes van Euclides weer van stal gehaald. Over de resultaten van deze operatie wordt verschillend gedacht. Zo is er veel onvrede over het feit dat deze behandeling van de meetkunde irrelevant is voor alle vervolgopleidingen waar de B-profielen op voorbereiden, zelfs voor een wiskundestudie. Zou het niet veel beter zijn om de schaarse uren te vullen met onderwerpen waar het vervolgonderwijs wél wat aan heeft?

Toch blijft de vlakke meetkunde, inclusief bewijzen, een prachtig vak voor liefhebbers, zeker wanneer je het behandelt op een manier die wél aansluit bij moderne ontwikkelingen en toepassingen, betoogt Jan van de Craats.

Laat ik met een voorbeeld beginnen. Een cirkel en een lijn in het euclidische vlak hebben nul, één of twee punten gemeen. Hoe bewijs je dat? Simpel. Kies cartesische coördinaten zo, dat de gegeven lijn met de x-as samenvalt en dat het middelpunt van de gegeven cirkel op de positieve y-as ligt. Dan wordt voor een zekere $r > 0$ en een zekere $m \geq 0$ de vergelijking van de cirkel gegeven door $x^2 + (y - m)^2 = r^2$. De coördinaten (x, y) van een eventueel snijpunt van die cirkel met de gegeven lijn voldoen dus aan $x = \pm\sqrt{r^2 - m^2}$, $y = 0$ en dit geeft inderdaad nul (als $m > r$), één (als $m = r$) of twee (als $m < r$) snijpunten. Als er één snijpunt is, is de gegeven lijn de *raaklijn* aan de cirkel in het *raakpunt* $(0, 0)$.

Hiermee is tevens bewezen dat in het geval dat er twee snijpunten zijn, de bijbehorende koorde loodrecht middendoor wordt gedeeld door de y-as, dat wil zeggen door de lijn door het middelpunt van de cirkel die loodrecht staat op de gegeven lijn. En ook dat in het geval dat er precies één snijpunt is, de raaklijn loodrecht staat op de verbindingslijn van middelpunt en raakpunt. We hebben drie vliegen geslagen in één klap.

Een tweede voorbeeld. Hoe bewijs je dat de verzameling van alle punten met gelijke afstand tot twee gegeven punten P en Q gelijk is aan de middelloodlijn van PQ? Simpel: kies cartesische coördinaten zo, dat $P = (a, 0)$ en $Q = (-a, 0)$.

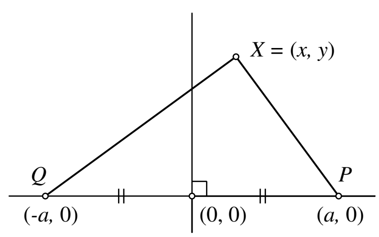


Figuur 1: De snijpunten van een lijn en een cirkel.

Dan geldt (zie figuur 2) voor een willekeurig punt $X = (x, y)$ dat

$$d(X, P) = d(X, Q) \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

Via kwadrateren en vereenvoudigen leidt dit tot $-2ax = 2ax$ en dus tot $x = 0$ want $2a = d(P, Q) > 0$. Het punt $X = (x, y)$ heeft dus gelijke afstand tot P en Q dan en slechts dan als $x = 0$. Dat is de vergelijking van de y-as en dat is inderdaad de lijn die het lijnstuk PQ loodrecht middendoor deelt. Tevens blijkt hieruit dat de lijnen PX en QX gelijke hoeken maken met de middelloodlijn als X op de middelloodlijn ligt.



Figuur 2: De middelloodlijn van PQ

Als extraatje kun je op precies dezelfde manier nog bewijzen dat alle punten in het rechterhalfvlak dichter bij P dan bij Q liggen, en dat alle punten in het linkerhalfvlak dichter bij Q dan bij P liggen.

De $\mathbb{R}^2$ als model

Wat de bovenstaande korte bewijzen mogelijk maakt, is de vrijheid die je hebt in het kiezen van een cartesisch coördinatenstelsel, dat wil zeggen een stelsel met onderling loodrechte assen en daarop gelijke schaalverdelingen. Met zo'n keuze creëer je een één-aan-één-verband tussen de punten van het vlak en de elementen van de $\mathbb{R}^2$ (de coördinaten van zo'n punt). Lijnen in het vlak worden dan gegeven door lineaire vergelijkingen en de afstand $d(P_1, P_2)$ tussen twee punten $P_1 = (x_1, y_1)$ en $P_2 = (x_2, y_2)$ is gelijk aan

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Waarom worden (rechte) lijnen in het vlak gegeven door lineaire vergelijkingen, en waarom wordt de afstand tussen twee punten gegeven door die wortelformule? Dat is eenvoudig een kwestie van *definitie*: een lijn in $\mathbb{R}^2$ is per definitie een deelverzameling van de vorm

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$$

waarbij a en b niet beide nul zijn. En ook de afstandsformule is in deze context uitsluitend een definitie, hoe schokkend het voor sommigen ook is om een bijzonder geval van de *stelling van Pythagoras* hier als een *definitie* gepresenteerd te zien.

Maar natuurlijk komen die definities niet uit de lucht vallen: ze sluiten direct aan bij onze ervaring. In veel situaties waarbij we te maken hebben met een plat vlak met punten, rechte lijnen en afstanden, blijkt het bovenstaande wiskundige model van de $\mathbb{R}^2$ met de gegeven definities van lijnen en afstanden daar prima bij te passen. Men noemt zo'n model een *euclidisch vlak* als eerbewijs aan Euclides die meer dan tweeduizend jaar geleden de eerste systematische behandeling van de meetkunde publiceerde. Niet altijd zal zo'n euclidisch model trouwens voldoen: heb je bijvoorbeeld te maken met meetkundige problemen op het oppervlak van een bol of een ander gekromd oppervlak, dan kun je meestal beter een ander model kiezen.

Overigens, zoals altijd bij toepassingen van de wiskunde is het ook hier goed om onderscheid te maken tussen model en werkelijkheid, hoe verleidelijk het ook is om ze met elkaar te identificeren. Het wiskundige model $\mathbb{R}^2$ is een idealisatie, een bedenksel van de menselijke geest. Daarin hebben punten geen afmetingen en lijnen geen dikte, terwijl dat in de werkelijkheid die erdoor gemodelleerd wordt, natuurlijk wel het geval is. En de $\mathbb{R}^2$ strekt zich onbeperkt naar alle kanten uit, hetgeen bij een vlak in werkelijkheid nooit het geval kan zijn. Iets soortgelijks doet zich natuurlijk ook al voor als we de $\mathbb{R}$ als model nemen van een tastbare lijn met een schaalverdeling erop, of als we de $\mathbb{R}^3$ als wiskundig model nemen voor de ons omringende ruimte.

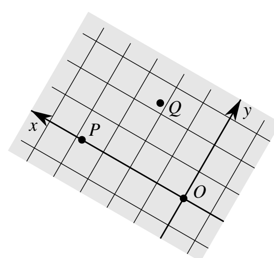
Isometrische coördinatentransformaties

Ik noemde al de vrijheid die je hebt bij het kiezen van een cartesisch coördinatenstelsel. Wat gebeurt er als je een ander cartesisch coördinatenstelsel kiest? In dat andere stelsel zal de afstand van elk puntenpaar hetzelfde moeten zijn als in het oorspronkelijke stelsel. Voor elk tweetal punten P_1 en P_2 moet dus gelden dat $d(P_1, P_2) = d'(P_1, P_2)$, waarbij $d(P_1, P_2)$ de afstand in het eerste stelsel, en $d'(P_1, P_2)$ die in het tweede stelsel is. Anders gezegd, als we de coördinaten van P_1 en P_2 in het nieuwe stelsel met accenten, en die in het oude stelsel zonder accenten aangeven, dan moet gelden dat

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2}$$

Een coördinatentransformatie die hieraan voldoet, heet *isometrisch*. De volgende stelling geeft een karakterisering van alle isometrische coördinatentransformaties van het euclidische vlak:

Stelling: Bij elk drietal punten O, P en Q in een euclidisch vlak die niet op één lijn liggen, is er precies één isometrische coördinatentransformatie met de eigenschap dat O in het nieuwe stelsel in de oorsprong, P op de positieve x-as en Q in het bovenhalfvlak ligt.



Figuur 3: De basisstelling.

De geldigheid ervan is intuïtief duidelijk: neem een transparant waarop een cartesisch coördinatenstelsel met de juiste schaalverdeling langs de assen getekend is, en leg die op het vlak met de oorsprong op O en P op de positieve x-as. Als Q dan al in het bovenhalfvlak blijkt te liggen, ben je klaar, anders moet je de transparant om de lijn OP omklappen (zie figuur 3).

Ook het bewijs van deze stelling is niet moeilijk. Stel dat $O = (a_1, a_2)$, $P = (b_1, b_2)$, $Q = (c_1, c_2)$ in het oorspronkelijke stelsel. Noem $p = d(O, P) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$. Het is een eenvoudige oefening in haakjes uitwerken en vereenvoudigen om te verifiëren dat de coördinatentransformatie

$$\begin{aligned} x' &= \frac{b_1 - a_1}{p}(x - a_1) + \frac{b_2 - a_2}{p}(y - a_2) \\ y' &= -\frac{b_2 - a_2}{p}(x - a_1) + \frac{b_1 - a_1}{p}(y - a_2) \end{aligned}$$

isometrisch is en dat in de nieuwe coördinaten geldt dat $O = (0,0)$ en $P = (p,0)$. Als in het nieuwe stelsel geldt dat de tweede coördinaat van Q positief is, zijn we klaar, en anders moeten we nog de isometrische coördinatentransformatie $x'' = x'$, $y'' = -y'$ toepassen.

Hiermee is de existentie van zo'n transformatie bewezen. Een bewijs van de uniciteit laat ik aan de lezer over. Wie er niet uitkomt, kan de Syllabustekst van mijn bijdrage [1] aan de CWI-Vacantiecursus 1998 raadplegen, waar ik deze stelling als basis genomen heb voor een opbouw van de vlakke euclidische meetkunde. Op mijn homepage staat een geactualiseerde versie van deze tekst.

Vrijwel alle meetkundestellingen van de formulekaart worden in de genoemde syllabustekst met behulp van de bovenstaande stelling bewezen. Elk bewijs is helder en slechts een paar regels lang. Sommige bewijzen verlopen in grote trekken hetzelfde als bij de traditionele, op Euclides teruggaande axiomatische behandelingswijze. Maar vooral bij de meer fundamentele stellingen is de winst groot, omdat zich daarbij wreekt dat een correcte, volledig axiomatische afleiding uiterst moeizaam en omslachtig is. Wat er nu dus op school gebeurt, is dat men die moeilijkheden achteloos onder tafel schuift en een grote collectie stellingen presenteert die de leerlingen zonder bewijs moeten accepteren. Leerlingen die naar achtergronden vragen, moeten met een kluitje in het riet worden gestuurd, want je kunt ze moeilijk verwijzen naar Hilbert, Van der Waerden of anderen die de omissies in de axiomatische opbouw van Euclides hebben gerepareerd. In [1] ga ik uitgebreider op deze problematiek in.

Meer voorbeelden

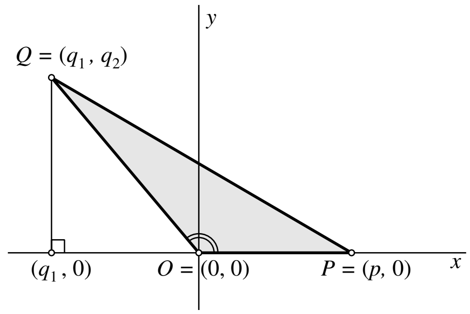
Hier wil ik nog een paar voorbeelden van korte, elegante bewijzen geven met behulp van coördinaten. Ik begin met een bewijs van de cosinusregel.

Stelling (cosinusregel): Voor elk drietal verschillende punten O, P en Q geldt

$$d(P,Q)^2 = d(O,P)^2 + d(O,Q)^2 - 2d(O,P)d(O,Q)\cos\angle POQ$$

Bewijs: Kies coördinaten $O = (0,0)$, $P = (p,0)$ en $Q = (q_1,q_2)$ met $p > 0$, $q_2 \geq 0$. Dan is $q_1 = d(O,Q)\cos\angle POQ$ dus

$$\begin{aligned} d(P,Q)^2 &= (p - q_1)^2 + (0 - q_2)^2 = p^2 + {q_1}^2 + {q_2}^2 - 2pq_1 \\ &= d(O,P)^2 + d(O,Q)^2 - 2d(O,P)d(O,Q)\cos\angle POQ \end{aligned}$$



Figuur 4: De cosinusregel.

Omdat $\angle POQ$ recht is dan en slechts dan als $\cos\angle POQ = 0$, volgen hieruit tegelijkertijd de stelling van Pythagoras en de omgekeerde stelling van Pythagoras. Een ander gevolg van de cosinusregel is de driehoeksongelijkheid:

Stelling (driehoeksongelijkheid): Voor elk drietal verschillende punten O, P en Q geldt

$$d(P,Q) \leq d(O,P) + d(O,Q)$$

met gelijkheid dan en slechts dan als O op het lijnstuk PQ ligt.
Bewijs: Schrijf de cosinusregel als

$$d(P,Q)^2 = (d(O,P) + d(O,Q))^2 - 2d(O,P)d(O,Q)(1 + \cos\angle POQ)$$

Hieruit volgt de driehoeksongelijkheid direct, met gelijkheid dan en slechts dan als $\cos\angle POQ = -1$, dat wil zeggen als O op het lijnstuk PQ ligt.

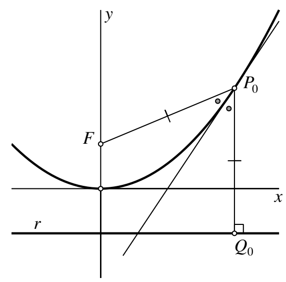
De parabool

Op de formulekaart staan verder nog enige eigenschappen van parabolen, ellipsen en hyperbolen vermeld. Ook die kunnen met behulp van coördinaten snel bewezen worden. Ik begin met de parabool, die in deze context gedefinieerd wordt als de verzameling van alle punten met gelijke afstanden tot een gegeven punt F (het brandpunt) en een lijn r (de richtlijn). Kies cartesische coördinaten zo, dat $F = (0, p)$ en zo, dat r de vergelijking $y = -p$ heeft. Dan geldt voor elk punt $P = (x, y)$ op de parabool

$$d(P,F) = d(P,r) \quad \iff \quad \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{0^2 + (y+p)^2}$$

en die vergelijking kan worden vereenvoudigd tot

$$x^2 = 4py$$



Figuur 5: De parabool.

of, anders geschreven, $y = \frac{1}{4p}x^2$.

Neem nu een vast punt $P_0 = (x_0, y_0)$ op de parabool (zie figuur 5). Gezien de definitie ligt P_0 ook op de middelloodlijn van FQ_0, waarbij $Q_0 = (x_0, -p)$ het voetpunt is van de loodlijn uit P_0 op r. En omdat het de middelloodlijn is, maakt die lijn gelijke hoeken met FP_0 en Q_0P_0. De vergelijking van de middelloodlijn krijg je door $d(X, F) = d(X, Q_0)$ uit te werken:

$$x^2 + (y - p)^2 = (x - x_0)^2 + (y + p)^2$$

oftewel

$$4py - 2x_0x + x_0^2 = 0$$

Deze lijn gaat inderdaad door $P_0 = (x_0, y_0)$ want $x_0^2 = 4py_0$. Hij heeft richtingscoëfficiënt $x_0/2p$ en dus is het de raaklijn in P_0 aan de parabool.

Ellips en hyperbool

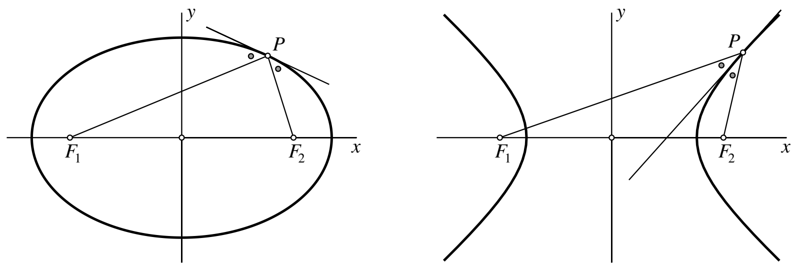
Een soortgelijke behandeling van de ellips en de hyperbool vergt wat meer rekenvaardigheid, maar moeilijk is het niet. Beide soorten krommen hebben twee brandpunten F_1 en F_2, en in deze context wordt een ellips gedefinieerd als de verzameling van alle punten P waarvoor $d(P, F_1) + d(P, F_2)$ constant is, terwijl bij de hyperbool de eis is dat $|d(P, F_1) - d(P, F_2)|$ constant is (zie figuur 6).

Ik begin met de ellips en kies een cartesisch coördinatenstelsel zo, dat $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$. Een punt $P = (x, y)$ op de ellips moet dan voldoen aan

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

voor een zeker vast getal a met $a > c$. Kwadrateren en uitwerken geeft

$$2x^2 + 2y^2 + 2c^2 + 2\sqrt{(x + c)^2 + y^2}\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 4a^2$$



Figuur 6: De ellips en de hyperbool.

Delen door 2, wortels aan één kant isoleren en nogmaals kwadrateren geeft

$$((x+c)^2+y^2)((x-c)^2+y^2) = (2a^2-(x^2+y^2+c^2))^2$$

oftewel (wat zijn die merkwaardige producten toch handig!)

$$(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2 = 4a^4+(x^2+y^2+c^2)^2-4a^2(x^2+y^2+c^2)$$

dus (vereenvoudigen en delen door 4)

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Met $b^2 = a^2 - c^2$ geeft dit na delen door a^2b^2 de gebruikelijke standaardvorm voor de ellips:

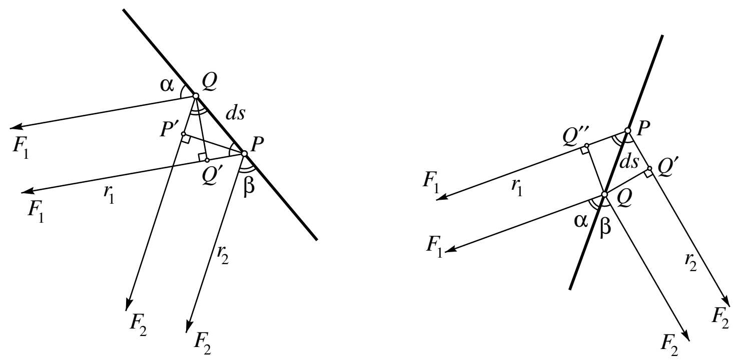
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

De berekening bij de hyperbool is exact dezelfde (bij de tweede maal kwadrateren verdwijnt het minteken), alleen geldt hier $c > a$ en dus moeten we nu $b^2 = c^2 - a^2$ stellen, met als resultaat

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$$

Om de raaklijneneigenschap van ellipsen en hyperbolen te bewijzen, gebruik ik een idee dat ook ten grondslag ligt aan vrijwel alle toepassingen van de calculus: lineariseren. Het gaat om de eigenschap dat voor elk punt P op een ellips of een hyperbool de lijnen PF_1 en PF_2 gelijke hoeken maken met de raaklijn in P (zie figuur 6). Het idee is nu om twee naburige punten P en Q op de ellips te nemen die zo dicht bij elkaar liggen, dat de lijn PQ praktisch gesproken met de raaklijn in P samenvalt. Om de gedachten te bepalen: maak de ellips zo groot dat $ds = d(P,Q)$ ongeveer een centimeter lang is en de afstanden $r_1 = d(P,F_1)$ en $r_2 = d(P,F_2)$ in de orde van grootte liggen van de afstand van de aarde tot de zon (zie figuur 7, links).

Omdat de lijnen PF_1 en QF_1 dan (praktisch) evenwijdig zijn, maken ze dezelfde hoek α met PQ, en omdat PF_2 en QF_2 dan (praktisch) evenwijdig zijn, maken



Figuur 7: Bij het bewijs van de raaklijneneigenschap van de ellips (links) en de hyperbool (rechts).

ze dezelfde hoek β met PQ. Noem Q' de projectie van Q op PF_1 en noem P' de projectie van P op QF_2. Dan is $dr_1 = \mp d(P, Q') = \mp ds \cos\alpha$ de toename van r_1 en $dr_2 = \pm d(Q, P') = \pm ds \cos\beta$ de toename van r_2 bij de overgang van P naar Q (merk op dat ze altijd tegengesteld van teken zijn als ds voldoende klein is!). Maar we weten dat $r_1 + r_2 = 2a$ constant is, en dus geldt $dr_1 + dr_2 = 0$ zodat $\alpha = \beta$, zoals bewezen moest worden. Het bewijs bij de hyperbool gaat vrijwel net zo, alleen hebben daar dr_1 en dr_2 altijd hetzelfde teken wanneer ds voldoende klein is (zie figuur 7, rechts).

Tot slot

Hierboven heb ik aansluiting gezocht bij moderne methodes in de meetkunde en de wiskunde in het algemeen. Let wel, ik voer hiermee geen pleidooi om de vlakke euclidische meetkunde in het programma voor de hoogste klassen van het vwo op te nemen of te handhaven. Integendeel, het lijkt me dat er verstandiger keuzes te maken zijn, bijvoorbeeld complexe getallen of eenvoudige vectorrekening. Wat je volgens mij op school als verplichte stof aan meetkunde zou moeten behandelen en hoe je dat zou moeten doen, staat in het *Basisboek Wiskunde* [2].

Maar als je op school toch voor de euclidische meetkunde kiest, bijvoorbeeld als keuzeonderwerp, behandel die dan op een manier die aansluit op de moderne wiskunde en die methodologisch goed voorbereidt op later gebruik van de wiskunde op hbo en universiteit, met name in de exacte en de economische studierichtingen. Denk bijvoorbeeld aan de techniek, de econometrie, de natuurkunde (mechanica, relativiteitstheorie) of aan *computer graphics*. Bij al die toepassingen begin je met verstandige coördinatenkeuzes.

Verwijzingen:
1. Jan van de Craats: *De vlakke meetkunde terug op school*, in: Syllabus CWI Vacantiecursus 1998, *Meetkunde, oud en nieuw*, ISBN 90-6196-478-4, pp. 27-57.
Een geactualiseerde versie hiervan staat op mijn homepage:
`www.science.uva.nl/~craats`.
Die syllabustekst bevat ook enige tientallen oefenopgaven. Ik heb het voornemen dit materiaal te zijner tijd voor liefhebbers verder uit te werken als een Zebra-boekje of iets dergelijks.
2. Jan van de Craats en Rob Bosch: *Basisboek Wiskunde*, Pearson Education Benelux, 2005, ISBN 90-430-1156-8.

Jan van de Craats (e-mail-adres: `craats@science.uva.nl`) is hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit.