

# **WACHTTIJDTHEORIE**

**Rob Bosch**

**Jan van de Craats**



# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Het Poissonproces</b>	<b>1</b>
1.1	De Poissonverdeling . . . . .	2
1.2	Voorbeelden . . . . .	4
1.3	Van binomiaal naar Poisson . . . . .	6
1.4	Bedieningstijden en de negatief-exponentiële verdeling . . . . .	8
1.5	Opgaven . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Inleiding Wachtrijen</b>	<b>13</b>
2.1	Het overgangsdigram . . . . .	13
2.2	Stationaire toestanden en evenwichtskansen . . . . .	17
2.3	De relaties van Little . . . . .	25
2.4	Opgaven . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Wachtrijmodellen</b>	<b>31</b>
3.1	Onbeperkte capaciteit . . . . .	31
3.1.1	Inleiding . . . . .	31
3.1.2	Evenwichtskansen . . . . .	32
3.1.3	Wachtrij en wachttijden . . . . .	34
3.1.4	Opgaven (theorie) . . . . .	37
3.1.5	Opgaven (toepassingen) . . . . .	37
3.1.6	De spreiding in de lengte van de wachtrij . . . . .	40
3.2	Beperkte capaciteit . . . . .	42
3.2.1	De evenwichtskansen . . . . .	42
3.2.2	De wachtrij en de wachttijden . . . . .	45
3.2.3	Een bijzonder geval: $B = 1$ . . . . .	47
3.2.4	Opgaven . . . . .	48
3.3	Systemen met meerdere loketten . . . . .	50
3.3.1	Geen wachtgelegenheid . . . . .	50
3.3.2	Twee loketten met onbegrensde wachtgelegenheid . . . . .	53
3.3.3	Opgaven . . . . .	56
<b>A</b>	<b>Formules</b>	<b>59</b>
<b>B</b>	<b>Antwoorden bij de opgaven</b>	<b>65</b>

Dit is de tekst van een collegedictaat uit 2001 voor de  
Koninklijke Militaire Academie te Breda.

© copyright 2001 dr. R. Bosch en prof.dr. J. van de Craats

## Hoofdstuk 1

# Het Poissonproces

Het Poissonproces is een discreet kansmodel voor allerlei kanssituaties waarin sprake is van gebeurtenissen die zich onvoorspelbaar, maar toch met een zekere ‘gemiddelde’ regelmaat voordoen. Hier zijn enige voorbeelden:

- Bij een werkplaats worden met onregelmatige tussenpozen instrumenten ter reparatie aangeboden. Ervaring heeft geleerd dat er gemiddeld 12 reparaties per uur binnenkomen.
- Bij een supermarkt komen op koopavond gemiddeld 50 klanten per kwartier de winkel binnen.
- Bij een telefooncentrale komen op werkdagen overdag gemiddeld 35000 gesprekken per uur binnen.
- Een Geigerteller registreert bij een radioactief preparaat gemiddeld 12 tikken per minuut.

In al deze gevallen wil men een wiskundig kansmodel opstellen voor het aantal ‘successen’ in een zekere tijdsperiode, waarbij we onder een succes een ‘meetende’ gebeurtenis verstaan: resp. de binnenkomst van een reparatie, een klant, een telefoongesprek of een tik van de Geigerteller. We willen dan vragen kunnen beantwoorden als: hoe groot is de kans dat er op een dag meer dan 100 reparaties binnenkomen? hoe groot is de kans dat er op een koopavond minder dan 100 klanten in de winkel komen? hoe groot is de kans dat er in een bepaalde minuut meer dan 1000 gesprekken binnenkomen (waardoor de centrale overbelast raakt)? hoe groot is de kans dat de Geigerteller in één minuut minder dan 15, maar meer dan 10 tikken registreert?

Essentieel bij zo’n proces is dat we informatie hebben over *gemiddelde* aantallen successen. In veel gevallen is het redelijk om te veronderstellen dat die gemiddelde aantallen evenredig zijn met de lengte van het tijdsinterval dat we bekijken: een twee maal zo lang interval levert gemiddeld ook twee maal zo veel

successen op. Als we de bijbehorende evenredigheidsfactor  $\lambda$  noemen<sup>1</sup>, is het gemiddelde aantal successen in een tijdsinterval van lengte  $\tau$  dus gelijk aan  $\lambda\tau$ . We kunnen  $\lambda$  opvatten als het aantal successen per tijdseenheid. Afhankelijk van de situatie kan die tijdseenheid bijvoorbeeld een seconde, een minuut, een kwartier, een uur, een dag of een jaar zijn. Het is natuurlijk voor de toepassingen van groot belang om die tijdseenheid van tevoren goed af te spreken. Het gemiddelde aantal successen in een tijdsperiode van lengte  $\tau$  is  $\lambda\tau$ , maar het *werkelijke* aantal successen in die tijdsperiode hangt van het toeval af. Het is een stochastische variabele, die we  $\underline{k}$  zullen noemen, dus

$$\underline{k} = \text{aantal successen in tijdsperiode } \tau$$

We hebben voor  $\underline{k}$  nog geen kansfunctie gedefinieerd, maar we weten wel wat de verwachting zal moeten zijn, namelijk

$$E(\underline{k}) = \lambda\tau.$$

Verder zal  $\underline{k}$  een discrete stochastische variabele zijn: het aantal successen kan immers slechts de gehele waarden 0, 1, 2, 3, ... aannemen.

## 1.1 De Poissonverdeling

Hier is een formule voor de kansfunctie die men in zulke situaties gebruikt; in een aparte paragraaf zullen we er een intuïtieve afleiding van geven.

$$P(\underline{k} = k) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} \quad \text{voor } k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

We verifiëren eerst dat dit inderdaad een kansfunctie is. De kansen moeten daartoe groter dan of gelijk aan nul zijn (dat klopt), en sommeren tot 1. Ook dat laatste klopt. Bij de verificatie daarvan gebruiken we de reeksontwikkeling van de  $e$ -macht.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} P(\underline{k} = k) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} \\ &= e^{-\lambda\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda\tau} e^{\lambda\tau} = 1 \end{aligned}$$

We kunnen nu ook direct verifiëren dat de verwachting gelijk is aan  $\lambda\tau$

$$E(\underline{k}) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(\underline{k} = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}$$

<sup>1</sup>In het Engels wordt  $\lambda$  vaak de *rate* van het proces genoemd. In dat woord herkennen we het latijnse woord *ratio*, dat in dit verband ook weer verhouding, dat wil zeggen evenredigheidsfactor, betekent.

$$\begin{aligned}
&= \lambda\tau e^{-\lambda\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda\tau e^{-\lambda\tau} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^j}{j!} \\
&= \lambda\tau e^{-\lambda\tau} e^{\lambda\tau} = \lambda\tau.
\end{aligned}$$

In één moeite door bepalen we nu ook de variantie. Als tussenstap berekenen we eerst de verwachting van de stochastische variabele  $\underline{k}(\underline{k} - 1)$ . Die is

$$\begin{aligned}
E(\underline{k}(\underline{k} - 1)) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) P(\underline{k} = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau} \\
&= (\lambda\tau)^2 e^{-\lambda\tau} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{k-2}}{(k-2)!} \\
&= (\lambda\tau)^2 e^{-\lambda\tau} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^j}{j!} \\
&= (\lambda\tau)^2 e^{-\lambda\tau} e^{\lambda\tau} = (\lambda\tau)^2
\end{aligned}$$

en dus is

$$\begin{aligned}
Var(\underline{k}) &= E(\underline{k}^2) - (E(\underline{k}))^2 = E(\underline{k}(\underline{k} - 1)) + E(\underline{k}) - (E(\underline{k}))^2 \\
&= (\lambda\tau)^2 + \lambda\tau - (\lambda\tau)^2 = \lambda\tau.
\end{aligned}$$

De variantie is dus gelijk aan de verwachting!

Het zal bij dit alles duidelijk zijn dat het voordelen heeft om voor  $\lambda\tau$  een kortere notatie te gebruiken. We kiezen

$$\alpha = \lambda\tau$$

en definiëren de *Poissonverdeling met parameter  $\alpha$*  als de kansverdeling die hoort bij de stochastische variabele  $\underline{k}$  met als kansfunctie

*Poisson-verdeling met parameter  $\alpha$*

$$P(\underline{k} = k) = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} \quad \text{voor } k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

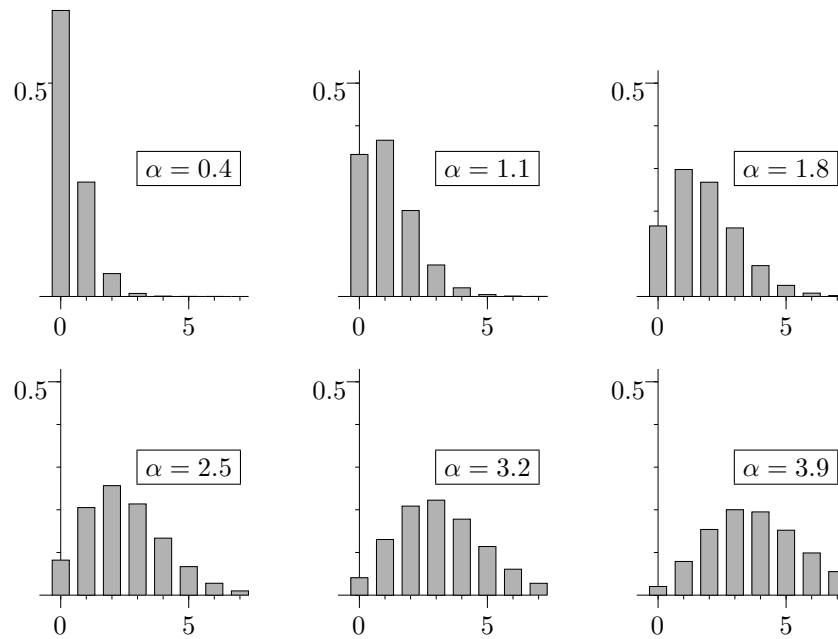
Voor de verwachting en de variantie van  $\underline{k}$  geldt

$$E(\underline{k}) = Var(\underline{k}) = \alpha$$

en de (cumulatieve) verdelingsfunctie van  $\underline{k}$  is

$$F(x) = \sum_{k \leq x} P(\underline{k} = k) = \sum_{k \leq x} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}.$$

Zowel van de kansfunctie als van de cumulatieve verdelingsfunctie bestaan tabellen voor verschillende waarden van  $\alpha$ . In computeralgebrapakketten en spreadsheetprogramma's zijn deze functies echter voor alle waarden van  $\alpha$  'op afroep' beschikbaar. In Figuur 1.1 ziet u de kansfunctie in beeld gebracht voor  $\alpha = 0.4, 1.1, \dots 3.9$ .



Figuur 1.1: Kansfuncties van de Poissonverdeling

## 1.2 Voorbeelden

In de vorige eeuw zijn er door 10 Pruisische legercorpsen in een periode van 20 jaar (1875-1894) statistieken bijgehouden van dodelijke slachtoffers van een trap van een paard<sup>2</sup>. Elk corps meldde jaarlijks het aantal dodelijke ongevallen. Hier is een overzicht van die 200 meldingen, gerangschikt naar de gemelde aantallen. Daarbij is  $k$  het aantal slachtoffers bij zo'n melding, en  $n(k)$  het aantal meldingen

<sup>2</sup>(L. v. Bortkiewicz, *Das Gesetz der kleinen Zahlen*, Leipzig, 1898, geciteerd in E. Kreyszig, *Introductory Mathematical Statistics*, New York, 1970, p. 99)}



met  $k$  slachtoffers.

$k$	$n(k)$
0	109
1	65
2	22
3	3
4	1
$\geq 5$	0

Het gemiddelde aantal slachtoffers per melding bedraagt

$$\alpha = \frac{1}{200}(0 \cdot 109 + 1 \cdot 65 + 2 \cdot 22 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1) = 0.61.$$

Nemen we de Poissonverdeling  $\underline{k}$  met deze waarde  $\alpha = 0.61$  als parameter, dan kunnen we de bijbehorende kansen  $P(\underline{k} = k)$  voor  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  berekenen. De volgende tabel laat zien dat ze, na vermenigvuldiging met 200, zeer goed met de geregistreerde gegevens overeenkomen:

Aantal legercorps-jaren met $k$ slachtoffers		
$k$	gemelde $n(k)$	$200 \times P(\underline{k} = k)$
0	109	108.7
1	65	66.3
2	22	20.2
3	3	4.1
4	1	0.6
$\geq 5$	0	0.1

Een ander voorbeeld<sup>3</sup> betreft de gegevens van een onderzoek naar alphadeeltjes uit 1910 van E. Rutherford en H. Geiger. Zij telden het aantal vrijgekomen deeltjes in 2608 intervallen van 7.5 seconde. De linkerkolom geeft het aantal  $k$ , de middelste kolom geeft het aantal tijdsintervallen waarin  $k$  deeltjes werden geteld, en in de rechterkolom staan de (afgeronde) theoretische waarden die verkregen zijn met behulp van de Poissonverdeling met het gemiddelde  $\alpha =$

<sup>3</sup>Kreiszig, *ibid.*, p. 100

3.870 van de geobserveerde waarden als parameter.

$k$	Aantal tijdsintervallen met $k$ deeltjes	
	geobserveerd	theoretisch
0	57	54.4
1	203	210.5
2	383	407.3
3	525	525.5
4	532	508.4
5	408	393.6
6	273	253.8
7	139	140.4
8	45	67.9
9	27	29.2
10	10	11.3
11	4	4.0
12	2	1.3
$\geq 13$	0	0.5

Niet in alle toepassingen van de Poissonverdeling treedt de tijd als variabele op. Men kan bijvoorbeeld ook kijken naar het aantal drukfouten per bladzijde in een boek. Telt men het aantal bladzijden met 0, 1, 2, 3, ... drukfouten, dan blijkt dat men deze aantallen goed met een Poissonverdeling kan modelleren.

Weer een andere militaire context betreft het aantal bomkraters in een gebombardeerd gebied. Verdeelt men dat gebied in kleine vierkante deelgebieden, en meet men het aantal inslagen per deelvierkant, dan verkrijgt men een frequentieverdeling (d.w.z. de verdeling naar het aantal vierkanten met 0, 1, 2, ... inslagen) die ook weer met een Poissonverdeling kan worden gemodelleerd.

### 1.3 Van binomiaal naar Poisson

We zullen nu een intuïtieve afleiding geven van de formule voor de Poissonverdeling met parameter  $\alpha = \lambda\tau$ . Daartoe verdelen we het tijdsinterval  $\tau$  in  $n$  gelijke deelintervallen, waarbij we  $n$  zeer groot nemen. In zo'n deelinterval zal de kans  $p$  op een 'succes' (bijvoorbeeld de aankomst van een klant in de winkel) zeer klein zijn. In theorie is het ook mogelijk dat er in zo'n deelinterval meer dan één succes optreedt, maar de kans daarop is nog veel kleiner. We verwaarlozen die kans, en hebben dan te maken met  $n$  deelintervallen, elk met een zelfde kleine kans  $p$  op succes. Tellen we het totale aantal successen gedurende het tijdsinterval  $\tau$ , dan krijgen we een stochastische variabele  $\underline{b}_n$  die binomiaal verdeeld is met parameters  $n$  en  $p$ . De verwachting daarvan is  $np$ , en die moet gelijk zijn aan  $\lambda\tau$ , dus

$$np = \lambda\tau = \alpha. \quad (1.3)$$

De succeskans  $p$  hangt dus af van het aantal deelintervallen  $n$ . Hoe groter  $n$  is, des te kleiner is  $p$ , maar het product  $np$  behoudt steeds dezelfde waarde  $\lambda\tau = \alpha$ ,

de parameterwaarde van het Poissonproces. Ter herinnering:  $\alpha$  is gelijk aan het gemiddelde aantal successen dat optreedt in het tijdsinterval  $\tau$ . Voor de kansverdeling van  $\underline{b}_n$  geldt volgens de formule voor de binomiale verdeling

$$P(\underline{b}_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

We zullen nu laten zien dat deze kans voor  $n \rightarrow \infty$  nadert tot de door (1.2) gedefinieerde kans op  $k$  successen bij de Poissonverdeling met parameter  $\alpha$ . Daartoe gebruiken we  $np = \alpha$  om  $P(\underline{b}_n = k)$  als volgt te herleiden:

$$\begin{aligned} P(\underline{b}_n = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} (1-p)^{-k} \frac{(np)^k}{k!} \left(1 - \frac{np}{n}\right)^n \\ &= \left[ \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \right] \left[ \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{-k} \right] \frac{\alpha^k}{k!} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Voor vaste  $k$  en voor  $n \rightarrow \infty$  naderen de beide stukken tussen vierkante haken elk tot 1, terwijl volgens een standaardlimiet geldt dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{-\alpha}.$$

Alles tezamen geeft dit dus inderdaad het gewenste resultaat (vergelijk (1.2)):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\underline{b}_n = k) = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} = P(\underline{k} = k).$$

Dit resultaat kan men ook gebruiken om kansen van een binomiale verdeling met  $n$  groot,  $p$  klein, maar  $np$  niet erg groot of klein, te benaderen met behulp van een Poissonverdeling met parameter  $\alpha = np$ . Als niet  $p$ , maar juist  $(1-p)$  erg klein is, kan men natuurlijk hetzelfde doen, maar dan met verwisseling van de rollen van ‘succes’ en ‘mislukking’. Dat wil zeggen dat men dan met  $\alpha = n(1-p)$  moet werken.

Als illustratie geven we nog een tabel waarin voor  $k = 0, \dots, 15$  naast elkaar de kansen staan (op 5 decimalen afgerond) voor de binomiale verdelingen met  $np = 4$  en resp.  $(n, p) = (100, 0.04)$ ,  $(n, p) = (1000, 0.004)$  en  $(n, p) = (10000, 0.0004)$ ,

en de Poissonverdeling met  $\alpha = 4$ .

$k$	binomiaal, $np = 4$			Poisson
	$p = 0.04$ $n = 100$	$p = 0.004$ $n = 1000$	$p = 0.0004$ $n = 10000$	$\alpha = 4$
0	0.01687	0.01817	0.01830	0.01832
1	0.07029	0.07297	0.07323	0.07326
2	0.14498	0.14638	0.14651	0.14653
3	0.19733	0.19556	0.19538	0.19537
4	0.19939	0.19576	0.19540	0.19537
5	0.15951	0.15661	0.15632	0.15629
6	0.10523	0.10430	0.10420	0.10420
7	0.05888	0.05948	0.05953	0.05954
8	0.02852	0.02965	0.02976	0.02977
9	0.01215	0.01313	0.01322	0.01323
10	0.00461	0.00522	0.00529	0.00529
11	0.00157	0.00189	0.00192	0.00192
12	0.00049	0.00062	0.00064	0.00064
13	0.00014	0.00019	0.00020	0.00020
14	0.00004	0.00005	0.00006	0.00006
15	0.00001	0.00001	0.00001	0.00002

## 1.4 Bedieningstijden en de negatief-exponentiële verdeling

*geheugenloosheid van het Poissonproces*

Bij een Poissonproces met  $\mu$  successen per tijdseenheid is de tijdsduur die verloopt tussen twee opvolgende successen een continue stochastische variabele  $\underline{t}$  die niet afhangt van het aantal successen dat in het verleden is opgetreden: het Poissonproces is *geheugenloos*. Immers, de kans dat er bij een Poissonproces met parameter  $\mu$  gedurende een tijdsinterval van lengte  $\tau$  precies  $k$  successen optreden, is volgens formule (1.1) slechts afhankelijk van  $\mu$  en  $\tau$ , en niet van wat er in het verleden gebeurd is.

Nemen we in het bijzonder  $\tau = t$  en  $k = 0$ , dan krijgen we de kans dat er in een interval van lengte  $t$  geen successen optreden, en dat is hetzelfde als de kans dat de tijdsduur tussen twee opvolgende successen groter is dan  $t$ :

$$P(\underline{t} > t) = \frac{(\mu t)^0}{0!} e^{-\mu t} = e^{-\mu t}$$

Hiermee kunnen we de verdelingsfunctie  $F(t) = P(\underline{t} \leq t)$  van  $\underline{t}$  berekenen:

$$F(t) = P(\underline{t} \leq t) = 1 - P(\underline{t} > t) = 1 - e^{-\mu t}.$$

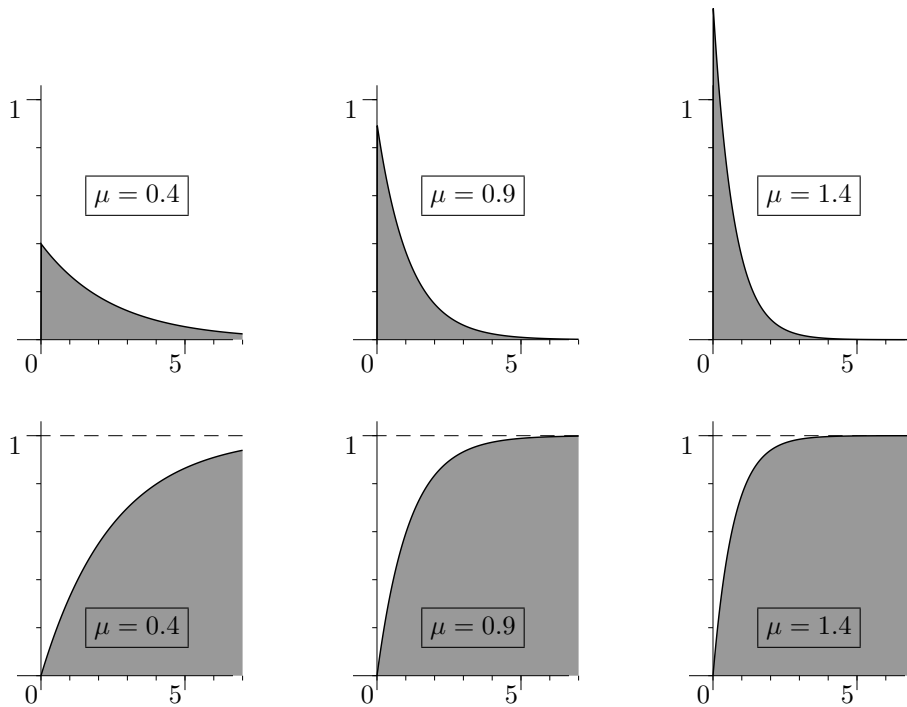
Dit is dus de negatief-exponentiële verdeling met parameter  $\mu$  die al in het dictaat Kansrekening en Statistiek (MB2) behandeld is. We kennen van deze verdeling de kansdichtheidsfunctie

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) = \mu e^{-\mu t}$$

en ook de verwachting en de variantie:

$$E(t) = \frac{1}{\mu} \quad \text{en} \quad \text{Var}(t) = \frac{1}{\mu^2}.$$

In Figuur 1.2 ziet u grafieken van de kansdichtheidsfunctie (boven) en de verdelingsfunctie (onder) voor drie waarden van  $\mu$ .



*Figuur 1.2: Kansdichtheidsfuncties (boven) en verdelingsfuncties (onder) voor de negatief-exponentiële verdeling met drie verschillende parameterwaarden.*

In veel wachtrij-situaties is de bedieningstijd aan een loket afhankelijk van het toeval. Het eenvoudigste is het wanneer er aan het loket alleen een standaardhandeling wordt uitgevoerd die altijd even lang duurt, maar dat zal weinig voorkomen. Zelfs bij standaardhandelingen zijn er meestal kleine fluctuaties. Men kan die dan vaak goed modelleren via een geschikte normale verdeling. Maar in veel praktijkgevallen is ook dat geen goed model. Bij een loket in een postkantoor zullen allerlei uiteenlopende handelingen verricht worden: er vinden relatief veel korte handelingen plaats, maar af en toe zijn er ook klanten die veel langer nodig hebben. De kansverdeling is daarom meestal scheef, zodat een normale verdeling geen goede resultaten geeft.

Het blijkt dat de negatief-exponentiële verdeling dan vaak wel een goed model oplevert. Intuïtief kunnen we ons dat als volgt voorstellen. Neem aan dat de loketbediende nooit stil hoeft te zitten: altijd is er weer een nieuwe klant zodra de vorige het loket verlaat. Als we dan alleen letten op de tijdstippen waarop klanten het loket verlaten, zien we een toevalsproces dat in veel gevallen als een Poissonproces kan worden gemodelleerd. De parameter  $\mu$  van dat proces geeft het gemiddelde aantal klanten per tijdseenheid dat het loket verlaat. De bedieningstijd  $\underline{t}$  is dan precies de tijd tussen twee ‘successen’, dat wil zeggen de tijd die verloopt tussen de momenten waarop twee opvolgende klanten het loket verlaten. We hebben hierboven gezien dat  $\underline{t}$  dan negatief-exponentieel verdeeld is met parameter  $\mu$ , en dat de verwachting van  $\underline{t}$ , dat wil dus zeggen de gemiddelde bedieningstijd, gelijk is aan

$$E(\underline{t}) = \frac{1}{\mu}.$$

Wanneer we bijvoorbeeld in zo’n situatie een loketbediende hebben die (bij continudienst) gemiddeld 12 minuten nodig heeft om een klant te helpen, en we kiezen 1 uur als tijdseenheid, dan zien we dat we de bedieningstijd  $\underline{t}$  kunnen modelleren met een stochastische variabele die negatief-exponentieel verdeeld is met parameter  $\mu$  waarvoor geldt dat  $E(\underline{t}) = 1/\mu = 12/60 = 1/5$ , dus  $\mu = 5$ . Anders gezegd: de bediende zou bij continudienst gemiddeld  $\mu = 5$  klanten per uur kunnen bedienen. In werkelijkheid zullen er natuurlijk ook periodes zijn waarin hij geen klanten heeft, maar dat heeft op het kansmodel voor de bedieningstijd per klant geen invloed.

We zien dus dat er in zo’n wachtrijsysteem twee Poissonverdelingen optreden: een Poissonverdeling met parameter  $\lambda$  en een Poissonverdeling met parameter  $\mu$ . De eerste modelleert het aankomstproces van klanten in het systeem, en de tweede modelleert indirect, namelijk via de daarvan afgeleide negatief-exponentiële verdeling, de bedieningstijd  $\underline{t}$ . De *gemiddelde* bedieningstijd is daarbij gelijk aan de verwachting  $E(\underline{t})$  van  $\underline{t}$ , en we weten dat die gelijk is aan  $1/\mu$ .

In de *wachttijdtheorie* proberen we met behulp van zulke wiskundige modellen voor het aankomstproces en het bedieningsproces uitspraken te doen omtrent de gemiddelde lengte van de wachtrij, de gemiddelde verblijfsduur van een klant in het postkantoor (in de rij of aan het loket), het gemiddelde aantal klanten in het postkantoor, etc., etc.

## 1.5 Opgaven

1. Bij een computercentrum blijken per uur gemiddeld 3.14 storingsmeldingen binnen te komen. Bereken de kans dat er gedurende een willekeurig kwartier geen enkele storing binnenkomt onder de veronderstelling dat het aantal meldingen Poissonverdeeld is.
2. Een Geigerteller registreert bij een radioactief preparaat gemiddeld 15

- tikken per minuut. Hoe groot is de kans dat er in een periode van 10 seconden ten minste 3 tikken optreden?
3. Het aantal drukfouten in een boek bedraagt gemiddeld 0.23 per pagina. Hoe groot is de kans op hoogstens twee drukfouten in een hoofdstuk van 15 pagina's?
  4. De behandeling aan het loket van een postkantoor duurt gemiddeld 1.75 minuten.  
We nemen aan dat de behandelingstijd negatief-exponentieel verdeeld is. Bereken de kans dat een klant langer dan 3 minuten nodig heeft.
  5. Bij het spreekuur van een huisarts, die een drukke praktijk heeft met een volle wachtkamer, registreert de overbuurman de tijdstippen waarop de patienten weer naar buiten komen. Hij constateert dat er gemiddeld 2.71 patienten per kwartier het huis van de arts verlaten.  
Wat is de gemiddelde behandeltijd per patient, en hoe groot is de kans dat een consult langer dan 10 minuten duurt?
  6. Ook in de eetzaal treedt de Poissonverdeling op: een bord soep blijkt gemiddeld 3.88 ballen te bevatten. Bereken in twee decimalen nauwkeurig de kans dat een bord soep 3 of 4 ballen bevat.





## Hoofdstuk 2

# Inleiding Wachtrijen

### 2.1 Het overgangsdigram

In dit hoofdstuk stellen we een aantal wachttijdmodellen op. Deze modellen kunnen bijvoorbeeld betrekking hebben op een postkantoor, een telefooncentrale, een supermarkt met een of meerdere kassa's, of een machine waarop produkten worden gemaakt. We spreken in al dit soort gevallen van een *systeem*. Zo'n systeem kan zich in een aantal toestanden bevinden. In een postkantoor kunnen  $0, 1, 2, \dots$  klanten aanwezig zijn. Het aantal klanten dat in een supermarkt bij een van de kassa's afrekenet of in een rij voor een van de kassa's staat, kan ook weer  $0, 1, 2, \dots$  zijn. Hetzelfde geldt voor het aantal produkten dat op een machine een behandeling ondergaat of klaarligt om behandeld te worden. De toestanden waarin het systeem zich kan bevinden, kan men in al deze gevallen aangeven met  $0, 1, 2, \dots$ .

Bij een informatienummer van de KPN is de wachtrij meestal beperkt. Indien er bijvoorbeeld 5 wachtenden zijn, krijgt de volgende beller een ingesprektoon. In dat geval zijn de toestanden waarin het systeem kan verkeren  $0, 1, 2, \dots, 6$ . Het systeem verkeert in toestand 6 indien er een klant geholpen wordt en er 5 wachten zijn. Er bevinden zich dan 6 klanten in het systeem.

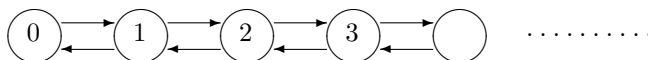
De toestanden waarin een systeem kan verkeren geven we in een plaatje als volgt weer:



*Figuur 2.1: Toestanden waarin het systeem kan verkeren*

In de loop van de tijd zal het systeem meerdere malen van toestand veranderen. Als een klant een leeg postkantoor binnenkomt, gaat het systeem van toestand 0 over naar toestand 1. Indien er 3 klanten staan te wachten en de klant aan

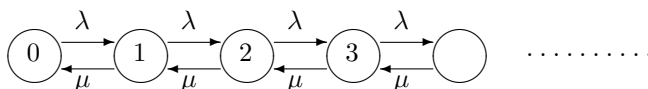
het loket vertrekt, verandert de toestand van 4 in 3. (Als er 3 mensen wachten, zijn er 4 personen binnen!) Deze toestandsveranderingen geven we in een plaatje weer door pijlen. Ze lopen van een bepaalde toestand naar de volgende toestand (als er een klant binnenkomt) of naar de voorafgaande toestand (als een klant vertrekt). We noemen zo'n plaatje dan een *toestandsdiagram*.



Figuur 2.2: Toestandsdiagram

In het toestandsdiagram kunnen we ook de snelheid aangeven waarmee de toestanden veranderen. We bekijken daartoe een klein tijdsinterval  $\Delta t$ . De kans dat er in zo'n klein interval twee of meer klanten het systeem binnenkomen, is zeer klein. We verwaarlozen die kans. We veronderstellen verder dat de kans dat het systeem in zo'n klein tijdsinterval van een bepaalde toestand in een volgende toestand overgaat, evenredig is met de lengte van het interval. De kans dat het systeem in zo'n tijdsinterval overgaat van toestand  $k$  naar toestand  $k + 1$  is dus  $\lambda \Delta t$  voor zekere evenredigheidsconstante  $\lambda$ . Men noemt  $\lambda$  de *rate* waarmee het systeem, als het in toestand  $k$  verkeert, naar toestand  $k + 1$  wil. De *rate* kan beschouwd worden als een soort 'kans per tijdseenheid' dat het systeem van toestand  $k$  naar toestand  $k + 1$  overgaat. We veronderstellen voor de eenvoud dat de *rate* voor iedere toestand  $k$  hetzelfde is. Wanneer het aankomstproces als een Poissonproces gemodelleerd kan worden, komt dit overeen met de geheugenloosheid van het proces: de aankomstkansen zijn dan onafhankelijk van de toestand waarin het systeem verkeert, dat wil zeggen het aantal klanten dat zich in het systeem bevindt.

Voor het vertrekproces geldt een soortgelijk verhaal. Voor een klein tijdsinterval  $\Delta t$  stellen we de kans dat er een klant vertrekt, gelijk aan  $\mu \Delta t$ . Het is hiervoor uiteraard noodzakelijk dat er überhaupt klanten in het systeem aanwezig zijn, dus dat  $k \geq 1$ . De *rate* waarmee het systeem van toestand  $k$  naar toestand  $k - 1$  wil, is dan gelijk aan  $\mu$ . Ook hier nemen we voorlopig aan dat die *rate* onafhankelijk is van  $k$  (voor  $k \geq 1$ ). We brengen deze situatie in beeld door middel van het volgende *overgangsdigram*



Figuur 2.3: Overgangsdigram

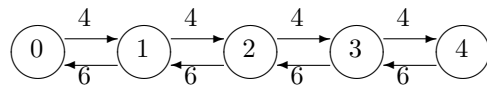
### Voorbeeld:

*Bij een 0900-informatienummer krijgen bellers een bandje te horen*

als er al een klant geholpen wordt. De stem op het bandje vertelt de beller hoeveel wachtenden voor hem zijn. Het aantal wachtenden kan maximaal 3 zijn. Als iemand opbelt terwijl er 3 wachtenden zijn dan krijgt hij een ingesprektoon. De beller zal in dit geval ophangen en het eventueel later nog eens proberen. Stel het overgangsdigram op van dit systeem als gegeven is dat er gemiddeld 4 mensen per uur opbellen en als de gemiddelde tijd om de gewenste informatie te krijgen gelijk is aan 10 minuten.

**Uitwerking:**

Als tijdseenheid kiezen we 1 uur. We merken op dat het systeem in 5 toestanden kan verkeren, te weten 0, 1, 2, 3 en 4. De toestanden geven het aantal klanten in het systeem aan. Voor het aankomstpatroon geldt  $\lambda = 4$  en voor het afhandelp proces geldt  $\mu = 6$ . De rates  $\lambda$  en  $\mu$  zijn voor alle toestanden gelijk, zodat het overgangsdigram er uitziet als in Figuur 2.4.



Figuur 2.4: Overgangsdigram bij een informatienummer

De rates hoeven niet voor iedere toestand gelijk te zijn. Als er een lange wachtrij staat, kan een deel van de klanten besluiten om op een later tijdstip terug te komen. Voor een toestand met veel klanten in het systeem wordt de aankomstrate dan kleiner. Als er een lange wachtrij staat kan het personeel sneller gaan werken of men kan een extra loket openen waardoor meer klanten per tijdseenheid geholpen kunnen worden. In dit geval neemt de rate om terug te keren naar een lagere toestand dus toe naarmate er meer klanten in het systeem zijn.

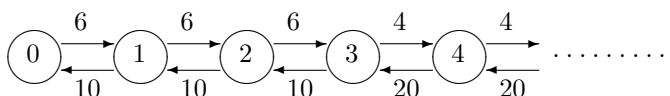
**Voorbeeld:**

In een postkantoor met twee loketten komen klanten aan volgens een Poissonproces met  $\lambda = 6$  per uur. De gemiddelde bedieningstijd bedraagt 6 minuten (dus  $\mu = 10$  per uur). Zodra er 3 of meer klanten in het postkantoor aanwezig zijn, besluit een deel van de aankomende klanten niet bij de wachtrij aan te sluiten, maar te vertrekken. Daardoor komen er dan nog maar gemiddeld 4 klanten per uur binnen. Er is in eerste instantie maar één loket open. Wanneer er echter 4 of meer klanten in het postkantoor aanwezig zijn wordt het tweede loket geopend. Als het aantal klanten weer daalt tot onder de 4 dan sluit men het tweede loket. Er wordt gewerkt met één wachtrij (de klanten moeten nummertjes trekken).

Stel het overgangsdigram op van dit systeem.

**Uitwerking:**

Als tijdseenheid nemen we weer 1 uur. Bij dit systeem zijn de *rates* niet constant. Vanaf toestand 3 is de *rate* waarmee het systeem naar een hogere toestand wil slechts 4 in plaats van de oorspronkelijke 6. Vanaf toestand 4 is de *rate* waarmee het systeem naar een lagere toestand wil 20 in plaats van de oorspronkelijke 10. Als er twee loketten geopend zijn dan kunnen immers gemiddeld twee keer zoveel klanten geholpen worden. Het overgangsdiaagram voor dit systeem ziet er dus als volgt uit.



*Figuur 2.5: Overgangsdiaagram bij een postkantoor*

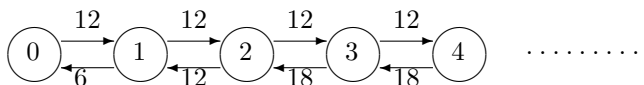
In een systeem waarbij meerdere loketten open zijn, hangt de *rate*  $\mu$  af van het aantal loketten dat daadwerkelijk bezet is. Het volgende voorbeeld illustreert dit.

**Voorbeeld:**

*In een postkantoor zijn 3 loketten open. De lokettisten werken allen met dezelfde snelheid. Een afhandeling van een klant aan één van de drie loketten kost gemiddeld 10 minuten. Het gemiddelde aantal klanten dat per uur het postkantoor binnenkomt, is gelijk aan 12. Stel het overgangsdiaagram van dit systeem op.*

**Uitwerking:**

Indien er 1 loket bezet is, kunnen er gemiddeld 6 klanten per uur worden geholpen. Als er 2 loketten bezet zijn dan kunnen er 12 klanten per uur worden geholpen. In het geval van 3 bezette loketten is dit aantal zelfs 18. De *rate*  $\mu$  is voor toestand 1 dus 6. Voor toestand 2 is de *rate*  $\mu$  gelijk aan 12 en voor alle hogere toestanden is de *rate* 18 (er zijn dan 3 loketten bezet). De aankomstrate  $\lambda$  is gelijk aan 12. Het overgangsdiaagram van het systeem is derhalve:



*Figuur 2.6: Overgangsdiaagram*

## 2.2 Stationaire toestanden en evenwichtskansen

Als de aankomstparameter  $\lambda$  kleiner is dan de bedieningsparameter  $\mu$ , kunnen er per tijdseenheid meer klanten geholpen worden dan er per tijdseenheid aankomen. In zo'n geval zal er geen oneindig lange wachtrij ontstaan. Dat neemt niet weg dat het aantal klanten in de wachtrij aanzienlijk kan oplopen. Op den duur ontstaat er dan vaak een *stationaire toestand*; men spreekt ook wel over een *evenwichtssituatie*. We illustreren dit aan de hand van een aantal voorbeelden. In het eerste voorbeeld speelt het toeval nog geen rol; het gaat dan alleen maar om een illustratie van het begrip stationaire toestand.

### Voorbeeld:

*Een stad A heeft 50000 inwoners, een stad B heeft 40000 inwoners. Per jaar verhuist 10% van de inwoners van stad A naar stad B. Per jaar verhuist 20% van de inwoners van stad B naar stad A.*

1. *Geef het inwonersverloop van de beide steden voor een periode van 10 jaar.*
2. *Hoeveel inwoners zullen de beide steden op den duur krijgen?*

### Uitwerking:

1. Het inwonersverloop is als volgt

jaar	van A naar B	van B naar A	$A_n$	$B_n$
0			50000	40000
1	5000	8000	53000	37000
2	5300	7400	55100	34900
3	5510	6980	56570	33430
4	5657	6686	57599	32401
5	5760	6480	58319	31681
6	5832	6336	58823	31177
7	5882	6236	59177	30823
8	5918	6164	59423	30577
9	5942	6116	59597	30403
10	5960	6081	59718	30282

Hierbij stellen  $A_n$  en  $B_n$  het aantal inwoners in stad A resp. stad B voor in jaar  $n$ . Merk op dat het aantal inwoners van stad A steeds toeneemt, terwijl het aantal inwoners van stad B gestaag afneemt. De toe- en afnames worden echter steeds kleiner. Het aantal inwoners dat van A naar B verhuist is na 10 jaar ongeveer gelijk aan het aantal inwoners dat van B naar A verhuist.

2. Zoals uit de bovenstaande tabel blijkt, zal het aantal mensen dat van A naar B gaat, op den duur gelijk zijn aan het aantal mensen dat van B naar A gaat. Als die situatie bereikt is, zal het inwonertal van de beide steden niet meer veranderen.

Het inwonertal van de beide steden in de stationaire situatie kunnen we als volgt berekenen. Stel dat in die toestand het aantal inwoners van stad  $A$  gelijk is aan  $a$ , en dat van  $B$  gelijk is aan  $b$ . Het aantal mensen dat per jaar van  $A$  naar  $B$  verhuist is dan gelijk aan  $0.1 \times a$ , en het aantal mensen dat per jaar van  $B$  naar  $A$  verhuist, is gelijk aan  $0.2 \times b$ . In de stationaire toestand moeten deze twee aantallen gelijk zijn, dus

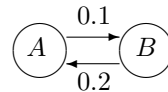
$$0.1 a = 0.2 b$$

Met deze ene vergelijking kunnen we de grootheden  $a$  en  $b$  niet bepalen. We weten echter ook dat het totale aantal inwoners in de beide steden samen gelijk is aan 90000, dus

$$a + b = 90000$$

Uit deze twee vergelijkingen volgt  $a = 60000$  en  $b = 30000$ . Op den duur zal stad  $A$  dus 60000 inwoners tellen en stad  $B$  30000. De tabel in onderdeel 1. gaf al aan dat het deze richting op zou gaan.

We kunnen voor dit probleem het volgende overgangsdiaagram opstellen.

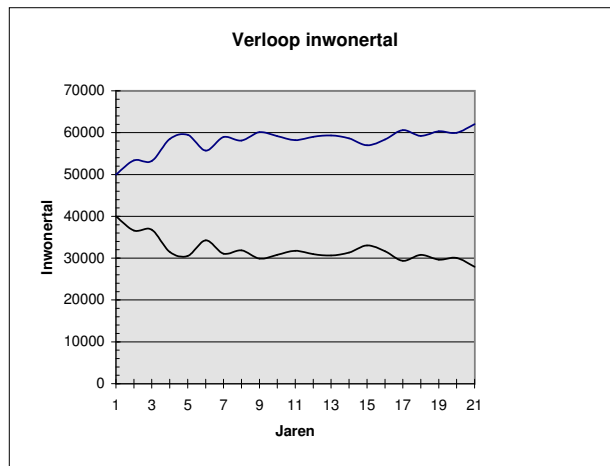


*Figuur 2.7: Overgangsdiaagram*

In de stationaire toestand geldt dat de (mensen)stroom uit  $A$  gelijk is aan de stroom die  $A$  binnenkomt en dat de (mensen)stroom uit  $B$  gelijk is aan de (mensen)stroom die  $B$  binnenkomt. Merk op dat het niet zo is dat er in deze toestand geen activiteit meer is. Er verhuizen in die situatie nog steeds mensen van  $A$  naar  $B$  en van  $B$  naar  $A$ . Echter de inwonertallen van de beide steden blijven gelijk. Bovendien blijkt uit de bovenstaande berekening dat de evenwichtssituatie onafhankelijk is van de beginsituatie. Als stad  $A$  in het begin 10000 inwoners zou hebben gehad en stad  $B$  80000, dan zou op den duur dezelfde evenwichtssituatie als in het voorbeeld zijn ontstaan.

Neem nu aan dat de overgangsaantallen door een toevalsproces bepaald worden, dat wil zeggen dat de overgangspersentages van  $A$  naar  $B$  en van  $B$  naar  $A$  stochastische variabelen zijn. Veronderstel daarbij ook dat de verwachtingen van die stochastische variabelen respectievelijk 10% en 20% zijn, dat wil zeggen dat *gemiddeld* jaarlijks 10% van de inwoners van  $A$  naar  $B$  verhuist en *gemiddeld* 20% van  $B$  naar  $A$ . Wanneer we de kansverdelingen van de beide stochastische

Jaar	Perc.	Perc.	A(n)	B(n)
0			50000	40000
1	10	21	53400	36600
2	12	17	53214	36786
3	6	23	58482	31518
4	8	18	59477	30523
5	14	15	55728	34272
6	9	24	58938	31062
7	13	22	58110	31890
8	7	19	60101	29899
9	10	17	59174	30826
10	11	18	58213	31787
11	9	19	59014	30986
12	11	22	59339	30661
13	12	21	58657	31343
14	13	19	56987	33013
15	8	18	58370	31630
16	7	20	60610	29390
17	13	22	59197	30803
18	9	21	60338	29662
19	10	19	59940	30060
20	7	21	62057	27943
<b>Gemiddelde</b>	over de	laatste 10 jaar	59451	30549



*Figuur 2.8: Excel-simulatie van de verhuispercentages en inwonersaantallen in twee steden A en B*

variabelen kennen, kunnen we een simulatie uitvoeren om het verloop van de bevolkingsaantallen te onderzoeken. Ook dan zal er zich in veel gevallen op den duur een soort stationaire toestand instellen waarbij de bewonersaantallen nog wel enigszins blijven fluctueren, maar waarbij het *gemiddelde* aantal inwoners voor stad *A* zestigduizend zal zijn, en het gemiddelde aantal inwoners voor stad *B* dertigduizend. In de tabel op pagina 19 is inderdaad te zien dat het inwonertal van stad *A* na verloop van tijd (na ongeveer 10 jaar) rond de 60000 gaat schommelen en dat het inwonertal van stad *B* zich dan rond de 30000 beweegt.

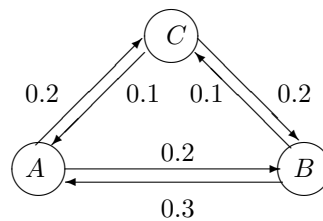
Het volgende voorbeeld illustreert weer een andere evenwichtssituatie.

**Voorbeeld:**

*Op een markt zijn er drie aanbieders van een bepaald produkt. In de beginsituatie kopen 10000 mensen merk A, 20000 mensen merk B en 60000 mensen kiezen voor merk C. Per jaar verandert gemiddeld 20% van merk A naar merk B en gemiddeld 20% van degenen die merk A gebruiken, stapt over op merk C. Van de gebruikers van merk B stapt gemiddeld 30% over op merk A en gemiddeld 10% gaat naar merk C. Van degenen die merk C gebruiken gaat gemiddeld 10% naar merk A en gemiddeld 20% stapt over op merk B. Op den duur stelt zich een stationaire toestand in. Hoeveel mensen kiezen er dan gemiddeld voor merk A, B of C?*

**Uitwerking:**

We stellen eerst het overgangsdiaagram op voor dit probleem:



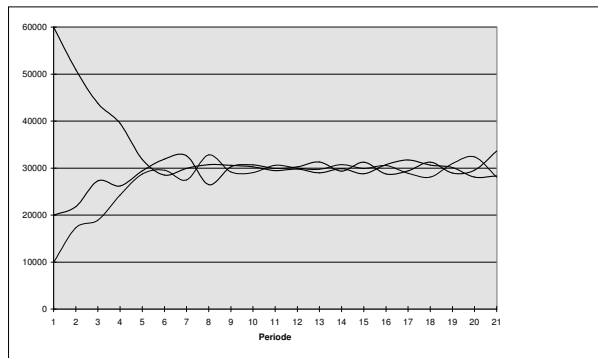
*Figuur 2.9: Overgangsdiaagram*

Het aantal mensen dat in evenwichtssituatie merk *A*, *B* of *C* gebruikt, geven we aan met resp. *a*, *b* en *c*. In die situatie moet de stroom uit *A* gelijk zijn aan de stroom die *A* binnenkomt. Dit geeft de volgende vergelijking:

$$0.2a + 0.2a = 0.3b + 0.1c$$



Periode	A naar B	A naar C	B naar A	B naar C	C naar A	C naar B	Merk A	Merk B	Merk C	Marktaandeel A	Marktaandeel B	Marktaandeel C
1	20	19	32	8	8	13	10000	20000	60000	0,111	0,222	0,667
2	22	22	26	13	7	20	17300	21800	50900	0,192	0,242	0,566
3	17	23	28	15	12	17	18919	27284	43797	0,210	0,303	0,487
4	19	16	33	7	11	23	24247	26214	39540	0,269	0,291	0,439
5	23	18	32	9	10	25	26760	29429	31811	0,320	0,327	0,353
6	22	23	27	10	9	21	29567	31931	28502	0,329	0,355	0,317
7	16	18	35	12	11	16	27448	32607	29945	0,305	0,362	0,333
8	18	20	24	6	8	19	32822	26464	30713	0,365	0,294	0,341
9	21	21	30	9	10	20	29158	30269	30573	0,324	0,336	0,340
10	22	19	32	13	12	22	29050	30702	30249	0,323	0,341	0,336
11	20	22	28	12	13	21	30594	29932	29475	0,340	0,333	0,327
12	20	17	27	10	9	21	29957	30267	29776	0,333	0,336	0,331
13	15	19	30	8	6	19	29725	31313	28962	0,330	0,348	0,322
14	23	20	30	11	12	23	30750	29375	29875	0,342	0,326	0,332
15	19	22	32	9	10	16	29925	31275	28800	0,333	0,348	0,320
16	18	21	26	10	9	18	30544	28746	30710	0,339	0,319	0,341
17	22	17	28	11	7	22	28870	29423	31707	0,321	0,327	0,352
18	21	23	34	12	15	20	28068	31275	30656	0,312	0,348	0,341
19	19	18	31	7	13	19	30950	28914	30135	0,344	0,321	0,335
20	21	22	25	8	8	25	32380	29533	28087	0,360	0,328	0,312
21	21	22	25	8	8	25	28087	33609	28305	0,312	0,373	0,314
Gem. over periode 11-20							29926	30373	29701	0,333	0,337	0,330



Figuur 2.10: Excel-simulatie van het consumentengedrag op een markt van drie merken A, B en C. Per jaar zijn de overgangpercentages en de marktaandelen gegeven.

Voor merk  $B$  krijgen we de vergelijking:

$$0.3b + 0.1b = 0.2a + 0.2c$$

De vergelijking voor merk  $C$  wordt

$$0.1c + 0.2c = 0.2a + 0.1b$$

Uit deze drie vergelijkingen kunnen we de drie onbekenden  $a$ ,  $b$  en  $c$  nog niet oplossen. De drie vergelijkingen zijn namelijk afhankelijk. Dit betekent dat de derde vergelijking ons niets nieuws vertelt. We kunnen dat ook eenvoudig inzien. Als er een evenwicht is voor merk  $A$  en merk  $B$  dan moet er ook een evenwicht zijn voor merk  $C$ . We weten echter dat het totaal aantal gebruikers van de drie merken gelijk is aan 90000, zodat we ook nog de volgende vergelijking kunnen opschrijven.

$$a + b + c = 90000$$

We vinden zo de volgende drie vergelijkingen met drie onbekenden.

$$0.4a = 0.3b + 0.1c$$

$$0.4b = 0.2a + 0.2c$$

$$a + b + c = 90000$$

Deze vergelijkingen noemen we de *evenwichtsvergelijkingen*.

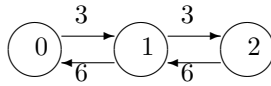
De oplossingen van dit stelsel zijn:  $a = 30000$ ,  $b = 30000$  en  $c = 30000$ .

In de tabel en de figuur op pagina 21 is goed te zien dat in de evenwichtssituatie het *gemiddelde* aantal gebruikers van merk  $A$ ,  $B$  en  $C$  gelijk is aan 30000. Als we de vergelijking  $a + b + c = 90000$  vervangen door de vergelijking  $a + b + c = 1$  dan vinden we als oplossingen  $a = b = c = \frac{1}{3}$ . De getallen  $a$ ,  $b$  en  $c$  stellen in dat geval de marktaandelen van de merken  $A$ ,  $B$  en  $C$  voor. We kunnen ook zeggen dat  $a$ ,  $b$  en  $c$  de kansen zijn dat een aselekt gekozen persoon resp. merk  $A$ ,  $B$  of  $C$  gebruikt. De getallen  $a$ ,  $b$  en  $c$  heten dan de *evenwichtskansen*.

Voor wachtrijmodellen kunnen we op een soortgelijke wijze als hierboven stationaire toestanden bepalen.

### Voorbeeld:

*In een wasstraat komen gemiddeld  $\lambda = 3$  auto's per uur aan. Een wasbeurt duurt gemiddeld 10 minuten. Er kunnen dus gemiddeld  $\mu = 6$  auto's per uur gewassen worden. Er is slechts wachtgelegenheid voor één auto. Als er een klant aankomt en er staat al een auto te*



Figuur 2.11: Overgangendiagram voor een wasstraat

wachten dan rijdt de klant door om eventueel later terug te komen. Bereken de evenwichtskansen.

### Uitwerking:

We stellen eerst het overgangendiagram op.

Het systeem kan zich in de drie toestanden 0, 1 en 2 bevinden. Stel dat de evenwichtskansen gelijk zijn aan resp.  $P_0$ ,  $P_1$  en  $P_2$ . Deze evenwichtskansen geven de kans aan dat het systeem zich in de evenwichtssituatie in toestand 0, 1 of 2 bevindt. Als bijvoorbeeld  $P_2 = 0.5$  dan betekent dit dat een klant die aankomt een kans van 0.5 heeft om een situatie aan te treffen waarbij de wasstraat in gebruik is en er een klant op zijn beurt wacht. We kunnen ook zeggen dat het systeem zich in de helft van de tijd in toestand 2 bevindt. De evenwichtskansen bereken we op de volgende wijze.

In de evenwichtssituatie moet de stroom uit toestand 0 gelijk zijn aan de stroom die toestand 0 binnenkomt. Dat betekent hier het volgende.

Er komen gemiddeld 3 klanten per uur aan. Het systeem bevindt zich in fractie  $P_0$  van de tijd in toestand 0, dus zal het systeem per uur  $3P_0$  maal van toestand 0 in toestand 1 overgaan. Het systeem bevindt zich in een fractie  $P_1$  van de tijd in toestand 1. Per uur kunnen er gemiddeld 6 klanten geholpen worden. Het systeem zal derhalve  $6P_1$  maal per uur van toestand 1 naar toestand 0 gaan. In de evenwichtssituatie moeten deze twee overgangen gelijk zijn zodat:

$$3P_0 = 6P_1$$

Als het systeem zich in toestand 1 bevindt, zijn er twee overgangen: een naar toestand 0 en een naar toestand 2. Het systeem zal per uur  $6P_1$  maal naar toestand 1 gaan en het zal  $3P_1$  maal per uur naar toestand 2 gaan. In het totaal zal het systeem dus  $6P_1 + 3P_1$  keer van toestand 1 naar een andere toestand overgaan. We hebben al gezien dat het systeem  $3P_0$  keer per uur van toestand 0 naar toestand 1 gaat. Bovendien gaat het systeem  $6P_2$  maal van toestand 2 naar toestand 1. In het totaal zal het systeem dus  $3P_0 + 6P_2$  maal van toestand 0 of 2 naar toestand 1 gaan. Voor de evenwichtssituatie van toestand 1 vinden we.

$$3P_1 + 6P_1 = 3P_0 + 6P_2$$

Voor toestand 2 vinden we in de stationaire toestand dus:

$$6P_2 = 3P_1$$

De drie gevonden vergelijkingen zijn echter afhankelijk: de som van de eerste en de derde is gelijk aan de tweede. We houden dus slechts twee vergelijkingen over, en dat is eigenlijk vanzelfsprekend, want als er evenwicht is voor toestand 0 en 1 dan is er uiteraard ook evenwicht voor toestand 2.) De evenwichtsvergelijkingen voor het systeem zijn dus

$$3P_0 = 6P_1$$

$$3P_1 = 6P_2$$

De drie evenwichtskansen  $P_0$ ,  $P_1$  en  $P_2$  moeten echter samen 1 zijn, waaruit een derde vergelijking volgt:

$$P_0 + P_1 + P_2 = 1.$$

Uit dit stelsel vergelijkingen kunnen we  $P_0$  als volgt eenvoudig vinden.

$$3P_0 = 6P_1 \implies P_1 = \frac{1}{2}P_0$$

$$3P_1 = 6P_2 \implies P_2 = \frac{1}{2}P_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 P_0$$

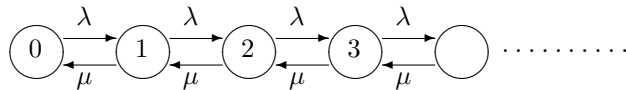
$$P_0 + P_1 + P_2 = P_0 + \frac{1}{2}P_0 + \frac{1}{4}P_0 = \frac{7}{4}P_0 = 1$$

$$P_0 = \frac{4}{7}$$

En dus

$$P_1 = \frac{1}{2}P_0 = \frac{2}{7} \quad \text{en} \quad P_2 = \frac{1}{4}P_0 = \frac{1}{7}$$

Op de bovenstaande wijze kunnen we bij ieder overgangsdiaagram de bijbehorende evenwichtsvergelijkingen opstellen. In het algemeen hebben deze de volgende vorm.

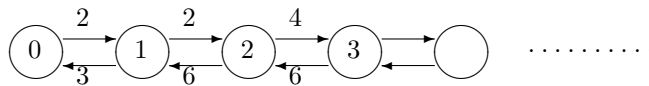


Figuur 2.12: Overgangsdiaagram

in	uit				
0	$\mu P_1$	=	$\lambda P_0$	$\implies$	$\lambda P_0 = \mu P_1$
1	$\lambda P_0 + \mu P_2$	=	$\lambda P_1 + \mu P_1$	$\implies$	$\lambda P_1 = \mu P_2$
2	$\lambda P_1 + \mu P_3$	=	$\lambda P_2 + \mu P_2$	$\implies$	$\lambda P_2 = \mu P_3$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$k$	$\lambda P_{k-1} + \mu P_{k+1}$	=	$\lambda P_k + \mu P_k$	$\implies$	$\lambda P_k = \mu P_{k+1}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$

Zoals we in de paragraaf over de overgangsdigrammen gezien hebben, behoeven niet alle *rates*  $\lambda$  en  $\mu$  gelijk te zijn. In dat geval moeten de bij de toestanden gegeven *rates* in het bovenstaande schema worden ingevuld.

**Voorbeeld:**



*Figuur 2.13: Overgangsdigram*

Uit het overgangsdigram leiden we de volgende evenwichtsvergelijkingen af.

in	uit				
0	$3P_1$	=	$2P_0$	$\implies$	$2P_0 = 3P_1$
1	$2P_0 + 6P_2$	=	$2P_1 + 3P_1$	$\implies$	$2P_1 = 6P_2$
2	$2P_1 + 6P_3$	=	$4P_2 + 6P_2$	$\implies$	$4P_2 = 6P_3$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$

## 2.3 De relaties van Little

Bij wachttijdmodellen zijn een aantal grootheden van belang.

$L$  het gemiddelde aantal klanten in het systeem.

$L_q$  het gemiddelde aantal klanten in de wachtrij.

$W$  de gemiddelde doorlooptijd, d.w.z. de gemiddelde tijd die een klant in het systeem doorbrengt.

$W_q$  de gemiddelde wachttijd in de wachtrij.

Dit zijn allemaal verwachtingen van stochastische variabelen: een variabele  $L$  die het aantal klanten aangeeft in het systeem, een variabele  $L_q$  die het aantal klanten aangeeft in de wachtrij, een variabele  $W$  die de doorlooptijd van een

willekeurige klant aangeeft, en een variabele  $\underline{W}_q$  die de wachttijd in de rij aangeeft van een willekeurige klant. De gemiddelde waarden van die stochastische variabelen zijn de verwachtingen ervan, dus  $L = E(\underline{L})$ , etc.

Er bestaan relaties tussen deze gemiddelden. Zo geldt bijvoorbeeld dat hoe langer de gemiddelde wachtrij is, des te groter is de gemiddelde wachttijd. We kunnen dit nader preciseren. Stel bijvoorbeeld dat er gemiddeld  $\lambda = 6$  klanten per uur het systeem binnenkomen. Veronderstel verder dat de gemiddelde doorlooptijd  $W$ , dat wil zeggen de gemiddelde behandeltijd plus de gemiddelde wachttijd, gelijk is aan een half uur. Met 1 uur als tijdseenheid geldt dus dat  $W = \frac{1}{2}$ . Als er op een zeker moment een klant binnenkomt, duurt het gemiddeld een half uur voordat hij het systeem weer verlaat. In die tijd zijn er gemiddeld  $W \cdot \lambda = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$  nieuwe klanten binnengekomen. Omdat er in de stationaire toestand gemiddeld evenveel klanten binnenkomen als weggaan, zal dus gemiddeld per half uur de gehele klantenpopulatie binnen het systeem vernieuwd zijn. Het gemiddelde aantal klanten  $L$  dat binnen het systeem aanwezig is, moet derhalve gelijk zijn aan 3.

In het algemeen geldt dus

$$L = W \cdot \lambda$$

De gemiddelde doorlooptijd  $W$  kunnen we dus uitrekenen zodra we de waarden van  $L$  en  $\lambda$  kennen. Net zo'n soort relatie geldt voor de gemiddelde wachttijd  $W_q$  en het gemiddelde aantal klanten  $L_q$  in de wachtrij. Daarbij is  $W_q$  namelijk de gemiddelde tijd die nodig is om de gehele wachtrij te vernieuwen. In die periode sluiten er gemiddeld  $W_q \cdot \lambda$  nieuwe klanten bij de wachtrij aan, en dus moet gelden dat

$$L_q = W_q \cdot \lambda.$$

*relaties van  
Little*

Deze relaties heten de *relaties van Little*. In het vervolg zullen we er regelmatig gebruik van maken. Een andere veel gebruikte relatie is die tussen de gemiddelde doorlooptijd en de gemiddelde wachttijd:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

die niets anders zegt dan dat de gemiddelde doorlooptijd de som is van de gemiddelde wachttijd en de gemiddelde behandeltijd. In veel situaties zullen we eerst  $L$  kunnen berekenen, vervolgens  $W$ , dan  $W_q$ , en tenslotte  $L_q$ .

#### **Voorbeeld:**

In het voorbeeld van de wasstraat op bladzijde 22 hebben we evenwichtskansen  $P_0$ ,  $P_1$  en  $P_2$  berekend. We vonden daar  $P_0 = \frac{4}{7}$ ,  $P_1 = \frac{2}{7}$  en  $P_2 = \frac{1}{7}$ . Het aantal mensen mensen in het systeem is een kansvariabele  $\underline{L}$  die de waarden 0, 1 en 2 kan aannemen. De kans dat de variabele  $\underline{L}$  deze waarden aanneemt, is resp.  $P_0$ ,  $P_1$  en  $P_2$ . De verwachtingswaarde  $E(\underline{L})$  van de kansvariabele  $\underline{L}$  is

$$E(\underline{L}) = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 = 0 + 1 \cdot \frac{2}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$$

Het gemiddelde aantal klanten in de wasstraat is dus  $L = \frac{4}{7}$ . Om met behulp van de relaties van Little de gemiddelde doorlooptijd te kunnen uitrekenen, moeten we de parameter  $\lambda$  kennen. Deze parameter geeft aan hoeveel klanten er gemiddeld per uur het systeem binnenkomen. In dit voorbeeld is deze parameter niet 3! Weliswaar komen er 3 klanten per uur aan, maar een aantal komt het systeem niet binnen omdat zij de wasstraat bezet vinden; er zijn dan al een klant en een wachtende. Hoeveel klanten vertrekken zonder een wasbeurt? De kans dat een klant de wasstraat vol vindt, is  $P_2 = \frac{1}{7}$ . Er zullen dus gemiddeld per uur  $\frac{1}{7} \cdot 3 = \frac{3}{7}$  klanten direct vertrekken. Het aantal klanten dat gemiddeld per uur het systeem binnenkomt is derhalve  $3 - \frac{3}{7} = \frac{18}{7}$ . Met behulp van de relaties van Little kunnen we nu de gemiddelde doorlooptijd uitrekenen.

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{18}{7}} = \frac{2}{9}.$$

Een klant verblijft dus gemiddeld  $\frac{2}{9} \cdot 60 = 13\frac{1}{3}$  minuten in de wasstraat. Omdat een wasbeurt gemiddelde 10 minuten in beslag neemt, bedraagt de gemiddelde wachttijd  $W_q = 3\frac{1}{3}$  minuut.

In dit hoofdstuk hebben we twee interpretaties van de evenwichtskansen gegeven. Zo is bijvoorbeeld  $P_2$  enerzijds de kans dat een klant die aankomt 2 mensen in het systeem aantreft, en anderzijds is  $P_2$  ook gelijk aan de fractie van de tijd waarin er 2 klanten in het systeem zijn. Dit is correct zolang het aankomstpatroon en het bedieningspatroon door Poissonprocessen worden geregeerd. Als dat niet meer het geval is, behoeven de twee interpretaties niet meer overeen te komen. Een eenvoudig voorbeeld toont dat aan. Stel dat er telkens precies op het halve en het hele uur een klant aankomt, en dat de bedieningstijd voor iedere klant precies 15 minuten bedraagt. Iedere klant wordt dan direct geholpen, met andere woorden, de ‘kans’  $P_0$  dat zo’n klant het systeem leeg aantreft, is 1. Maar het systeem is niet de gehele tijd leeg, zoals je zou verwachten als het aankomst- en het bedieningsproces door het toeval zouden worden geregeerd en je zou met kans 1 een leeg systeem aantreffen. In dit geval is het systeem precies de helft van de tijd leeg. In dit voorbeeld geldt de kans-tijdrelatie dus niet. Aangezien we er in het vervolg als regel van uitgaan dat het aankomst- en bedieningspatroon Poissonprocessen zijn, kunnen we beide interpretaties van de evenwichtskansen dan zonder problemen gebruiken.

## 2.4 Opgaven

1. Bij de autobandenspecialist Quick Fit komen gemiddeld 3 klanten per uur aan voor nieuwe banden. De banden worden door de monteur in gemiddeld 15 minuten geplaatst. Als de monteur bezig is, kan een klant voor het servicestation op zijn beurt wachten. Vanwege de geringe parkeerruimte

kunnen er hoogstens twee klanten wachten. Het totale aantal klanten dat zich in het systeem Quick Fit kan bevinden is dus hoogstens 3.

- (a) Stel het overgangsdigram voor het wachtrijmodel bij Quick Fit op.
  - (b) Bereken de evenwichtskansen van het model.
  - (c) Bereken het gemiddelde aantal klanten in het systeem.
  - (d) Bereken de gemiddelde doorlooptijd voor een klant.
  - (e) Bereken de gemiddelde wachttijd voor een klant.
2. Bij een kapperszaak komen gemiddeld 4 klanten per uur aan. Het knippen van een klant kost gemiddeld 15 minuten. In de kapperszaak kunnen hoogstens 3 klanten op hun beurt wachten. Een klant die aankomt terwijl er 3 klanten op hun beurt wachten, vertrekt weer. Indien er 2 klanten op hun beurt wachten, zal de helft van de aankomende klanten de zaak niet binnengaan omdat zij het te druk vinden.
- (a) Stel het overgangsdigram van het wachtrijmodel van de kapperszaak op.
  - (b) Bereken de evenwichtskansen voor het model.
  - (c) Bereken het gemiddelde aantal klanten dat zich in de kapperszaak bevindt.
  - (d) Bereken de gemiddelde wachttijd van een klant.
3. Bij een klein postkantoor met één loket komen gemiddeld vier klanten per uur aan. In de kleine ruimte van het postkantoor is slechts plaats voor vier personen: een aan het loket en drie wachtenden. Als een klant aankomt terwijl het postkantoor vol is, vertrekt hij weer. Indien het postkantoor niet vol is, komt de klant binnen en wacht eventueel op zijn beurt. De bediende achter het loket heeft gemiddeld 10 minuten nodig om een klant te helpen. Als het postkantoor vol is, gaat de bediende wat sneller werken. Hij kan dan een klant afhandelen in gemiddeld 6 minuten.
- (a) Stel het overgangsdigram van het wachtrijmodel van het postkantoor op.
  - (b) Bereken de evenwichtskansen voor het model.
  - (c) Bereken het gemiddelde aantal mensen dat zich in het postkantoor bevindt.
  - (d) Op hoeveel tijd moet een klant gemiddeld rekenen bij een bezoek aan het postkantoor?
4. Een 06-informatienummer heeft twee lijnen. Als beide lijnen bezet zijn, krijgt een beller van dat nummer een ingesprektoon. De afhandeling van een telefoontje kost gemiddeld 10 minuten. Gemiddeld bellen 6 mensen per uur het informatienummer.



- 
- (a) Stel het overgangsdigram van het wachtrijmodel voor het informatienummer op.
  - (b) Bereken de evenwichtskansen voor het model.
  - (c) Hoeveel procent van de tijd is er minstens één lijn vrij?
  - (d) Een aantal bellers krijgt een bezettoon. Hoeveel zijn dat er gemiddeld per uur?
5. Bij een printer komen gemiddeld 4 printopdrachten per kwartier aan. Het uitvoeren van een printopdracht vergt gemiddeld 2 minuten. In een buffer kan de printer vier opdrachten opslaan. Een printopdracht die aankomt als de buffer vol is, wordt teruggestuurd.
- (a) Stel het overgangsdigram voor het wachtrijmodel van de printer op.
  - (b) Bereken de evenwichtskansen.
  - (c) Bereken het gemiddelde aantal printopdrachten in de printer (de opdrachten in de buffer samen met een eventuele opdracht die uitgevoerd wordt).
  - (d) Hoeveel tijd kost het gemiddeld om een opdracht geprint te krijgen?
6. Een secretaresse wordt gemiddeld 4 keer per uur gebeld. Een telefoontje neemt gemiddeld 5 minuten in beslag.
- (a) Stel het overgangsdigram op van het wachtrijmodel van de secretaresse.
  - (b) Hoeveel tijd heeft de secretaresse gemiddeld per uur over voor andere werkzaamheden?



## Hoofdstuk 3

# Wachtrijmodellen

### 3.1 Onbeperkte capaciteit

#### 3.1.1 Inleiding

In dit hoofdstuk bekijken we eerst systemen met één loket. We kunnen hierbij denken aan een klein postkantoor of een winkel met slechts één winkelbediende. Indien het loket bezet is als een klant binnenkomt, sluit deze aan in de wachtrij. In principe kan zo'n wachtrij een willekeurige lengte krijgen, hoewel in de praktijk klanten op een later tijdstip terug zullen komen indien ze een lange wachtrij zien staan. We nemen hier echter aan dat iedere klant die binnenkomt, blijft wachten tot hij aan de beurt is. Dergelijke systemen worden wel aangeduid als  $M/M/1/\infty$  systemen. In deze notatie betekent de eerste  $M$  dat het aankomstproces een Poissonproces<sup>1</sup> is. De tweede  $M$  geeft aan dat het bedieningsproces ook een Poissonproces is. Het getal 1 vertelt dat er 1 loket is. Het symbool  $\infty$  geeft aan dat er een oneindige wachtcapaciteit is. In een volgende sectie bespreken we systemen waarbij klanten vertrekken wanneer de wachtrij lang is. Stel er komen per tijdseenheid gemiddeld  $\lambda$  klanten aan en er kunnen per tijdseenheid gemiddeld  $\mu$  klanten geholpen worden. Het getal  $B = \lambda/\mu$  heet de *bezettingsgraad*. De bezettingsgraad is de kans dat het loket bezet is. Als er bijvoorbeeld 1 klant per uur arriveert en er kunnen 2 klanten per uur geholpen worden, dan zal het loket gemiddeld de helft van de tijd bezet zijn. De bezettingsgraad is dan  $B = 1/2$ . We kunnen de bezettingsgraad dus ook interpreteren als de fractie van de tijd dat het loket bezet is. Het getal  $1 - B$  is daarom de kans dat het loket vrij is. We kunnen  $1 - B$  ook weer interpreteren als de fractie van de tijd dat het loket vrij is. In die tijd zijn er dus geen klanten in het systeem. Het gemiddelde aantal klanten aan het loket is nu  $0 \cdot (1 - B) + 1 \cdot B = B$ . Er is derhalve nog een interpretatie mogelijk van  $B$ , te weten het gemiddelde aantal klanten aan het loket. Samenvattend kunnen we dus zeggen:

$M/M/1/\infty$   
systeem

bezettings-  
graad

---

<sup>1</sup>Je zou misschien een  $P$  i.p.v. een  $M$  verwachten. De  $M$  komt van Markov, een Russische wiskundige die veel heeft bijgedragen aan de wachttijdtheorie.



Uit de laatste kolom berekenen we de evenwichtskansen.

$$P_0, \quad P_1 = BP_0, \quad P_2 = B^2P_0, \quad P_3 = B^3P_0, \quad \dots \quad P_k = B^kP_0, \dots$$

Voor de evenwichtskansen vinden we dus:

**Stelling 1** *In een systeem met 1 loket en onbegrensde wachtgelegenheid geldt voor de evenwichtskansen*

$$P_k = B^k P_0 \quad k \geq 0$$

Indien we  $P_0$  kennen, kunnen we dus alle evenwichtskansen  $P_k$  uitrekenen. De kans  $P_0$  kunnen we berekenen uit het feit dat de som van alle evenwichtskansen gelijk moet zijn aan 1.

$$\begin{aligned} P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots &= 1 \\ P_0 + BP_0 + B^2P_0 + B^3P_0 + \dots &= 1 \\ P_0(1 + B + B^2 + B^3 \dots) &= 1 \\ P_0 \frac{1}{1 - B} &= 1 \\ P_0 &= 1 - B \end{aligned}$$

In deze afleiding hebben we de formule voor de som van een oneindige meetkundige reeks gebruikt (zie ook pagina 60). Hetzelfde resultaat  $P_0 = 1 - B$  vonden we ook al in de inleiding. Het getal  $B$ , de bezettingsgraad, kunnen we interpreteren als de fractie van de tijd dat het loket bezet is. Dus is  $1 - B$  de fractie van de tijd dat het loket niet bezet, ofwel de kans dat er 0 klanten in het systeem zijn.

**Stelling 2** *In een systeem met 1 loket en onbegrensde capaciteit geldt*

$$P_0 = 1 - B$$

**Voorbeeld:**

*In een postkantoor met 1 loket komen gemiddeld 5 klanten per uur binnen. De gemiddelde afhandelingstijd bedraagt 6 minuten. Alle klanten blijven wachten tot ze aan de beurt zijn.*

1. *Wat is de kans dat het postkantoor leeg is?*
2. *Wat is de kans dat er slechts 1 wachtende is?*
3. *Hoeveel klanten worden er gemiddeld per uur geholpen?*

**Uitwerking:**

1. Hier is  $\lambda = 5$  en  $\mu = 10$  en dus  $B = 5/10 = 0.5$ . De kans dat het postkantoor leeg is is  $P_0 = 1 - B = 1 - 0.5 = 0.5$ .

2. Als er 1 wachtende is, zijn er 2 klanten in het systeem; 1 wachtende en 1 aan het loket. De gevraagde kans is dus  $P_2 = B^2 P_0 = (0.5)^2 \cdot 0.5 = 0.125$ .
3. Het gemiddelde aantal klanten dat geholpen wordt is  $\lambda = \mu B = 10 \cdot 0.5 = 5$ . (Het gemiddelde aantal klanten dat per uur geholpen wordt moet in de evenwichtssituatie uiteraard gelijk zijn aan het gemiddelde aantal klanten dat binnenkomt.)

### 3.1.3 Wachtrij en wachttijden

Met behulp van de evenwichtskansen kunnen we het gemiddelde aantal klanten in het systeem uitrekenen. Als de bezettingsgraad gelijk is aan  $B = \lambda/\mu$ , dan geldt

$$\begin{aligned}
 L &= 0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots \\
 &= BP_0 + 2B^2P_0 + 3B^3P_0 + \dots \\
 &= BP_0(1 + 2B + 3B^2 + \dots) \\
 &= B(1 - B)(1 + 2B + 3B^2 + \dots) \\
 &= B(1 + B + B^2 + B^3 + \dots) \\
 &= B \frac{1}{1 - B} = \frac{B}{1 - B} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}
 \end{aligned}$$

We vinden dus:

**Stelling 3** *In een systeem met 1 loket en onbegrensde capaciteit is het gemiddelde aantal klanten in het systeem  $L$  gelijk aan*

$$L = \frac{B}{1 - B} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Het gemiddelde aantal klanten in de wachtrij  $L_q$ , de gemiddelde doorlooptijd  $W$  en de gemiddelde wachttijd in de wachtrij  $W_q$  zijn nu eenvoudig te berekenen met behulp van de eerder afgeleide relaties. De gemiddelde lengte van de wachtrij  $L_q$  is gelijk aan  $L - B$ . Immers, het gemiddelde aantal klanten aan het loket is  $B$  en de gemiddelde lengte van de wachtrij is het gemiddelde aantal klanten in het systeem min het gemiddelde aantal klanten aan het loket. Met behulp van Stelling 3 kunnen we  $L - B$  herleiden tot  $B^2/(1 - B) = \lambda^2/(\mu^2 - \lambda\mu)$ , dus

**Stelling 4** *In een systeem met 1 loket en een onbegrensde wachtcapaciteit is de gemiddelde lengte van de wachtrij  $L_q$  gelijk aan*

$$L_q = L - B = \frac{B^2}{1 - B} = \frac{\lambda^2}{\mu^2 - \lambda\mu}$$

De gemiddelde doorlooptijd  $W$  en de gemiddelde wachttijd  $W_q$  volgen nu eenvoudig uit de relaties van Little:

**Stelling 5 (relaties van Little)** *In een systeem met 1 loket en onbegrensde capaciteit geldt voor de gemiddelde doorlooptijd  $W$  en de gemiddelde wachttijd  $W_q$*

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu^2 - \lambda\mu}$$

**Voorbeeld:**

*In een fabriek worden door de medewerkers defecte exemplaren van een bepaald apparaat van de lopende band genomen. Deze exemplaren worden vervolgens naar de afdeling kwaliteitszorg gestuurd. Gemiddeld worden 5 defecte exemplaren per uur van de band genomen. De afdeling kwaliteitszorg kan gemiddeld 8 defecte exemplaren per uur inspecteren.*

1. *Hoeveel exemplaren worden er gemiddeld per uur door de afdeling kwaliteitszorg onderzocht?*
2. *Hoeveel procent van de tijd heeft de afdeling niets te doen?*
3. *Hoeveel exemplaren liggen er gemiddeld per uur klaar om geïnspecteerd te worden?*
4. *Wat is de kans dat er minstens 2 exemplaren gereed liggen voor inspectie?*
5. *De snelheid van de lopende band wordt verdubbeld zodat er nu gemiddeld 10 defecte exemplaren per uur bij de afdeling kwaliteitszorg aankomen. Deze afdeling wordt uitgebreid en kan nu 12 exemplaren per uur inspecteren. Wat is in dit geval het antwoord op vraag 3?*

**Uitwerking:**

1. Uit de gegevens  $\lambda = 5$  en  $\mu = 8$  volgt dat  $B = 5/8$ . Het gemiddelde aantal onderzochte exemplaren per uur is  $\mu B = \lambda = 5$ . (In de evenwichts situatie is het aantal inkomende exemplaren gelijk aan het aantal uitgaande exemplaren.)
2. De bezettingsgraad  $B$  is gelijk aan  $5/8$  dus  $P_0 = 1 - B = 1 - 5/8 = 3/8 = 0.375$ . Dit betekent dat de afdeling gemiddeld 37.5% van de tijd zonder werk zit.
3. Het aantal ‘wachttende’ exemplaren is gelijk aan  $L_q = L - B$ . Uit Stelling 3 volgt dat  $L = B/(1 - B) = (5/8)/(3/8) = 5/3$ . Dus  $L_q = 5/3 - 5/8 = 25/24$ .

4. De kans dat er minstens 2 exemplaren gereed liggen voor inspectie is gelijk aan de kans dat er minstens 3 exemplaren in het systeem aanwezig zijn. Deze kans is  $P_3 + P_4 + P_5 + \dots$ . Deze kans is gelijk aan  $1 - P_0 - P_1 - P_2 = 1 - (1 - B) - B(1 - B) - B^2(1 - B) = B^3 = 125/512$ .
5. Nu is  $\lambda = 10$  en  $\mu = 12$  zodat  $B = 10/12 = 5/6$ . Stelling 3 geeft  $L = (5/6)/(1 - (5/6)) = 5$  zodat  $L_q = L - B = 5 - 5/6 = 25/6$ . Merk op dat de toename van 33% in de bezettingsgraad leidt tot een toename van 300% (!) in de wachtrij.

Dit voorbeeld laat zien dat  $L$  en  $L_q$  zeer snel toenemen als de bezettingsgraad  $B$  tot 1 nadert. Hetzelfde geldt dus ook voor  $W$  en  $W_q$ . De tabel in Figuur 3.2 illustreert deze snelle toename.

$B$	$L$	$L_q$
0.30	0.43	0.13
0.40	0.67	0.27
0.50	1.00	0.50
0.60	1.50	0.90
0.70	2.33	1.63
0.80	4.00	3.20
0.90	9.00	8.10
0.95	19.00	18.05
0.99	99.00	98.01

*Figuur 3.2: Relatie tussen  $B$ ,  $L$  en  $L_q$  voor een  $M/M/1/\infty$  systeem*

Wachten betekent tijdverlies, en aangezien tijd geld is, brengt wachten ook kosten met zich mee. In de (bedrijfs)economie werkt men met wachttijdmodellen om op basis daarvan de optimale inzet van mensen en machines te berekenen. Een inzet van personeel en middelen is optimaal als de daarmee gepaard gaande kosten minimaal zijn. In zo'n model moet men de kosten van de inzet van extra personeel of machines afwegen tegen de kosten van het tijdverlies dat het gevolg is van lange wachttijden. Problemen waarbij men een keuze moet maken tussen alternatieve wachttijdsystemen heten *wachttijdoptimalisatieproblemen*. We geven hier een eenvoudig voorbeeld van zo'n wachttijdoptimalisatievraagstuk.

**Voorbeeld:**

*Monteurs in een groot garagebedrijf moeten regelmatig naar het magazijn om onderdelen voor de uit te voeren reparaties te halen. Bij het magazijn vullen zij een formulier in waarna de magazijnbediende de materialen uit het magazijn gaat halen. Bij het magazijn werkt één bediende die f 50,- per uur kost. Deze bediende handelt een aanvraag gemiddeld in 5 minuten af. Gemiddeld komen er 10 monteurs*



per uur langs voor onderdelen. Deze monteurs kosten het garagebedrijf f 70,- per uur. Het garagebedrijf overweegt een uitzendkracht in dienst te nemen voor het magazijn. Deze kan de formulieren invullen terwijl de bediende de onderdelen uit het magazijn haalt. Met het aanstellen van deze werknemer zou de gemiddelde afhandelingstijd kunnen worden teruggebracht tot 4 minuten. De nieuwe werknemer zou het bedrijf f 25,- per uur kosten. Moet het bedrijf de uitzendkracht in dienst nemen?

**Uitwerking:**

Het bedrijf wil hier de kosten minimaliseren van de inzet van het personeel. We hebben hier te maken met twee soorten kosten, enerzijds met de kosten van het magazijnpersoneel en anderzijds met de kosten in verband met het tijdsverlies van wachtende monteurs (in die tijd kunnen zij immers geen reparaties uitvoeren). We gaan nu na wat de kosten per uur zijn in beide gevallen. Zonder de uitzendkracht is  $\lambda = 10$  en  $\mu = 12$  waaruit volgt  $B = 5/6$ . Uit Stelling 3 volgt dat  $L = 5$ . Gemiddeld staan er dus 5 monteurs bij het magazijn (hetzij in de rij hetzij aan de balie). De kosten van het tijdsverlies door het wachten zijn dus  $5 \times f 70,- = f 350,-$  per uur. De magazijnbediende kost f 50,- per uur dus de totale kosten bedragen f 350,- + f 50,- = f 400,- per uur. Als de uitzendkracht wordt aangesteld geldt  $\lambda = 10$ ,  $\mu = 15$  en dus  $B = 2/3$ . Uit Stelling 3 vinden we nu  $L = 2$ . De kosten van het tijdsverlies zijn nu dus  $2 \times f 70,- = f 140,-$  per uur. De personeelskosten van het magazijn bedragen f 50,- + f 25,- = f 75,- per uur. De totale kosten komen in dit geval op f 140,- + f 75,- = f 215,- per uur. De kosten zijn het kleinst in het laatste geval dus het bedrijf doet er verstandig aan de uitzendkracht in dienst nemen.

### 3.1.4 Opgaven (theorie)

1. Verifieer met behulp van Stelling 3 de formule  $L_q = \frac{B^2}{1-B}$  uit Stelling 4.
2. Bewijs dat in een  $M/M/1/\infty$  systeem de kans dat er  $n$  of meer klanten in het systeem zijn, gelijk is aan  $B^n$ . (Aanwijzing: gebruik de somformule van de meetkundige reeks)
3. Leid uit de Stellingen 4 en 5 af dat  $W = W_q + \frac{1}{\mu}$ . Geef een interpretatie van deze formule.
4. Indien we zowel  $\lambda$  als  $\mu$  verdubbelen, hoe veranderen dan  $L$ ,  $L_q$ ,  $W$  en  $W_q$ ?

### 3.1.5 Opgaven (toepassingen)

1. Het aantal cadetten dat aankomt bij de kassa van het bedrijfsrestaurant volgt een Poissonverdeling met een gemiddelde van 1.5 per minuut ( $\lambda = 1.5$

per minuut). Indien er een rij voor de kassa staat, sluit de cadet achter aan de rij aan. De caissière heeft gemiddeld 20 seconden nodig voor een afrekening ( $\mu = 3$  per minuut).

- (a) Bereken de bezettingsgraad  $B$  van de kassa.
  - (b) Wat is de gemiddelde tijd die een cadet moet wachten in de rij voor de kassa?
  - (c) Op hoeveel tijd moet een cadet voor het wachten en betalen gemiddeld rekenen?
  - (d) Hoe groot is het gemiddelde aantal cadetten dat op hun beurt wacht?
  - (e) Hoe groot is het gemiddelde aantal cadetten dat wacht of betaalt?
2. Een bedrijf heeft een telefooncentrale die door één telefonist bediend wordt. Het aantal telefoontjes dat bij de centrale binnenkomt, is gemiddeld 10 per uur. Gemiddeld duurt het 4 minuten om een telefoontje af te handelen. We gaan ervan uit dat een beller blijft wachten totdat hij aan de beurt is.
- (a) Hoe groot is de gemiddelde wachtrij?
  - (b) Wat is de gemiddelde wachttijd?
  - (c) Hoeveel procent van de tijd heeft de telefonist niets te doen?
3. Bij een postkantoor met één loket komen gemiddeld 5 klanten per uur binnen. De afhandelingstijd van een klant is gemiddeld 6 minuten. Iedere klant die binnenkomt, sluit achter in de wachtrij aan (natuurlijk tenzij het loket vrij is).
- (a) Hoeveel klanten bevinden zich gemiddeld in het postkantoor?
  - (b) Hoe groot is de gemiddelde wachttijd voor een klant?
  - (c) Hoeveel tijd heeft de loketbediende gemiddeld niets te doen?
  - (d) We streven naar gemiddeld hoogstens 5 mensen in het postkantoor. Hoeveel tijd mag dan een afhandeling van een klant dan hoogstens in beslag nemen?
4. Bij de paspoortcontrole op Schiphol komen gemiddeld 20 reizigers per 5 minuten aan. De controle kost gemiddeld 10 seconden. Uiteraard blijft iedere reiziger wachten totdat zijn paspoort gecontroleerd is.
- (a) Wat is de gemiddelde wachttijd voor een reiziger?
  - (b) Hoe lang is de wachtrij gemiddeld?
  - (c) Hoe groot is de kans dat een reiziger die bij de controle aankomt, 4 mensen in de wachtrij aantreft?
  - (d) Door een andere procedure gaat de controle nu twee keer zo snel. Beantwoord de vragen (a) en (b) voor deze situatie.

5. Het aantal vliegtuigen dat toestemming vraagt om vanaf de Kaagbaan op Schiphol te vertrekken, is gemiddeld 10 per uur. Het kost de verkeersleiding gemiddeld 5 minuten om een vliegtuig te laten vertrekken. Een vliegtuig dat nog niet kan vertrekken, wordt door de verkeersleiding in een wachtrij gezet.
- (a) Hoe lang is de gemiddelde wachtrij?
  - (b) Hoeveel tijd verstrijkt er gemiddeld vanaf het tijdstip waarop een vliegtuig toestemming vraagt om te vertrekken tot het moment dat het vliegtuig de lucht in gaat?
  - (c) Hoeveel procent van de tijd vertrekken er geen vliegtuigen van de Kaagbaan?
  - (d) Door vertragingen loopt de vertrekafhandeling op tot gemiddeld 6 minuten. Hoe verandert hierdoor de gemiddelde wachtrij?
6. Bij een printer komen gemiddeld 5 printopdrachten per kwartier aan. Gemiddeld kost het verwerken van een opdracht 2 minuten. Als er een opdracht aankomt terwijl de printer bezig is met printen, dan wordt de opdracht in een wachtrij in de buffer gezet. Hoewel zo'n buffer een begrensde capaciteit heeft, nemen we hier aan dat we die op oneindig mogen stellen.
- (a) Hoeveel tijd kost een opdracht (wachten plus printen) gemiddeld?
  - (b) Hoeveel tijd is de printer gemiddeld per uur bezig met printen?
  - (c) Wat is de kans dat een opdracht direct uitgevoerd wordt?
7. In een fabriek treedt gemiddeld 6 keer per uur een machinestoring op. De fabriek heeft een monteur in dienst die de machines repareert. Hij kan gemiddeld 8 storingen per uur verhelpen. De kosten van de storingen ten gevolge van het produktieverlies worden geschat op f 200,- per uur per machine.
- Wat zijn de gemiddelde kosten als gevolg van de storingen?
8. Bij een kopieermachine op het stadskantoor te Breda komen gemiddeld 12 ambtenaren per uur aan om kopieën te maken. Gemiddeld duurt het 2 minuten om te kopiëren. Iedere ambtenaar wacht tot hij aan de beurt is. Dat kost uiteraard tijd, waarin hij of zij niets anders kan doen (de zgn. leegloopkosten). De huurkosten van het kopieerapparaat bedragen 50 gulden per uur. Een ambtenaar verdient 75 gulden per uur.
- (a) Bereken de totale kosten per uur die verbonden zijn aan het kopiëren.
  - (b) De gemeente overweegt de huur van een sneller apparaat. Dit apparaat kopieert twee keer zo snel als de machine die nu in gebruik is. De huurkosten van dit apparaat bedragen 80 gulden per uur. Is het vanuit kostenoverwegingen verstandig om het snellere apparaat te huren?

### 3.1.6 De spreiding in de lengte van de wachtrij

Wanneer men met behulp van een simulatieprogramma zoals Excel simulaties uitvoert van het  $M/M/1/\infty$  systeem met waarden van de bezettingsgraad  $B$  die dicht in de buurt liggen van 1, valt niet alleen op hoe groot het aantal klanten in het systeem is en hoe lang de wachtrij vaak wordt (dit in overeenstemming met de gegevens van Figuur 3.2), maar ook dat de fluctuaties in die aantallen heel groot zijn. We kunnen dit ook verklaren als we de variantie en de standaardafwijking uitrekenen van de stochastische variabelen  $\underline{L}$  en  $\underline{L}_q$ , die respectievelijk het aantal klanten in het systeem en de lengte van de wachtrij aangeven. De verwachtingen ervan hebben we al in een vorige paragraaf uitgerekend:

$$E(\underline{L}) = L = \frac{B}{1-B}$$

en

$$E(\underline{L}_q) = L_q = \frac{B^2}{1-B}.$$

Omdat we de kansverdelingen van  $\underline{L}$  en  $\underline{L}_q$  kennen, kunnen we ook  $Var(\underline{L})$ ,  $\sigma(\underline{L})$ ,  $Var(\underline{L}_q)$  en  $\sigma(\underline{L}_q)$  uitrekenen. We beginnen met  $Var(\underline{L})$ . Daarbij maken we gebruik van het feit dat

$$P_k = P(\underline{L} = k) = B^k(1-B) \quad \text{voor } k \geq 0.$$

De berekening gaat via een tussenstap:

$$\begin{aligned} E(\underline{L}(\underline{L}-1)) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)P_k = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)B^k(1-B) \\ &= B^2(1-B) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)B^{k-2} \\ &= B^2(1-B) \frac{2}{(1-B)^3} \\ &= \frac{2B^2}{(1-B)^2} \end{aligned}$$

(We hebben hierbij gebruik gemaakt van een formule voor een oneindige ‘gemengde’ reeks die in de appendix op pagina 60 wordt afgeleid.) Uit het zojuist afgeleide resultaat volgt

$$\begin{aligned} Var(\underline{L}) &= E(\underline{L}^2) - (E(\underline{L}))^2 \\ &= E(\underline{L}(\underline{L}-1)) + E(\underline{L}) - (E(\underline{L}))^2 \\ &= \frac{2B^2}{(1-B)^2} + \frac{B}{1-B} - \frac{B^2}{(1-B)^2} \\ &= \frac{B}{(1-B)^2}. \end{aligned}$$

De standaardafwijking is de wortel uit deze uitdrukking:

$$\sigma(\underline{L}) = \frac{\sqrt{B}}{1-B}.$$

Een soortgelijke berekening kan voor  $\underline{L}_q$  worden uitgevoerd. Hierbij moet rekening gehouden worden met een iets andere kansverdeling:

$$P(\underline{L}_q = 0) = P(\underline{L} = 0) + P(\underline{L} = 1) = (1-B) + B(1-B) = 1 - B^2$$

want de wachtrij is leeg als er 0 of 1 klanten in het systeem zijn, en

$$P(\underline{L}_q = k) = P(\underline{L} = k + 1) = B^{k+1}(1-B) \text{ voor } k \geq 1.$$

We maken dezelfde tussenstap als boven:

$$\begin{aligned} E(\underline{L}_q(\underline{L}_q - 1)) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)B^{k+1}(1-B) \\ &= B^3(1-B) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)B^{k-2} \\ &= B^3(1-B) \frac{2}{(1-B)^3} \\ &= \frac{2B^3}{(1-B)^2} \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \text{Var}(\underline{L}_q) &= E(\underline{L}_q^2) - (E(\underline{L}_q))^2 \\ &= E(\underline{L}_q(\underline{L}_q - 1)) + E(\underline{L}_q) - (E(\underline{L}_q))^2 \\ &= \frac{2B^3}{(1-B)^2} + \frac{B^2}{1-B} - \frac{B^4}{(1-B)^2} \\ &= \frac{B^2(1+B-B^2)}{(1-B)^2}. \end{aligned}$$

De standaardafwijking is de wortel uit deze uitdrukking:

$$\sigma(\underline{L}_q) = \frac{B}{1-B} \sqrt{1+B-B^2}.$$

Figuur 3.3 geeft een tabel analoog aan Figuur 3.2 voor het verband tussen  $B$ ,  $E(\underline{L})$ ,  $\sigma(\underline{L})$ ,  $E(\underline{L}_q)$  en  $\sigma(\underline{L}_q)$ . Inderdaad is de standaardafwijking voor  $B$  dicht bij 1 zeer groot. We zien daarin dat de standaardafwijking in alle gevallen groter is dan de verwachtingswaarde, iets dat we ook direct uit de formules kunnen afleiden.

Men kan ook de standaardafwijking van de doorlooptijd en de wachttijd in de rij berekenen, maar omdat het daarbij om continue stochastische variabelen gaat, zijn die berekeningen veel gecompliceerder. We laten ze daarom hier achterwege. Ook in de hierna nog te behandelen wachtrijmodellen geven we geen berekeningen meer van de standaardafwijkingen.

$B$	$E(\underline{L})$	$\sigma(\underline{L})$	$E(\underline{L}_q)$	$\sigma(\underline{L}_q)$
0.30	0.43	0.78	0.13	0.47
0.40	0.67	1.05	0.27	0.74
0.50	1.00	1.41	0.50	1.12
0.60	1.50	1.94	0.90	1.67
0.70	2.33	2.79	1.63	2.56
0.80	4.00	4.47	3.20	4.31
0.90	9.00	9.49	8.10	9.40
0.95	19.00	19.49	18.05	19.45
0.99	99.00	99.50	98.01	99.49

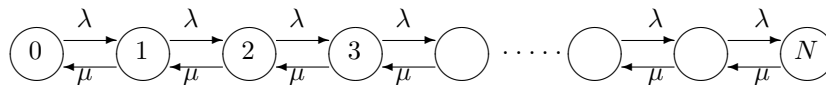
*Figuur 3.3: Relatie tussen  $B$ ,  $E(\underline{L})$ ,  $\sigma(\underline{L})$ ,  $E(\underline{L}_q)$  en  $\sigma(\underline{L}_q)$  voor een  $M/M/1/\infty$  systeem*

## 3.2 Beperkte capaciteit

### 3.2.1 De evenwichtskansen

In dit hoofdstuk bekijken we systemen met een beperkte capaciteit, bijvoorbeeld een kapperszaak met een wachtgelegenheid voor een beperkt aantal personen. Als iemand bij aankomst de zaak vol vindt, vertrekt hij weer en zoekt een andere kapper, of hij komt op een ander tijdstip terug. Informatienummers hebben meestal een systeem waarbij de beller een bandje te horen krijgt met "Er zijn nog zoveel wachtenden voor u." Zo'n bandje gaat tot een beperkt aantal wachtenden, zeg 10. Een volgende beller krijgt de ingesprektoon en hangt op (vertrekt) om het eventueel later nog eens te proberen. Deze systemen heten  $M/M/1/N$  systemen. De laatste  $N$  geeft nu aan dat de capaciteit van het systeem beperkt is tot  $N$  klanten.

Een systeem met een capaciteit van  $N$  kan zich in  $N + 1$  toestanden bevinden: het aantal in het systeem aanwezige klanten kan  $0, 1, \dots, N$  zijn. We bepalen eerst de  $N + 1$  evenwichtskansen  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_N$ . Daartoe tekenen we weer het overgangsdigram (zie Figuur 3.4).



*Figuur 3.4: Overgangsdigram*

Uit het overgangsdigram leiden we de volgende evenwichtsvergelijkingen af.

	in		uit				
0	$\mu P_1$	=	$\lambda P_0$	$\implies$	$\lambda P_0$	=	$\mu P_1$
1	$\lambda P_0 + \mu P_2$	=	$\lambda P_1 + \mu P_1$	$\implies$	$\lambda P_1$	=	$\mu P_2$
2	$\lambda P_1 + \mu P_3$	=	$\lambda P_2 + \mu P_2$	$\implies$	$\lambda P_2$	=	$\mu P_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N	$\lambda P_{N-1}$	=	$\mu P_N$	$\implies$	$\lambda P_{N-1}$	=	$\mu P_N$

Uit de laatste kolom van de tabel volgt nu:

$$P_0, \quad P_1 = BP_0, \quad P_2 = B^2P_0, \quad \dots \quad P_N = B^N P_0.$$

Deze formules kennen we al uit het geval met onbeperkte capaciteit.

**Stelling 6** *In een systeem met capaciteit N geldt voor de evenwichtskansen*

$$P_k = B^k P_0 \quad 0 \leq k \leq N$$

$P_N$  is de kans dat zich  $N$  personen in het systeem bevinden. In dat geval is het systeem geblokkeerd, immers klanten die aankomen, vertrekken en komen het systeem niet binnen. De kans  $P_N$  heet daarom ook wel de *blokkeerkans*.

*blokkeerkans*

Als  $P_N$  bijvoorbeeld gelijk is aan 0.5 betekent dit dat het systeem gedurende de helft van de tijd geblokkeerd is. Klanten die in die tijd aankomen, komen het systeem niet binnen maar vertrekken. Stel nu dat  $\lambda$  gelijk is aan 6, d.w.z. dat er per tijdseenheid 6 klanten aankomen. Omdat het systeem de helft van de tijd geblokkeerd is, zullen slechts 3 klanten het systeem binnenkomen. Bij een systeem met capaciteit  $N$  en blokkeerkans  $P_N$  komen er per tijdseenheid dus  $\lambda(1 - P_N)$  klanten het systeem binnen. Het getal  $\lambda_e = \lambda(1 - P_N)$  heet de *effectieve aankomstrate*.

*effectieve  
aankomstrate*

Het getal  $B = \lambda/\mu$  kunnen we bij een systeem met beperkte capaciteit niet meer interpreteren als de bezettingsgraad. Immers niet alle klanten die aankomen, komen ook het systeem binnen, met andere woorden, niet alle klanten die aankomen worden ook daadwerkelijk geholpen. We hebben gezien dat het aantal klanten dat per tijdseenheid het systeem binnenkomt, gelijk is aan  $\lambda_e$ . De bezettingsgraad bij een systeem met beperkte capaciteit, ook wel de *effectieve bezettingsgraad*  $B_e$  genoemd, is hier dus gelijk aan  $B_e = \frac{\lambda_e}{\mu} = \frac{\lambda(1 - P_N)}{\mu} = B(1 - P_N)$ .

*effectieve  
bezettingsgraad*

**Stelling 7 (Blokkeerkans)** *In een systeem met capaciteit N is de kans  $P_N$  dat in het systeem N klanten aanwezig zijn, gelijk aan*

$$P_N = P_0 B^N$$

*Deze kans heet de blokkeerkans.*

**Stelling 8 (Effectieve aankomstrate)** *In een systeem met capaciteit  $N$  is het aantal klanten dat per tijdseenheid het systeem binnenkomt, gelijk aan*

$$\lambda_e = \lambda(1 - P_N)$$

*Het getal  $\lambda_e$  heet de effectieve aankomst.*

**Stelling 9 (Effectieve bezettingsgraad)** *In een systeem met capaciteit  $N$  is de effectieve bezettingsgraad  $B_e$ , gelijk aan*

$$B_e = B(1 - P_N)$$

*De effectieve bezettingsgraad geeft aan welke fractie van de tijd het loket bezet is.*

De som van de evenwichtskansen is uiteraard gelijk aan 1. Daaruit kunnen we  $P_0$  berekenen met behulp van de somformule voor de eindige meetkundige reeks (zie pagina 60).

$$\begin{aligned} P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_N &= 1 \\ P_0 + BP_0 + B^2P_0 + \dots + B^NP_0 &= 1 \\ P_0(1 + B + B^2 + \dots + B^N) &= 1 \\ P_0 \frac{1 - B^{N+1}}{1 - B} &= 1 \\ P_0 &= \frac{1 - B}{1 - B^{N+1}} \end{aligned}$$

**Stelling 10** *In een systeem met capaciteit  $N$  geldt voor  $P_0$*

$$P_0 = \frac{1 - B}{1 - B^{N+1}}$$

Uit de Stellingen 7, 9 en 10 kunnen we eenvoudig afleiden dat  $B_e = 1 - P_0$ . Deze relatie laat nogmaals zien dat de effectieve bezettingsgraad gelijk is aan de kans dat het loket bezet is.

**Stelling 11** *In een systeem met capaciteit  $N$  is de effectieve bezettingsgraad  $B_e$ , gelijk aan*

$$B_e = 1 - P_0$$

**Voorbeeld:**

*Bij een kapperszaak komen gemiddeld  $\lambda = 3$  klanten per uur aan. De kapper heeft gemiddeld een kwartier nodig om een klant te knippen. Hij heeft in zijn zaak drie stoelen beschikbaar voor wachtende klanten. Als een klant de zaak vol aantreft (drie wachtenden voor hem), vertrekt hij.*



1. Bereken de fractie van de tijd dat er niemand geknipt wordt.
2. Bereken de kans dat een klant de kapperszaak vol aantreft.
3. Hoeveel klanten komen er per uur de kapperszaak binnen en wachten op hun beurt?

**Uitwerking:**

1. De capaciteit van de kapperszaak is  $N = 4$ . Verder is  $\lambda = 3$  en  $\mu = 4$  en dus  $B = 3/4$ . De fractie van de tijd dat de zaak leeg is, is gelijk aan  $P_0$ .  

$$P_0 = \frac{1 - B}{1 - B^{N+1}} = \frac{1/4}{1 - (3/4)^5} = 256/781 (\approx 33\%)$$
2. De kans dat een klant de zaak vol aantreft, is de blokkeerkans  $P_4$ .  

$$P_4 = B^4 P_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \frac{256}{781} = \frac{81}{781}.$$
3. De effectieve aankomst  $\lambda_e$  is gelijk aan  $\lambda(1 - P_N) = 3 \cdot \frac{700}{781} \approx 2.69$

**3.2.2 De wachtrij en de wachttijden**

Nu de evenwichtskansen bekend zijn, kunnen we het gemiddelde aantal klanten in het systeem  $L$  uitrekenen. We maken daarbij gebruik van de somformule voor de 'eindige gemengde reeks' (zie Bijlage A, pagina 60) met  $a = P_0 B$  en  $r = B$

$$\begin{aligned} L &= 0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + \dots + NP_N \\ &= P_0 B + 2B^2 P_0 + \dots + NB^N P_0 \\ &= P_0 B (1 + 2B + 3B^2 + \dots + NB^{N-1}) \\ &= \frac{1 - B}{1 - B^{N+1}} B \frac{1 - (N+1)B^N + NB^{N+1}}{(1 - B)^2} \\ &= \frac{B}{1 - B} \frac{1 - (N+1)B^N + NB^{N+1}}{1 - B^{N+1}} \end{aligned}$$

Als we de formule voor  $L$  goed bekijken dan zien we dat  $L$  nu gelijk is aan de  $L$  bij onbegrensde capaciteit maal de factor  $\frac{1 - (N+1)B^N + NB^{N+1}}{1 - B^{N+1}}$ . Men kan bewijzen dat deze factor kleiner dan 1 is, zodat  $L$  in de situatie met begrensde capaciteit kleiner is dan  $L$  bij onbegrensde capaciteit, zoals we ook mogen verwachten.

**Stelling 12** *In een systeem met capaciteit  $N$  is het gemiddelde aantal klanten in het systeem  $L$  gelijk aan*

$$L = \frac{B}{1 - B} \frac{1 - (N+1)B^N + NB^{N+1}}{1 - B^{N+1}}$$

De lengte van de wachtrij  $L_q$ , de doorlooptijd  $W$  en de wachttijd  $W_q$  berekenen we op dezelfde wijze als in het geval van onbegrensde capaciteit. De lengte van de wachtrij  $L_q$  is bij onbegrensde capaciteit gelijk aan  $L - B$ . Bij een systeem met begrensde capaciteit is niet  $B$  maar  $B_e$  de bezettingsgraad. Derhalve is de lengte van de wachtrij hier  $L - B_e$ .

**Stelling 13** *In een systeem met capaciteit  $N$  is de lengte van de wachtrij  $L_q$  gelijk aan*

$$L_q = L - B_e$$

Voor de wachttijden gebruiken we weer de relaties van Little met dien verstande dat het aantal klanten dat in het systeem binnenkomt nu niet  $\lambda$  maar  $\lambda_e$  is.

**Stelling 14 (Relaties van Little)** *In een systeem met capaciteit  $N$  zijn de doorlooptijd  $W$  en de wachttijd  $W_q$  gelijk aan*

$$\begin{aligned} W &= \frac{L}{\lambda_e} \\ W_q &= \frac{L_q}{\lambda_e} \end{aligned}$$

**Voorbeeld (vervolg van pagina 44):**

1. Bereken het gemiddelde aantal klanten in de kapperszaak.
2. Bereken de gemiddelde tijd die een klant in de kapperszaak verblijft.
3. Bereken de gemiddelde wachttijd.

**Uitwerking:**

1. Het gemiddelde aantal klanten in de zaak  $L$  is gelijk aan

$$\begin{aligned} L &= \frac{B}{1-B} \frac{1 - (N+1)B^N + NB^{N+1}}{1 - B^{N+1}} \\ &= \frac{3/4}{1-3/4} \frac{1 - 5 \cdot (3/4)^4 + 4(3/4)^5}{1 - (3/4)^5} \\ &= 1128/781 \approx 1.44 \end{aligned}$$

2. De effectieve aankomst  $\lambda_e = 2100/781$ , zodat de doorlooptijd gelijk is aan

$$W = \frac{L}{\lambda_e} = (1128/781)/(2100/781) = 1128/2100 \approx 32 \text{ min.}$$

### 3.2.3 Een bijzonder geval: $B = 1$

In het geval van onbegrensde capaciteit heeft het geen zin situaties te bekijken waarbij  $B = \lambda/\mu \geq 1$ . Het aantal klanten dat gemiddeld binnenkomt, is dan minstens zo groot als het aantal klanten dat gemiddeld het systeem verlaat. Het systeem wordt in dit geval opgeblazen, d.w.z. de lengte van de wachtrij wordt oneindig groot. Bij een systeem met een begrensde capaciteit  $N$  kan zich dat niet voordoen omdat de lengte van de wachtrij hoogstens  $N - 1$  is. We bekijken in deze paragraaf het geval waarbij  $B = 1$ . Een aantal van de hierboven afgeleide formules is dan niet geldig omdat ze een factor  $B - 1$  in de noemer hebben. Uit de wel geldige Stelling 1 volgt dan dat  $P_0 = P_1 = P_2 = \dots = P_{N-1} = P_N$ . Omdat de som van deze kansen gelijk is aan 1 geldt  $P_k = \frac{1}{N+1}$  voor alle  $k$ .

**Stelling 15** *In een systeem met capaciteit  $N$  geldt voor de evenwichtskansen in het geval dat  $B = \frac{\lambda}{\mu} = 1$*

$$P_k = \frac{1}{N+1} \quad 0 \leq k \leq N$$

Voor het gemiddelde aantal klanten in het systeem vinden we, onder gebruikmaking van de somformule voor de rekenkundige reeks (zie pagina 60):

$$\begin{aligned} L &= 0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + \dots + NP_N \\ &= 1 \cdot \frac{1}{N+1} + 2 \cdot \frac{1}{N+1} + \dots + N \cdot \frac{1}{N+1} \\ &= \frac{1+2+3+\dots+N}{N+1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}N(N+1)}{N+1} \\ &= \frac{N}{2} \end{aligned}$$

**Stelling 16** *In een systeem met capaciteit  $N$  is het gemiddelde aantal klanten in het systeem in het geval dat  $B = 1$  gelijk aan*

$$L = \frac{N}{2}$$

De effectieve aankomst is gelijk aan  $\lambda_e = \lambda(1 - P_N) = \lambda \frac{N}{N+1}$  en de effectieve bezettingsgraad is gelijk aan  $B_e = B \frac{N}{N+1}$ . Met behulp van de Stellingen 13 en 14 kunnen we de gemiddelde lengte van de wachtrij, de gemiddelde doorlooptijd en de gemiddelde wachttijd berekenen.

### 3.2.4 Opgaven

1. In een kleine kapperszaak zijn 3 plaatsen beschikbaar voor wachtende klanten. Als een klant bij de zaak aankomt en de drie stoelen zijn bezet, dan loopt hij door. De kapper kan gemiddeld 4 klanten per uur helpen. Het aantal klanten dat gemiddeld per uur aankomt is 3. Als niet alle stoelen bezet zijn, wacht een klant op zijn beurt.
  - (a) Bereken de gemiddelde wachttijd van een klant.
  - (b) Hoeveel klanten bevinden zich gemiddeld in de kapperszaak?
  - (c) Hoeveel klanten knipt de kapper gemiddeld per uur?
  - (d) Hoe groot is de kans dat een klant die bij de kapperszaak aankomt, meteen geholpen kan worden?
  - (e) Hoeveel klanten vertrekken er gemiddeld per uur zonder geknipt te worden?
  
2. Bij een wit benzinestation met één pomp komen per uur gemiddeld 10 auto's aan om te tanken. Er is slechts plaats voor 5 auto's aan de pomp (inclusief de auto die tankt). Auto's die aankomen als het station vol is, rijden door. Als er nog plaats is, sluit een auto achter aan de rij aan. Het kost gemiddeld 4 minuten om te tanken.
  - (a) Hoe lang is de gemiddelde wachtrij?
  - (b) Hoeveel auto's tanken er gemiddeld per uur?
  - (c) Op hoeveel tijd moet een klant gemiddeld rekenen om te tanken (inclusief wachten)?
  - (d) Hoeveel klanten vertrekken er gemiddeld per uur zonder te tanken?
  
3. Een informatienummer wordt gemiddeld 6 keer per uur gebeld. Het telefoonsysteem kan 3 bellers in een wachtrij plaatsen. Als er gebeld wordt terwijl er al drie wachtenden zijn, krijgt de beller een bezettoon. Uiteraard hangt de beller dan op. Een beller blijft aan de lijn indien er nog wachtruimte is. Een student die de gevraagde informatie verstrekt, kan gemiddeld 10 klanten per uur helpen. Voor iedere klant die hij helpt, ontvangt de student f5,-.
  - (a) Hoe groot is de gemiddelde wachtrij?
  - (b) Hoe groot is de gemiddelde wachttijd?
  - (c) Hoeveel verdient de student gemiddeld per uur?
  - (d) Er wordt een nieuw telefoonsysteem geïnstalleerd. Het aantal bellers dat hierbij in de wachtrij kan worden gezet is nu nog slechts 2. Met hoeveel procent dalen de gemiddelde uurinkomsten van de student?

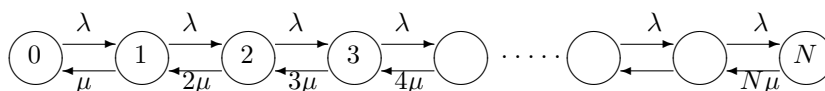
4. Bij het steunpunt voor de studiefinanciering komen per uur gemiddeld evenveel studenten aan als er gemiddeld per uur kunnen worden geholpen. Vanwege ruimtegebrek is de wachtcapaciteit beperkt tot 6 studenten. Studenten die aankomen als de wachtcapaciteit volledig benut is, vertrekken weer. Er komen per uur gemiddeld 8 studenten aan.
- (a) Hoe groot is de kans dat een student vanwege gebrek aan wachtruimte weer moet vertrekken?
  - (b) Hoeveel studenten staan er gemiddeld te wachten?
  - (c) Hoe groot is de gemiddelde wachttijd?
  - (d) Hoeveel studenten worden er gemiddeld per uur geholpen?
  - (e) Stel dat de wachtcapaciteit beperkt wordt tot 3 plaatsen. Hoe groot is dan de gemiddelde wachttijd?
5. Gemiddeld komen er 3 cadetten per uur bij een docent hun tentamen inzien. Het inzien van het tentamen vergt gemiddeld 10 minuten. Als de docent bezig is met een cadet en er komt een cadet aan om zijn tentamen in te zien, mag deze op de kamer van de docent wachten. Komt er daarna nog een cadet dan moet die weer gaan, om op een later tijdstip nog eens terug te komen.
- (a) In hoeveel procent van de tijd zijn er twee cadetten op de kamer van de docent?
  - (b) Hoeveel tijd houdt de docent gemiddeld per uur over voor andere werkzaamheden?
  - (c) Hoeveel tijd moet een cadet uittrekken om zijn tentamen in te zien?
  - (d) Hoeveel cadetten moeten er per uur onverrichter zake weer vertrekken.
6. Een werknemer van een fabriek haalt defecte apparaten van een lopende band. Gemiddeld zijn dat er 4 per uur. Deze apparaten worden naar een inspectieafdeling gebracht. De inspectieafdeling heeft gemiddeld 10 minuten nodig om te beoordelen of het apparaat nog hersteld kan worden. Als de inspectieafdeling bezig is wordt het binnenkomende apparaat in een buffer gezet. Deze buffer kan hoogstens 3 apparaten bevatten. Als de buffer vol is gaan de defecte apparaten naar een magazijn.
- (a) Hoeveel apparaten worden er gemiddeld per uur geïnspecteerd?
  - (b) Hoeveel apparaten bevinden zich gemiddeld in de buffer?
  - (c) Hoeveel apparaten worden er gemiddeld per dag (8 uur) naar het magazijn gebracht?..
  - (d) Hoeveel procent van de tijd heeft de inspectieafdeling niets te doen?

### 3.3 Systemen met meerdere loketten

#### 3.3.1 Geen wachtgelegenheid

In de praktijk komen we meestal systemen tegen met meerdere loketten. In postkantoren, banken en supermarkten kunnen we vaak bij meer dan één loket of kassa terecht. Pas als alle loketten bezet zijn, sluiten we in één van de wachtrijen aan. Dergelijke systemen zijn, zoals we mogen verwachten, veel moeilijker te beschrijven dan systemen met één loket. In deze paragraaf bespreken we een systeem met  $N$  loketten en capaciteit  $N$ , d.w.z. er is geen wachtgelegenheid. We kunnen hierbij denken aan een bedrijf dat over  $N$  telefoonlijnen beschikt. Zolang niet alle lijnen bezet zijn, wordt een klant direct geholpen. Als alle  $N$  lijnen bezet zijn, krijgt de klant een ingesprektoon en hangt op (vertrekt) om het eventueel op een ander tijdstip nogmaals te proberen. Voor dit systeem stellen we eerst weer het overgangsdigram op. We nemen aan dat er gemiddeld  $\lambda$  klanten per tijdseenheid aankomen en dat een bediende gemiddeld  $\mu$  klanten per tijdseenheid kan helpen. De gemiddelde bedieningstijd is dus  $1/\mu$ . Stel dat  $\mu = 3$ , met 1 uur als tijdseenheid. Als er 2 loketten in bedrijf zijn, kunnen er gemiddeld  $2 \cdot 3 = 6$  klanten per uur geholpen worden. Indien er 3 loketten in bedrijf zijn kunnen er  $3 \cdot 3 = 9$  klanten per uur geholpen worden. Bij  $k$  loketten is dat aantal  $k\mu$ .

Het bovenstaande kunnen we ook als volgt interpreteren. We beperken ons tot die tijdsperiodes waarin er precies 2 loketten bezet zijn. In die tijd zal er gemiddeld 6 keer per uur een loket vrij komen. Beperken we ons tot de tijdsperiodes waarin er precies 3 loketten bezet zijn, dan zal er in die tijd gemiddeld 9 keer per uur een loket vrij komen. Voor een ander aantal loketten geldt met een soortgelijke redenering. Het gemiddelde aantal klanten dat per uur geholpen kan worden, of het gemiddelde aantal keren dat er per uur een loket vrij komt, is dus afhankelijk van het aantal loketten dat in bedrijf is. Het overgangsdigram ziet er daarom als volgt uit (zie Figuur 3.5):



Figuur 3.5: Overgangsdigram

Uit het overgangsdigram leiden we de volgende evenwichtsvergelijkingen af:

	in		uit				
0	$\mu P_1$	=	$\lambda P_0$	$\implies$	$\lambda P_0$	=	$\mu P_1$
1	$\lambda P_0 + 2\mu P_2$	=	$\lambda P_1 + \mu P_1$	$\implies$	$\lambda P_1$	=	$2\mu P_2$
2	$\lambda P_1 + 3\mu P_3$	=	$\lambda P_2 + 2\mu P_2$	$\implies$	$\lambda P_2$	=	$3\mu P_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N	$\lambda P_{N-1}$	=	$N\mu P_N$	$\implies$	$\lambda P_{N-1}$	=	$N\mu P_N$

Uit de laatste kolom van de tabel berekenen we:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{\lambda}{\mu} P_0 = B P_0 \\
 P_2 &= \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{B}{2} B P_0 = \frac{B^2}{2!} P_0 \\
 P_3 &= \frac{\lambda}{3\mu} P_2 = \frac{B}{3} \frac{B^2}{2!} P_0 = \frac{B^3}{3!} P_0 \\
 &\vdots \\
 P_N &= \frac{\lambda}{N\mu} P_{N-1} = \frac{B}{N} \frac{B^{N-1}}{(N-1)!} P_0 = \frac{B^N}{N!} P_0
 \end{aligned}$$

Voor de evenwichtskansen vinden we dus:

**Stelling 17** *In een system met  $N$  loketten en capaciteit  $N$  geldt voor de evenwichtskansen*

$$P_k = \frac{B^k}{k!} P_0 \quad 0 \leq k \leq N$$

De evenwichtskansen  $P_k$  verschillen van die in de vorige paragrafen door de factor  $k!$  in de noemer. Dit betekent dat de evenwichtskansen voor wat grotere  $k$  nu aanzienlijk kleiner zijn dan die in de vorige paragrafen. Dit is uiteraard ook te verwachten, daar de uitbreiding van het aantal loketten de kans op veel klanten in het systeem aanzienlijk zal doen afnemen. De kans  $P_0$  bereken we op de bekende wijze:

$$\begin{aligned}
 P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_N &= 1 \\
 P_0 + \frac{B}{1!} P_0 + \frac{B^2}{2!} P_0 + \dots + \frac{B^N}{N!} P_0 &= 1 \\
 P_0 \left( 1 + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \dots + \frac{B^N}{N!} \right) &= 1 \\
 P_0 &= \frac{1}{1 + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \dots + \frac{B^N}{N!}}
 \end{aligned}$$

**Stelling 18** *In een systeem met  $N$  loketten en capaciteit  $N$  geldt voor  $P_0$*

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \dots + \frac{B^N}{N!}}$$

Hoewel de formule voor  $P_0$  niet moeilijk te onthouden is, zal het berekenen van  $P_0$  in de praktijk nogal wat rekenwerk vergen.

**Voorbeeld:**

Het reserveringsbureau van de KLM heeft 4 telefoonlijnen. Indien alle 4 lijnen bezet zijn, krijgt de klant een ingesprektoon. De klant hangt dan op. Het gemiddelde aantal klanten dat een reservering wil maken is 15 per uur. De gemiddelde afhandelingstijd is 12 minuten.

1. Bereken de kans dat geen van de lijnen bezet is.
2. Bereken de kans dat een klant een ingesprektoon krijgt.
3. Bereken het gemiddelde aantal klanten dat per uur een reservering maakt.

**Uitwerking:**

1. Voor het reserveringsbureau is  $\lambda = 15$  en  $\mu = 5$  dus  $B = 3$ . De kans dat geen van de lijnen bezet is, is  $P_0$ .

$$\text{Stelling 18 geeft } P_0 = \frac{1}{1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24}} = \frac{8}{131}$$

2. De kans dat alle lijnen bezet zijn, is gelijk aan  $P_4 = \frac{B^4}{4!} P_0 = \frac{81}{24} \cdot \frac{8}{131} = \frac{27}{131}$

3. Per uur proberen gemiddeld 15 klanten een reservering te maken. In onderdeel (b) hebben we uitgerekend dat de kans op een blokkade van het systeem gelijk is aan  $\frac{27}{131}$ . De kans dat een klant ook daadwerkelijk een reservering kan maken is dus  $\frac{104}{131}$ . Het gemiddelde aantal klanten dat per uur een reservering maakt, is dus  $\frac{104}{131} \cdot 15 \approx 11.91$

Als we de formule voor  $P_0$  nader bekijken, zien we dat de noemer bestaat uit de eerste  $N$  termen van de Taylorreeks van  $e^B$ . Als bijvoorbeeld  $B = 0.5$  dan is  $e^B = 1.6487213$  terwijl  $1 + B + \frac{B^2}{2!} + \dots + \frac{B^5}{5!} = 1.6486979$ . We zien dat  $e^{-B}$  hier een goede benadering is voor  $P_0$ . Voor grote  $N$  kunnen we  $P_0$  dus goed benaderen door  $e^{-B}$ .

**Stelling 19** In een systeem met  $N$  loketten en capaciteit  $N$  met grote  $N$  geldt

$$P_0 \approx e^{-B}$$

In dit geval vinden we voor de evenwichtskansen  $P_k \approx \frac{B^k}{k!} e^{-B}$ . Dit zijn de kansen uit de Poissonverdeling met gemiddelde  $B$ . Voor grote  $N$  kunnen we de evenwichtskansen dus opzoeken in de tabel van de Poissonverdeling met parameter  $B$  (als die voorhanden is).

**Stelling 20** Voor een systeem met  $N$  loketten en capaciteit  $N$  zijn de evenwichtskansen voor grote  $N$  bij benadering Poissonverdeeld met parameter  $B$ .



**Voorbeeld:**

De telefooncentrale van een bedrijf is met 6 lijnen aangesloten op het openbare net. Er komen gemiddeld 2 telefoontjes per minuut binnen, terwijl het afhandelen gemiddeld 24 seconden duurt.

1. Hoe groot is de kans dat alle lijnen bezet zijn?
2. Hoe groot is de kans dat meer dan de helft van de lijnen bezet is?

**Uitwerking:**

1. Er geldt  $\lambda = 2$  en  $\mu = 2\frac{1}{2}$  waaruit volgt dat  $B = 0.8$ . We benaderen de evenwichtskansen door Poissonkansen. De kans dat alle lijnen bezet zijn is  $P_6$ . Uit de Poissontabel met gemiddelde  $B = 0.8$  vinden we  $P_6 = 0.0002$ .
2. De kans op 4 of meer lijnen bezet is  $P_4 + P_5 + P_6$ . Deze kans vinden we in de cumulatieve Poissontabel. De gevraagde kans is  $1 - 0.9909 = 0.0091$ .

Als we veronderstellen dat er in een systeem geen wachtgelegenheid is, zijn de lengte van de wachtrij  $L_q$  en de wachttijd  $W_q$  gelijk aan 0. De gemiddelde doorlooptijd  $W$  is dan gelijk aan de gemiddelde bedieningstijd  $1/\mu$ . De effectieve aankomstrate – het gemiddelde aantal klanten dat per tijdseenheid het systeem binnenkomt – is weer gelijk aan  $\lambda_e = \lambda(1 - P_N)$ . Het gemiddelde aantal klanten in het systeem  $L$ , dat in dit geval gelijk is aan het gemiddelde aantal bezette loketten, berekenen we uit de relatie  $L = \lambda_e W$  van Little:

$$L = \lambda(1 - P_N) \frac{1}{\mu} = B(1 - P_N).$$

$L$  is hier gelijk aan de effectieve bezettinggraad  $B_e = \lambda_e/\mu$ . De effectieve bezettingsgraad is nu dus het gemiddelde aantal loketten dat in bedrijf is.

**Stelling 21** *In een systeem met  $N$  loketten en capaciteit  $N$  geldt*

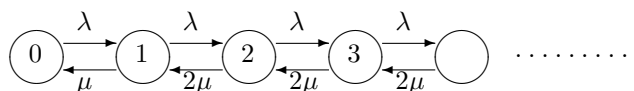
$$L = B(1 - P_N)$$

### 3.3.2 Twee loketten met onbegrensde wachtgelegenheid

In een postkantoor of bank kan men bij meerdere loketten terecht. Indien alle loketten bezet zijn, sluit de klant aan in de wachtrij. We nemen nu aan dat er één wachtrij is van waaruit de klanten naar een van de loketten gaan, zodra er een vrijkomt. (In Engeland hebben de meeste kantoren zo'n systeem; hier komen ze ook steeds meer in zwang.) Deze systemen kunnen we op dezelfde manier behandelen als het systeem zonder wachtgelegenheid uit de vorige paragraaf. De formules voor het algemene geval zijn nogal ingewikkeld. Daarom bespreken we hier slechts het geval van 2 loketten met een onbegrensde wachtgelegenheid.

Stel dat het aantal klanten dat per tijdseenheid aankomt gelijk is aan  $\lambda$  en dat het aantal klanten dat per tijdseenheid per loket geholpen kan worden gelijk is aan  $\mu$ . De bezettingsgraad  $B = \lambda/\mu$  heeft hier weer de betekenis van het gemiddelde aantal loketten dat bezet is. Als bijvoorbeeld  $\lambda = 8$  en  $\mu = 6$  dan komen er per tijdseenheid gemiddeld 8 klanten binnen. Per loket kunnen er in die tijd gemiddeld 6 geholpen worden, en dus is het gemiddelde aantal loketten dat bezet is, gelijk aan  $8/6=4/3$ . De bezettingsgraad  $B$  moet in dit geval kleiner zijn dan 2. Anders komen er per tijdseenheid meer klanten aan dan er per tijdseenheid geholpen kunnen worden, en zal de wachtrij oneindig groot worden.

Om de formules te kunnen afleiden stellen we eerst weer het overgangsdiaagram op. Als er 1 loket bezet is, kunnen er  $\mu$  klanten per tijdseenheid geholpen worden. Anders gezegd, per tijdseenheid zal dat loket  $\mu$  keer vrijkomen. Als er 2 loketten bezet zijn, kunnen er  $2\mu$  klanten per tijdseenheid geholpen worden. Er komt in dat geval dus  $2\mu$  keer per tijdseenheid een loket vrij. Deze situatie geldt wanneer er 2 of meer klanten in het systeem zijn. Immers de klanten in de wachtrij wachten tot één van de twee loketten vrijkomt. Het overgangsdiaagram ziet er dus als volgt uit (zie Figuur 3.6):



Figuur 3.6: Overgangsdiaagram

Aan de hand van het overgangsdiaagram stellen we de evenwichtsvergelijkingen op.

	in		uit				
0	$\mu P_1$	=	$\lambda P_0$	$\implies$	$\lambda P_0$	=	$\mu P_1$
1	$\lambda P_0 + 2\mu P_2$	=	$\lambda P_1 + \mu P_1$	$\implies$	$\lambda P_1$	=	$2\mu P_2$
2	$\lambda P_1 + 2\mu P_3$	=	$\lambda P_2 + 2\mu P_2$	$\implies$	$\lambda P_2$	=	$2\mu P_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$\lambda P_{k-1} + 2\mu P_{k+1}$	=	$\lambda P_k + 2\mu P_k$	$\implies$	$\lambda P_k$	=	$2\mu P_{k+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Uit de laatste kolom berekenen we de evenwichtskansen.

$$P_0, \quad P_1 = BP_0, \quad P_2 = \frac{B^2}{2}P_0, \quad P_3 = \frac{B^3}{2^2}P_0, \quad \dots \quad P_k = \frac{B^k}{2^{k-1}}P_0, \quad \dots$$

Voor de evenwichtskansen vinden we dus:

**Stelling 22** *In een systeem met 2 loketten en onbegrensde wachtgelegenheid geldt voor de evenwichtskansen*

$$P_k = \frac{B^k}{2^{k-1}}P_0 \quad k \geq 1$$

De noemer  $2^{k-1}$  maakt dat voor grotere  $k$  de kansen  $P_k$  aanzienlijk kleiner zijn dan de kansen bij slechts 1 loket. De som van de evenwichtskansen is uiteraard gelijk aan 1, en daaruit kunnen we  $P_0$  weer berekenen.

$$\begin{aligned}
 P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots &= 1 \\
 P_0 + BP_0 + \frac{B^2}{2}P_0 + \frac{B^3}{2^2}P_0 + \dots &= 1 \\
 P_0(1 + B + \frac{B^2}{2} + \frac{B^3}{2^2} + \dots) &= 1 \\
 P_0(1 + B(1 + \frac{B}{2} + \frac{B^2}{2^2} + \dots)) &= 1 \\
 P_0 \left( 1 + B \frac{1}{1 - \frac{B}{2}} \right) &= 1 \\
 P_0 \left( 1 + \frac{2B}{2 - B} \right) &= 1 \\
 P_0 \left( \frac{2 + B}{2 - B} \right) &= 1 \\
 P_0 &= \frac{2 - B}{2 + B}
 \end{aligned}$$

**Stelling 23** *In een systeem met 2 loketten en onbegrensde wachtgelegenheid geldt*

$$P_0 = \frac{2 - B}{2 + B}$$

Het gemiddelde aantal klanten in het systeem  $L$  wordt weer op de bekende wijze berekend, nu met behulp van de ‘oneindige gemengde reeks’ (zie pagina 60).

$$\begin{aligned}
 L &= 0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + \dots \\
 &= BP_0 + 2\frac{B^2}{2}P_0 + 3\frac{B^3}{2^2}P_0 + 4\frac{B^4}{2^3}P_0 + \dots \\
 &= BP_0(1 + 2\frac{B}{2} + 3\frac{B^2}{2^2} + 4\frac{B^3}{2^3} + \dots) \\
 &= B \frac{2 - B}{2 + B} \frac{1}{(1 - (B/2))^2} \\
 &= \frac{4B}{(2 + B)(2 - B)} = \frac{B}{1 - (B/2)^2}
 \end{aligned}$$

**Stelling 24** *In een systeem met 2 loketten en onbegrensde wachtgelegenheid is het gemiddeld aantal klanten in het systeem  $L$  gelijk aan*

$$L = \frac{B}{1 - (B/2)^2}$$

We hebben in de inleiding gezien dat  $B$  het gemiddelde aantal bezette loketten is.  $B$  is dus ook op te vatten als het gemiddelde aantal klanten dat geholpen wordt. De lengte van de wachtrij is dus weer gelijk aan  $L - B$ .

**Stelling 25** *In een system met 2 loketten en onbegrensde wachtgelegenheid is het gemiddelde aantal klanten in de wachtrij  $L_q$  gelijk aan*

$$L_q = L - B$$

De gemiddelde doorlooptijd  $W$  en de gemiddelde wachttijd  $W_q$  vinden we door toepassing van de relaties van Little.

**Stelling 26** *In een system met 2 loketten en onbegrensde wachtgelegenheid is de gemiddelde doorlooptijd  $W$  en de gemiddelde wachttijd  $W_q$  gelijk aan*

$$W = \frac{L}{\lambda} \quad \text{en} \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

### 3.3.3 Opgaven

1. Een receptie van een hotel heeft twee telefoonlijnen. Als beide lijnen bezet zijn, krijgt een beller een bezetton en hangt op. De receptie wordt gemiddeld 10 keer per uur gebeld. De afhandeling van een telefoontje kost gemiddeld 3 minuten.
  - (a) Bereken de kans dat er resp. 0, 1 of 2 lijnen bezet zijn.
  - (b) Hoeveel lijnen zijn er gemiddeld bezet?
  - (c) Hoeveel bellers zullen gemiddeld per uur de receptie niet aan de lijn krijgen?
2. Een reserveringsbureau heeft 8 telefoonlijnen. Het gemiddelde aantal klanten dat een reservering wil maken is 30 per uur. Het afhandelen van een reservering kost gemiddeld 8 minuten.
  - (a) Hoeveel lijnen zijn er gemiddeld bezet?
  - (b) Hoe groot is de kans dat geen van de lijnen bezet is?
  - (c) Hoeveel bellers kunnen er gemiddeld per uur niet direct een reservering maken?
3. Een postkantoor heeft twee loketten. Er komen gemiddeld 15 klanten per uur binnen. Als een klant niet onmiddellijk geholpen kan worden wacht hij op zijn beurt. De afhandeling van een klant kost gemiddeld 6 minuten.
  - (a) Hoe groot is de kans dat beide loketbedienden op zeker moment niets te doen hebben?

- (b) Hoeveel mensen staan er gemiddeld te wachten?
  - (c) Hoe lang moet een klant gemiddeld wachten?
4. In een winkel werken twee winkelbedienden. Het aantal klanten dat de winkel binnenkomt, is gemiddeld 6 per uur. Het kost gemiddeld een kwartier om een klant te helpen. Alle klanten blijven wachten totdat ze aan de beurt zijn.
- (a) Hoe groot is de gemiddelde wachttijd?
  - (b) Hoeveel klanten bevinden zich gemiddeld in de winkel?
  - (c) Hoeveel procent van de tijd heeft het winkelpersoneel niets te doen?
  - (d) Hoe groot is de kans dat er op een bepaald moment slechts één bediende bezig is?



# Bijlage A

## Formules

### Standaardlimieten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \quad \text{mits } |r| < 1$$

In het algemeen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p r^n = 0 \quad \text{mits } |r| < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

### Somformules voor reeksen

*Rekenkundige reeks:*

$$a + (a + v) + (a + 2v) + \dots + (a + nv) = \frac{1}{2}(n + 1)(2a + nv)$$

In woorden: de som van een rekenkundige rij met  $n + 1$  termen is gelijk aan  $\frac{1}{2}(n + 1)$  maal de som van de eerste en de laatste term.

Voorbeeld:

$$1900 + 1905 + 1910 + 1915 + \dots + 2000 = \frac{1}{2} \times 21 \times (1900 + 2000) = 40950.$$

*Eindige meetkundige reeks:*

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad \text{mits } r \neq 1$$

Voorbeeld:

$$10 + 20 + 40 + \dots + 10240 = 10 \times \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 20470.$$

*Oneindige meetkundige reeks:*

$$a + ar + ar^2 + \dots = \frac{a}{1-r} \quad \text{mits } |r| < 1$$

Voorbeeld:

$$10 + 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \frac{2}{125} + \dots = \frac{10}{1 - \frac{1}{5}} = 12.5$$

*Gemengde reeksen:*

$$a + 2ar + 3ar^2 + 4ar^3 + \dots + n \cdot ar^{n-1} = a \frac{1 - (n+1)r^n + nr^{n+1}}{(1-r)^2} \quad (r \neq 1)$$

Deze formule kan men afleiden door de formule voor de eindige meetkundige reeks naar  $r$  te differentiëren. Wanneer  $|r| < 1$  is, convergeert ook de oneindige gemengde reeks; de som verkrijgt men door in de bovenstaande formule  $n \rightarrow \infty$  te nemen en standaardlimieten toe te passen. Dit leidt tot:

*Oneindige gemengde reeks:*

$$a + 2ar + 3ar^2 + 4ar^3 + \dots = a \frac{1}{(1-r)^2} \quad \text{mits } |r| < 1.$$

Door nogmaals term voor term te differentiëren ontstaat de volgende formule:

$$1 \cdot 2 \cdot a + 2 \cdot 3 \cdot ar + 3 \cdot 4 \cdot ar^2 + 4 \cdot 5 \cdot ar^3 + \dots = a \frac{2}{(1-r)^3} \quad \text{mits } |r| < 1.$$

*Taylorreeks voor de e-macht*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

## Kansrekening

*Binomiale verdeling met parameters  $n$  en  $p$*

$$\text{kansverdeling:} \quad P(\underline{k} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, \dots, n)$$

$$\text{verwachting:} \quad E(\underline{k}) = np$$

$$\text{variantie:} \quad \text{Var}(\underline{k}) = np(1-p)$$

$$\text{standaardafwijking:} \quad \sigma(\underline{k}) = \sqrt{\text{Var}(\underline{k})} = \sqrt{np(1-p)}$$

*Poissonverdeling met parameter  $\mu$*

$$\text{kansverdeling:} \quad P(\underline{k} = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{verwachting:} \quad E(\underline{k}) = \mu$$

$$\text{variantie:} \quad \text{Var}(\underline{k}) = \mu$$

$$\text{standaardafwijking:} \quad \sigma(\underline{k}) = \sqrt{\text{Var}(\underline{k})} = \sqrt{\mu}$$

*Negatief-exponentiële verdeling met parameter  $\mu$*



$$\begin{aligned}
\text{verdelingsfunctie:} & F(t) = P(\underline{t} \leq t) = 1 - e^{-\mu t} \quad (t \geq 0) \\
\text{kansdichtheid:} & f(t) = \mu e^{-\mu t} \quad (t \geq 0) \\
\text{verwachting:} & E(\underline{t}) = \frac{1}{\mu} \\
\text{variantie:} & Var(\underline{t}) = \frac{1}{\mu^2} \\
\text{standaardafwijking:} & \sigma(\underline{t}) = \sqrt{Var(\underline{t})} = \frac{1}{\mu}
\end{aligned}$$

## Wachttijdtheorie

### Formules $M/M/1/\infty$ (onbeperkte wachtrij)

Aankomst: Poisson, parameter  $\lambda$

Bediening: Negatief-exponentieel, parameter  $\mu$

Per tijdseenheid arriveren gemiddeld  $\lambda$  klanten.

Per tijdseenheid kunnen gemiddeld  $\mu$  klanten bediend worden.

Gemiddelde bedieningsduur per klant:  $1/\mu$ .

Bezettingsgraad:  $B = \lambda/\mu$ .

Aanname:  $B < 1$ .

*In de stationaire toestand geldt:*

Als  $P_k$  de kans is op  $k$  klanten in het systeem ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), dan

$$P_k = B^k P_0 = B^k (1 - B).$$

Kans op  $k$  of meer klanten in het systeem:  $B^k$

Gemiddeld aantal klanten in het systeem:  $L = \frac{B}{1 - B} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$

Gemiddeld aantal klanten in wachtrij:  $L_q = L - B = \frac{B^2}{1 - B} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$

Gemiddelde doorlooptijd:  $W = \frac{1}{\mu - \lambda}$

Gemiddelde wachttijd in de rij:  $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$

Relaties van Little:

$$L = W\lambda \quad \text{en} \quad L_q = W_q\lambda$$

### Formules $M/M/1/N$ (maximaal $N$ klanten in het systeem)

Grootte wachtrij maximaal  $N - 1$ .

(Indien de wachtrij  $N - 1$  klanten bevat, lopen nieuw aankomende klanten door.)

Aankomst: Poisson, parameter  $\lambda$

Bediening: Negatief-exponentieel, parameter  $\mu$

Stel weer:  $B = \lambda/\mu$ .

N.B.:  $B$  is in dit geval *niet* de bezettingsgraad!

N.B.:  $B$  kan nu ook groter dan of gelijk aan 1 zijn!

In de stationaire toestand geldt:

Als  $P_k$  de kans is op  $k$  klanten in het systeem ( $k = 0, 1, 2, \dots, N$ ), dan

$$P_k = B^k P_0$$

en

$$P_0 = \begin{cases} \frac{1-B}{1-B^{N+1}} & (B \neq 1) \\ \frac{1}{N+1} & (B = 1) \end{cases}$$

Blokkeerkans:  $P_N$ .

Per tijdseenheid gaan gemiddeld  $\lambda_e = \lambda(1 - P_N)$  klanten het systeem binnen. In de stationaire toestand verlaten er per tijdseenheid net zo veel klanten het systeem. Per klant is de gemiddelde bedieningsduur aan het loket gelijk aan  $1/\mu$ , dus per tijdseenheid is het loket gemiddeld de volgende tijdsduur bezet:

$$B_e = \frac{\lambda_e}{\mu} = \frac{\lambda(1 - P_N)}{\mu} = B(1 - P_N)$$

Dit is de effectieve bezettingsgraad.

Er kan alleen sprake zijn van een stationaire toestand als  $B_e \leq 1$ . Merk op dat de bezettingsgraad ook gelijk is aan de kans dat er minstens één klant in het systeem aanwezig is:

$$B_e = B(1 - P_N) = 1 - P_0.$$

Gemiddeld aantal klanten in het systeem:

$$L = \begin{cases} \frac{B(1 - (N+1)B^N + NB^{N+1})}{(1-B)(1-B^{N+1})} & (B \neq 1) \\ \frac{1}{2}N & (B = 1) \end{cases}$$

Gemiddeld aantal klanten in de wachtrij:

$$L_q = L - B_e$$

Relaties van Little:

$$L = \lambda_e W \quad \text{en} \quad L_q = \lambda_e W_q$$

### Formules $M/M/N/N$ ( $N$ loketten, geen wachtgelegenheid)

Er zijn  $N$  loketten aanwezig. Klanten die alle loketten bezet vinden, lopen door.

Aankomst: Poisson, parameter  $\lambda$

Bediening: per loket negatief-exponentieel, parameter  $\mu$

De gemiddelde doorlooptijd  $W$  is gelijk aan de gemiddelde bedieningstijd  $\frac{1}{\mu}$ .

Noem weer  $B = \frac{\lambda}{\mu}$ .

*In de stationaire toestand geldt:*

Als  $P_k$  de kans is op  $k$  klanten in het systeem ( $k = 0, 1, 2, \dots, N$ ), dan geldt

$$P_k = \frac{B^k}{k!} P_0 = \frac{B^k}{k!} \frac{1}{1 + B + \frac{B^2}{2!} + \dots + \frac{B^N}{N!}}$$

Blokkeringskans:  $P_N$

Effectieve aankomstrate:  $\lambda_e = \lambda(1 - P_N)$

Gemiddeld aantal klanten in het systeem:  $L = B(1 - P_N)$

Voor grote  $N$  geldt

$$P_k \approx \frac{B^k}{k!} e^{-B}$$

dus voor grote  $N$  zijn de evenwichtskansen bij benadering Poissonverdeeld met parameter  $B$ .

### **Formules $M/M/2/\infty$ (2 loketten, onbeperkte wachtgelegenheid)**

Aankomst: Poisson, parameter  $\lambda$

Bediening: per loket negatief-exponentieel, parameter  $\mu$

Noem weer  $B = \frac{\lambda}{\mu}$ .

*In de stationaire toestand geldt:*

Als  $P_k$  de kans is op  $k$  klanten in het systeem ( $k \geq 0$ ), dan geldt

$$P_0 = \frac{2 - B}{2 + B}$$

$$P_k = \frac{B^k}{2^{k-1}} \frac{2 - B}{2 + B} \quad (k \geq 1).$$

Gemiddeld aantal klanten in het systeem:  $L = \frac{B}{1 - (B/2)^2}$ .

Gemiddeld aantal klanten in de wachtrij:  $L_q = L - B$ .

Relaties van Little:

$$L = W\lambda \quad \text{en} \quad L_q = W_q\lambda$$



## Bijlage B

# Antwoorden bij de opgaven

### Paragraaf 1.5

1.  $\lambda = 3.14$ ,  $\tau = 0.25$ ,  $k = 0$ ,  $P(\underline{k} = 0) \approx 0.456119$ .
2.  $\mu = \lambda\tau = 15/6 = 2.5$ ,  $P(\underline{k} \geq 3) = 1 - [P(\underline{k} = 0) + P(\underline{k} = 1) + P(\underline{k} = 2)] \approx 0.456186$ .
3.  $\mu = \lambda\tau = 0.23 \times 15 = 3.45$ .  $P(\underline{k} = 0) + P(\underline{k} = 1) + P(\underline{k} = 2) \approx 0.330194$ .
4.  $\lambda = 1/(1.75)$ .  $P(\underline{t} > 3) \approx 0.180093$ .
5. Gemiddelde behandeltijd:  $15/2.71 \approx 5.5$  minuten.  
Neem een kwartier als tijdseenheid, dan is  $\lambda = 2.71$  en  $P(\underline{t} > 2/3) \approx 0.164200$ .
6.  $\mu = 3.88$ .  $P(\underline{k} = 3) + P(\underline{k} = 4) \approx 0.40$ .

### Paragraaf 2.4

1. (a) Zie Figuur 2.12 met toestanden 0, 1, 2, 3 en  $\lambda = 3$ ,  $\mu = 4$ .  
(b)  $P_k = (3/4)^k P_0$  voor  $k = 1, 2, 3$ . Uit  $\sum_{k=0}^4 P_k = 1$  volgt dan

$$P_0 = \frac{1}{1 + (3/4) + (3/4)^2 + (3/4)^3} \approx 0.365714$$

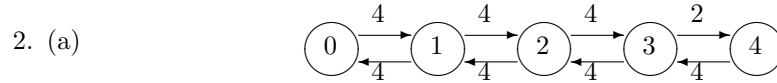
en dus  $P_1 \approx 0.274285$ ,  $P_2 \approx 0.205713$  en  $P_3 \approx 0.154284$ .

(c)  $L = E(\underline{L}) \approx 1 \cdot 0.274285 + 2 \cdot 0.205713 + 3 \cdot 0.154284 \approx 1.14856$ .

(d) Er komen per uur gemiddeld  $(1 - P_3) \times 3 \approx 2.53714$  klanten per uur binnen, dus de gemiddelde doorlooptijd voor een klant is

$$W \approx \frac{1.14856}{2.53714} \approx 0.452698 \text{ uur} \approx 27 \text{ minuten}$$

(e) De gemiddelde wachttijd is dus ongeveer 12 minuten.



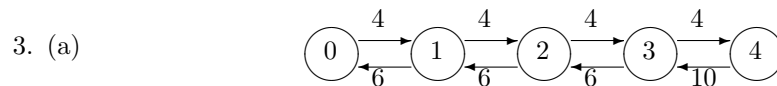
(b)  $P_0 = P_1 = P_2 = P_3 = \frac{2}{9}$ ,  $P_4 = \frac{1}{9}$ .

(c)  $L = \frac{16}{9}$ .

(d) Gemiddelde aantal klanten dat per uur binnenkomt:  $P_0 \cdot 4 + P_1 \cdot 4 + P_2 \cdot 4 + P_3 \cdot 2 = \frac{28}{9}$ , dus

$$W = \frac{16/9}{28/9} = \frac{4}{7} \approx 34.3 \text{ minuten}$$

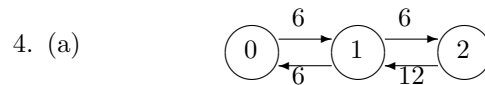
en dus is de gemiddelde wachttijd van een klant ruim 19 minuten.



(b)  $P_0 \approx 0.395895$ ,  $P_1 \approx 0.263930$ ,  $P_2 \approx 0.175953$ ,  $P_3 \approx 0.117301$ ,  $P_4 \approx 0.046920$ .

(c)  $L \approx 1.15542$ .

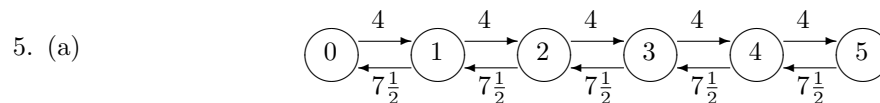
(d)  $(1 - P_4) \cdot 4 \approx 3.81231$  dus  $W \approx 1.15542/3.81231 \approx 0.303076$  uur, en dat is ruim 18 minuten.



(b)  $P_0 = P_1 = \frac{2}{5}$ ,  $P_2 = \frac{1}{5}$ .

(c) 80 procent.

(d) Gemiddeld krijgen  $\frac{1}{5} \times 6 = 1.2$  bellers per uur de ingesprektoon.



(b)  $P_k = (8/15)^k P_0$  voor  $k = 0, \dots, 5$ , en omdat de som van alle kansen 1 is, volgt hieruit

$$P_0 = \frac{1 - (8/15)}{1 - (8/15)^6} \approx 0.477659$$

zodat

$k$	$P_k$
0	0.477659
1	0.254751
2	0.135867
3	0.072463
4	0.038647
5	0.020612

(c)  $L \approx 1.00151$

(d)  $(1 - P_5) \cdot 4 \approx 3.91755$  dus  $W \approx 1.00151/3.91755 \approx 0.255647$  kwartier, en dat is bijna 4 minuten.



(b)  $P_0 = \frac{3}{4}$ ,  $P_1 = \frac{1}{4}$

(c) 45 minuten.

### Paragraaf 3.1.5

- (a)  $B = 0.5$ .

(b)  $W_q = 1/3$  minuut, dus 20 seconden.

(c) 40 seconden.

(d) 0.5.

(e) 1
- (a)  $\lambda = 10$ ,  $\mu = 15$ .  $L_q = 4/3$ .

(b)  $W_q = 2/15$ .

(c)  $P_0 = 1 - B = 1/3$ , dus  $33\frac{1}{3}$  procent.
- (a)  $\lambda = 5$ ,  $\mu = 10$ .  $L = 1$ .

(b)  $W_q = 1/10$ , dus 6 minuten.

(c)  $P_0 = 1/2$  dus 50 procent.

(d)  $L = \lambda/(\mu - \lambda) = 5$  bij  $\lambda = 5$  levert  $\mu = 6$ , dus gemiddeld mag een afhandeling hoogstens 10 minuten kosten.
- Neem 1 minuut als tijdseenheid. Dan  $\lambda = 4$ ,  $\mu = 6$ .

(a)  $W_q = 1/3$ , dus 20 seconden.

(b)  $L_q = 4/3$ .

(c)  $P_5 = (2/3)^5 \times (1/3) = 2^5/3^6 \approx 0.043896$ .

(d) Nu is  $\mu = 12$ . Dan is  $W_q = 1/24$ , dus  $2\frac{1}{2}$  seconden en  $L_q = 1/6$ .
- (a)  $\lambda = 10$ ,  $\mu = 12$ ,  $L_q = 4\frac{1}{6}$ .

(b) Een half uur.

(c)  $16\frac{2}{3}$  procent.

- (d)  $\mu$  daalt naar 10, met als gevolg dat de gemiddelde lengte van de wachtrij en de gemiddelde wachttijd naar oneindig gaan.
6. Neem voor het gemak 1 uur als tijdseenheid. Dan  $\lambda = 20$  en  $\mu = 30$ .
- (a)  $W = 1/10$ , dus 6 minuten.  
 (b)  $B = 2/3$  dus per uur is de printer gemiddeld 40 minuten bezig.  
 (c)  $P_0 = 1 - B = 1/3$ .
7. De wachtrij vormt zich nu in het notitieboekje van de monteur: hij schrijft daarin welke machines hij moet repareren.  $\lambda = 6$ ,  $\mu = 8$ . Het gemiddelde aantal machines ‘in het systeem’, dat wil zeggen machines die kapot zijn of gerepareerd worden, bedraagt  $L = 3$ . De gemiddelde kosten zijn dus 600 gulden per uur.
8. (a)  $\lambda = 12$ ,  $\mu = 30$ ,  $L = 2/3$  dus totale kopieerkosten 100 gulden per uur.  
 (b) Nu is  $\mu = 60$ , dus  $L = 1/4$ . De totale kosten bedragen dan  $80 + 75/4 = 98,75$  gulden per uur.

### Paragraaf 3.2.4

1.  $N = 4$ ,  $\lambda = 3$ ,  $\mu = 4$ .
- (a)  $B = 3/4$ ,  $P_0 = 0.327784$ ,  $B_e = 1 - P_0 = 0.672216$ ,  $\lambda_e = \mu \cdot B_e = 2.68886$ ,  $L = 1.44430$ ,  $L_q = L - B_e = 0.772087$  dus de gemiddelde wachttijd van een klant is  $W_q = L_q/\lambda_e = 0.287142$ , en dat is ruim 17 minuten.  
 (b)  $L = 1.44430$ .  
 (c) De kapper is  $B_e = 0.672216$  maal 60 minuten per uur bezig. Per klant is hij gemiddeld 15 minuten bezig. Hij helpt per uur dus  $0.672216 \times 60/15 = 2.68886$  klanten. Dit is gelijk aan de effectieve bezettingsgraad  $\lambda_e$ .  
 (d)  $P_0 = 0.327784$ .  
 (e)  $\lambda - \lambda_e = 3 - 2.68886 = 0.31114$ .
2.  $N = 5$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\mu = 15$ .
- (a)  $B = 2/3$ ,  $P_0 = 0.365413$ ,  $B_e = 1 - P_0 = 0.634586$ ,  $L = 1.42255$ , dus de gemiddelde lengte van de wachtrij is  $L_q = 0.787964$ .  
 (b)  $\lambda_e = \mu \times B_e = 9.51878$ .  
 (c)  $W = L/\lambda_e = 0.149446$  uur, dat is bijna 9 minuten.  
 (d)  $\lambda - \lambda_e = 0.481219$ .
3.  $N = 4$ ,  $\lambda = 6$ ,  $\mu = 10$ .
- (a)  $B = 3/5$ ,  $P_0 = 0.433726$ ,  $B_e = 0.566273$ ,  $L = 1.07841$ , dus de gemiddelde lengte van de wachtrij is  $L_q = 0.512136$ .  
 (b)  $\lambda_e = \mu \times B_e = 5.66272$  dus  $W_q = 0.0904399$  uur, dat is ruim 5.4 minuten.  
 (c)  $\lambda_e \times 5 \approx f 28,31$  per uur.  
 (d) De verdienste per uur wordt nu  $f 27,02$  per uur, dat is een daling van ruim 4.5 procent.



4.  $N = 7, \lambda = \mu = 8, B = 1$ .
- $P_7 = P_0 = \frac{1}{8}$ .
  - $L = 3\frac{1}{2}$  en  $B_e = \frac{7}{8}$  dus  $L_q = 2\frac{5}{8}$ .
  - $\lambda_e = 7$  dus  $W_q = \frac{3}{8}$  uur, dat is 22.5 minuten.
  - 7.
  - Nu is  $N = 4$ , dus  $P_0 = \frac{1}{5}, L = 2, B_e = \frac{4}{5}, L_q = \frac{6}{5}, \lambda_e = 6\frac{2}{5}, W_q = \frac{3}{16}$ .
5.  $N = 2, \lambda = 3, \mu = 6, B = \frac{1}{2}$ .
- $P_2 = \frac{1}{7}$ , dus 14.2857 procent van de tijd.
  - $P_0 = \frac{4}{7}$ , dus 57.1428 procent van de tijd.
  - $L = \frac{4}{7}, \lambda_e = \frac{18}{7}$  dus  $W = \frac{2}{9}$  uur, dat wil zeggen  $13\frac{1}{3}$  minuut.
  - Gemiddeld  $\frac{3}{7}$  cadet.
6.  $N = 4, \lambda = 4, \mu = 6, B = \frac{2}{3}$ .
- $B = 2/3, P_0 = 0.383886, B_e = 0.616113, \lambda_e = 3.69667$  dus er worden per uur gemiddeld ook 3.69667 apparaten geïnspecteerd.
  - $L = 1.24170$  dus  $L_q = L - B_e = 0.625587$ .
  - Per uur:  $\lambda - \lambda_e = 0.30333$  apparaten, dus per dag worden er gemiddeld 2.42663 apparaten naar het magazijn gebracht. (d) 38.3886 procent.

### Paragraaf 3.3.3

1.  $N = 2, \lambda = 10, \mu = 20, B = \frac{1}{2}$ .
- $P_0 = \frac{8}{13}, P_1 = \frac{4}{13}, P_2 = \frac{1}{13}$ .
  - $L = \frac{6}{13}$ .
  - $10 \times P_2 = \frac{10}{13}$ .
2.  $N = 8, \lambda = 30, \mu = 7\frac{1}{2}, B = 4$ .
- We werken met de e-machtbenadering voor  $P_k$ . Dan is  $P_8 \approx 0.0297701$  en dus is  $L = B(1 - P_8) \approx 3.88091$ . Er zijn dus gemiddeld bijna 4 lijnen bezet.
  - $P_0 \approx e^{-4} \approx 0.0183156$ .
  - $\lambda \times P_8 \approx 0.893103$ .
3.  $\lambda = 15, \mu = 10, B = 3/2$ .
- $P_0 = \frac{1}{7}$ .
  - $L = \frac{24}{7}$ , dus  $L_q = \frac{27}{14}$ .
  - $W_q = \frac{9}{70}$  uur, dat is ruim 7.7 minuten.
4.  $\lambda = 6, \mu = 4, B = 3/2$ .
- $L_q = \frac{27}{14}$  dus  $W_q = \frac{9}{28}$  uur, dat is ruim 19 minuten.
  - $L = 3\frac{3}{7}$ .
  - $P_0 = \frac{1}{7}$ .
  - $P_1 = \frac{3}{14}$ .