De Riemann-hypothese

Een miljoenenprobleem

Jan van de Craats (UvA)

Leve de Wiskunde, UvA, 11 april 2014

De Riemann-hypothese

De Riemann-hypothese

‘Alle niettriviale nulpunten van de zètafunctie liggen op de kritieke lijn.’

De Riemann-hypothese

‘Alle niettriviale nulpunten van de zètafunctie liggen op de kritieke lijn.’

Bernhard Riemann (1826-1866)

Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse (1859)

De Riemann-hypothese

'Alle niettriviale nulpunten van de zètafunctie liggen op de kritieke lijn.'

Bernhard Riemann (1826-1866)

Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse (1859)

Op de vierde bladzijde hiervan staat de 'Riemann-hypothese' vermeld als een stelling die waarschijnlijk waar is, gevolgd door:

De Riemann-hypothese

‘Alle niettriviale nulpunten van de zètafunctie liggen op de kritieke lijn.’

Bernhard Riemann (1826-1866)

Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse (1859)

Op de vierde bladzijde hiervan staat de ‘Riemann-hypothese’ vermeld als een stelling die waarschijnlijk waar is, gevolgd door:

‘Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da es für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.’

Priemgetallen

Een priemgetal is een geheel getal groter dan 1 dat alleen zonder rest deelbaar is door 1 en door zichzelf.

Priemgetallen

Een priemgetal is een geheel getal groter dan 1 dat alleen zonder rest deelbaar is door 1 en door zichzelf.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots$$

Priemgetallen

Een priemgetal is een geheel getal groter dan 1 dat alleen zonder rest deelbaar is door 1 en door zichzelf.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \ldots$$

Stelling:

Aan de rij van de priemgetallen komt geen einde.

(Euclides, ca. 300 v.Chr.)

Wiskunde met Wolfram Alpha

Ga naar

`www.wolframalpha.com`

Wiskunde met Wolfram Alpha

Ga naar

`www.wolframalpha.com`

Type in de commandoregel, druk op =, en varieer:

Ga naar

`www.wolframalpha.com`

Type in de commandoregel, druk op =, en varieer:

`is prime 1597553`

Ga naar

`www.wolframalpha.com`

Type in de commandoregel, druk op =, en varieer:

`is prime 1597553`

`next prime 1597554`

Wiskunde met Wolfram Alpha

Ga naar

`www.wolframalpha.com`

Type in de commandoregel, druk op =, en varieer:

`is prime 1597553`

`next prime 1597554`

`factor 1597554`

Ga naar

`www.wolframalpha.com`

Type in de commandoregel, druk op =, en varieer:

```
is prime 1597553

next prime 1597554

factor 1597554

factor 2*3*5*7*11*13*17 +1
```

De verdeling van de priemgetallen

De verdeling van de priemgetallen

Hoe liggen de priemgetallen verdeeld onder de natuurlijke getallen? Wat is het honderdste priemgetal? Wat is het miljoenste priemgetal?

De verdeling van de priemgetallen

Hoe liggen de priemgetallen verdeeld onder de natuurlijke getallen? Wat is het honderdste priemgetal? Wat is het miljoenste priemgetal?

Hoeveel priemgetallen zijn er van 10 cijfers? Van 100 cijfers? Van een miljoen cijfers?

De verdeling van de priemgetallen

Hoe liggen de priemgetallen verdeeld onder de natuurlijke getallen? Wat is het honderdste priemgetal? Wat is het miljoenste priemgetal?

Hoeveel priemgetallen zijn er van 10 cijfers? Van 100 cijfers? Van een miljoen cijfers?

Hulpmiddel bij het onderzoek hiernaar: de functie $\pi(x)$.

De verdeling van de priemgetallen

Hoe liggen de priemgetallen verdeeld onder de natuurlijke getallen? Wat is het honderdste priemgetal? Wat is het miljoenste priemgetal?

Hoeveel priemgetallen zijn er van 10 cijfers? Van 100 cijfers? Van een miljoen cijfers?

Hulpmiddel bij het onderzoek hiernaar: de functie $\pi(x)$.

Onder $\pi(x)$ verstaat men het aantal priemgetallen kleiner dan of gelijk aan x. Deze functie is voor alle reële $x > 0$ gedefinieerd. Kennen we $\pi(x)$, dan kennen we de verdeling van de priemgetallen.

De verdeling van de priemgetallen

Hoe liggen de priemgetallen verdeeld onder de natuurlijke getallen? Wat is het honderdste priemgetal? Wat is het miljoenste priemgetal?

Hoeveel priemgetallen zijn er van 10 cijfers? Van 100 cijfers? Van een miljoen cijfers?

Hulpmiddel bij het onderzoek hiernaar: de functie $\pi(x)$.

Onder $\pi(x)$ verstaat men het aantal priemgetallen kleiner dan of gelijk aan x. Deze functie is voor alle reële $x > 0$ gedefinieerd. Kennen we $\pi(x)$, dan kennen we de verdeling van de priemgetallen.

Riemann onderzocht in zijn artikel de functie $\pi(x)$. Hij leidde een expliciete formule af waarin hij $\pi(x)$ uitdrukte in een door Leonhard Euler (1707-1783) geïntroduceerde functie, de zètafunctie.

De verdeling van de priemgetallen

Hoe liggen de priemgetallen verdeeld onder de natuurlijke getallen? Wat is het honderdste priemgetal? Wat is het miljoenste priemgetal?

Hoeveel priemgetallen zijn er van 10 cijfers? Van 100 cijfers? Van een miljoen cijfers?

Hulpmiddel bij het onderzoek hiernaar: de functie $\pi(x)$.

Onder $\pi(x)$ verstaat men het aantal priemgetallen kleiner dan of gelijk aan x. Deze functie is voor alle reële $x > 0$ gedefinieerd. Kennen we $\pi(x)$, dan kennen we de verdeling van de priemgetallen.

Riemann onderzocht in zijn artikel de functie $\pi(x)$. Hij leidde een expliciete formule af waarin hij $\pi(x)$ uitdrukte in een door Leonhard Euler (1707-1783) geïntroduceerde functie, de zètafunctie.

Kennen we de zètafunctie, dan kennen we de functie $\pi(x)$ en dan kennen we de verdeling van de priemgetallen.

De priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$ met Wolfram Alpha

Type in en varieer:

```
plot primepi(x) x = 1 to 50
```

De priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$ met Wolfram Alpha

Type in en varieer:

```
plot primepi(x) x = 1 to 50
```

```
plot{x/ln(x), primepi(x)} x = 2 to 100
```

De priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$ met Wolfram Alpha

Type in en varieer:

```
plot primepi(x) x = 1 to 50
```

```
plot{x/ln(x), primepi(x)} x = 2 to 100
```

```
plot (x/ln(x)) / primepi(x)) x = 2 to 100
```

De priemgetallen-stelling

De priemgetallen-stelling

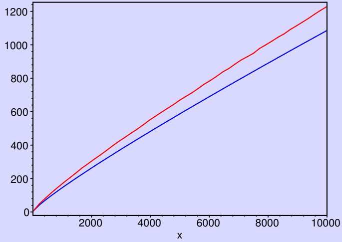
Uit onderzoek van o.a. Gauss (1777-1855) bleek dat het wel eens zo zou kunnen zijn dat

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad \text{voor } x \to \infty$$

De priemgetallen-stelling

Uit onderzoek van o.a. Gauss (1777-1855) bleek dat het wel eens zo zou kunnen zijn dat

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad \text{voor } x \to \infty$$

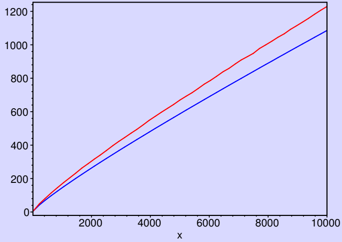


$\pi(x)$ (rood) en $\dfrac{x}{\ln x}$ (blauw)

De priemgetallen-stelling

Uit onderzoek van o.a. Gauss (1777-1855) bleek dat het wel eens zo zou kunnen zijn dat

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad \text{voor } x \to \infty$$



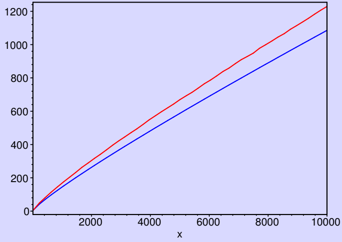
$\pi(x)$ (rood) en $\dfrac{x}{\ln x}$ (blauw)

D.w.z. dat de relatieve fout bij de benadering van $\pi(x)$ door $\dfrac{x}{\ln x}$ naar 0 gaat voor $x \to \infty$.

De priemgetallen-stelling

Uit onderzoek van o.a. Gauss (1777-1855) bleek dat het wel eens zo zou kunnen zijn dat

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad \text{voor } x \to \infty$$



$\pi(x)$ (rood) en $\dfrac{x}{\ln x}$ (blauw)

D.w.z. dat de relatieve fout bij de benadering van $\pi(x)$ door $\dfrac{x}{\ln x}$ naar 0 gaat voor $x \to \infty$.

oftewel:

$$\lim_{x \to \infty} \pi(x) \bigg/ \frac{x}{\ln x} = 1$$

De priemgetallen-stelling

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad \text{voor } x \to \infty$$

De priemgetallen-stelling

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad \text{voor } x \to \infty$$

Dit vermoeden, dat bekend staat als de priemgetallenstelling, is in 1896 bewezen door Hadamard en De la Vallée Poussin (onafhankelijk van elkaar).
Gevolg: er zijn ontzettend veel grote priemgetallen!

De priemgetallen-stelling

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \quad \text{voor } x \to \infty$$

Dit vermoeden, dat bekend staat als de priemgetallenstelling, is in 1896 bewezen door Hadamard en De la Vallée Poussin (onafhankelijk van elkaar).
Gevolg: er zijn ontzettend veel grote priemgetallen!

Zo is het aantal priemgetallen van honderd cijfers vele, vele, vele malen groter dan het aantal elementaire deeltjes in het heelal!

Met zulke priemgetallen wordt in de cryptografie gewerkt (RSA).

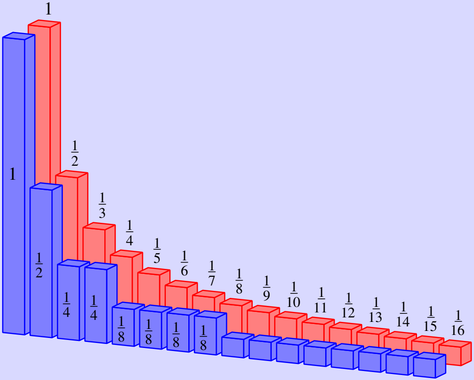
De zètafunctie

De zètafunctie

De harmonische reeks $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ divergeert:

De zètafunctie

De harmonische reeks $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ divergeert:



De truc van Nicholas Oresme (1323-1382)

De zètafunctie

Maar voor elke $x > 1$ convergeert de reeks

$$1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots$$

De zètafunctie

Maar voor elke $x > 1$ convergeert de reeks

$$1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots$$

Leonhard Euler (1707-1783) noemde de somfunctie $\zeta(x)$. Die heeft dus domein $x > 1$.

De zètafunctie

Maar voor elke $x > 1$ convergeert de reeks

$$1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots$$

Leonhard Euler (1707-1783) noemde de somfunctie $\zeta(x)$. Die heeft dus domein $x > 1$.

Het is een dalende functie van x, die voor $x \downarrow 1$ een verticale asymptoot heeft. Verder geldt $\zeta(x) > 1$ voor alle $x > 1$.

De zètafunctie

Maar voor elke $x > 1$ convergeert de reeks

$$1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots$$

Leonhard Euler (1707-1783) noemde de somfunctie $\zeta(x)$. Die heeft dus domein $x > 1$.

Het is een dalende functie van x, die voor $x \downarrow 1$ een verticale asymptoot heeft. Verder geldt $\zeta(x) > 1$ voor alle $x > 1$.

De convergentie van de reeks kan eenvoudig worden aangetoond met het integraalkenmerk (eerstejaarsstof bij de wiskundestudie), maar het kan ook meer elementair, met een modificatie van de truc van Oresme.

De zètafunctie (vervolg)

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots$$

De zètafunctie (vervolg)

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots$$

Voor een grafiek, type in en varieer

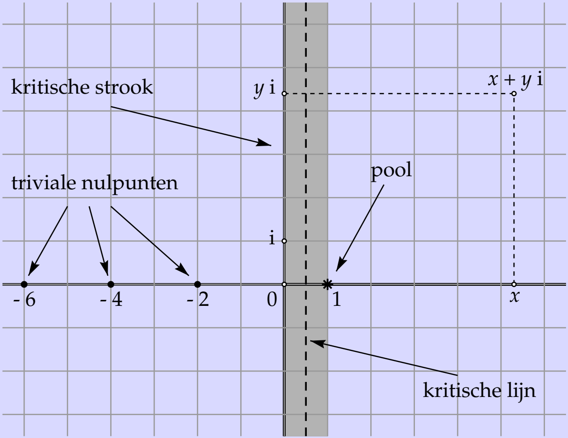
```
plot zeta(x) x = 1 to 5
```

Voor functiewaarden, type in en varieer

```
zeta(2)
```

De complexe zètafunctie van Riemann (vooruitblik)

De complexe zètafunctie van Riemann (vooruitblik)



Het verband tussen de priemgetallen en de zètafunctie

Het verband tussen de priemgetallen en de zètafunctie

Eulers productformule: *Voor iedere x groter dan 1 geldt:*

$$\zeta(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{2^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{11^x}} \cdots$$

Het verband tussen de priemgetallen en de zètafunctie

Eulers productformule: *Voor iedere x groter dan* 1 *geldt:*

$$\zeta(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{2^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{11^x}} \cdots$$

Elke factor in dit oneindige product is van de vorm

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^x}}$$

Het verband tussen de priemgetallen en de zètafunctie

Eulers productformule: *Voor iedere x groter dan 1 geldt:*

$$\zeta(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{2^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{11^x}} \cdots$$

Elke factor in dit oneindige product is van de vorm

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^x}}$$

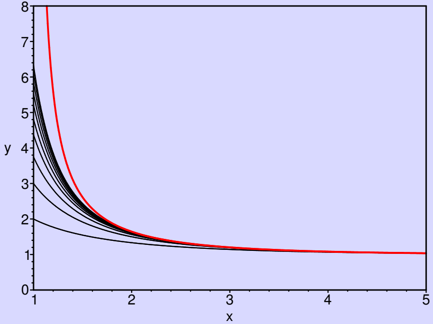
en het product wordt genomen over alle priemgetallen p.

Eulers productformule

$$\zeta(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{2^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{11^x}} \cdots$$

Eulers productformule

$$\zeta(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{2^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{11^x}} \cdots$$



De grafiek van $\zeta(x)$ (rode lijn) samen met de grafieken van de eerste tien benaderingen van het Eulerproduct.

Eulers bewijs (schets)

Eulers bewijs (schets)

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots$$

Eulers bewijs (schets)

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots$$

$$\frac{1}{2^x}\zeta(x) = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{8^x} + \frac{1}{10^x} + \frac{1}{12^x} + \cdots$$

Eulers bewijs (schets)

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots$$

$$\frac{1}{2^x}\zeta(x) = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{8^x} + \frac{1}{10^x} + \frac{1}{12^x} + \cdots$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\zeta(x) = 1 + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{7^x} + \frac{1}{9^x} + \frac{1}{11^x} + \frac{1}{13^x} + \cdots$$

Eulers bewijs (schets)

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots$$

$$\frac{1}{2^x}\zeta(x) = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{8^x} + \frac{1}{10^x} + \frac{1}{12^x} + \cdots$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\zeta(x) = 1 + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{7^x} + \frac{1}{9^x} + \frac{1}{11^x} + \frac{1}{13^x} + \cdots$$

$$\frac{1}{3^x}\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\zeta(x) = \frac{1}{3^x} + \frac{1}{9^x} + \frac{1}{15^x} + \frac{1}{21^x} + \frac{1}{27^x} + \frac{1}{33^x} + \cdots$$

Eulers bewijs (schets)

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots$$

$$\frac{1}{2^x}\zeta(x) = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{8^x} + \frac{1}{10^x} + \frac{1}{12^x} + \cdots$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\zeta(x) = 1 + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{7^x} + \frac{1}{9^x} + \frac{1}{11^x} + \frac{1}{13^x} + \cdots$$

$$\frac{1}{3^x}\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\zeta(x) = \frac{1}{3^x} + \frac{1}{9^x} + \frac{1}{15^x} + \frac{1}{21^x} + \frac{1}{27^x} + \frac{1}{33^x} + \cdots$$

$$\left(1 - \frac{1}{3^x}\right)\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\zeta(x) = 1 + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{7^x} + \frac{1}{11^x} + \frac{1}{13^x} + \frac{1}{17^x} + \frac{1}{19^x} +$$

Eulers bewijs (schets)

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots$$

$$\frac{1}{2^x}\zeta(x) = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{8^x} + \frac{1}{10^x} + \frac{1}{12^x} + \cdots$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\zeta(x) = 1 + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{7^x} + \frac{1}{9^x} + \frac{1}{11^x} + \frac{1}{13^x} + \cdots$$

$$\frac{1}{3^x}\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\zeta(x) = \frac{1}{3^x} + \frac{1}{9^x} + \frac{1}{15^x} + \frac{1}{21^x} + \frac{1}{27^x} + \frac{1}{33^x} + \cdots$$

$$\left(1 - \frac{1}{3^x}\right)\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)\zeta(x) = 1 + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{7^x} + \frac{1}{11^x} + \frac{1}{13^x} + \frac{1}{17^x} + \frac{1}{19^x} +$$

En zo voort!

Eulers bewijs (schets)

eindresultaat:

Eulers bewijs (schets)

eindresultaat:

$$\cdots\left(1-\frac{1}{7^x}\right)\left(1-\frac{1}{5^x}\right)\left(1-\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{2^x}\right)\zeta(x)=1$$

Eulers bewijs (schets)

eindresultaat:

$$\cdots\left(1-\frac{1}{7^x}\right)\left(1-\frac{1}{5^x}\right)\left(1-\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{2^x}\right)\zeta(x)=1$$

oftewel

Eulers bewijs (schets)

eindresultaat:

$$\cdots\left(1-\frac{1}{7^x}\right)\left(1-\frac{1}{5^x}\right)\left(1-\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{2^x}\right)\zeta(x)=1$$

oftewel

$$\zeta(x)=\frac{1}{1-\frac{1}{2^x}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^x}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5^x}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7^x}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{11^x}}\cdots$$

Riemanns onderzoek

Riemanns onderzoek

Riemann ging bij zijn onderzoek uit van Eulers productformule.

Riemanns onderzoek

Riemann ging bij zijn onderzoek uit van Eulers productformule.

Hij breidde daarna Eulers zètafunctie $\zeta(x)$ (die Euler alleen maar gedefinieerd had voor reële $x > 1$) uit tot een complexe functie $\zeta(z)$ die gedefinieerd en analytisch is voor alle complexe getallen $z \neq 1$.

Riemanns onderzoek

Riemann ging bij zijn onderzoek uit van Eulers productformule.

Hij breidde daarna Eulers zètafunctie $\zeta(x)$ (die Euler alleen maar gedefinieerd had voor reële $x > 1$) uit tot een complexe functie $\zeta(z)$ die gedefinieerd en analytisch is voor alle complexe getallen $z \neq 1$.

Daartoe leidde hij de volgende formidabele formule af:

$$\zeta(-z) = \frac{-2 \cdot z!}{(2\pi)^{z+1}} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \zeta(z+1)$$

Riemanns onderzoek

Riemann ging bij zijn onderzoek uit van Eulers productformule.

Hij breidde daarna Eulers zètafunctie $\zeta(x)$ (die Euler alleen maar gedefinieerd had voor reële $x > 1$) uit tot een complexe functie $\zeta(z)$ die gedefinieerd en analytisch is voor alle complexe getallen $z \neq 1$.

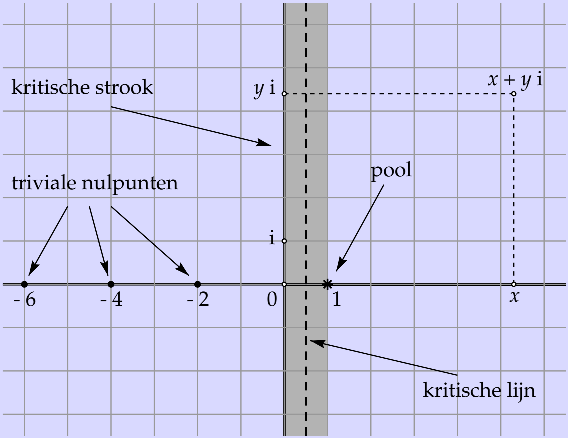
Daartoe leidde hij de volgende formidabele formule af:

$$\zeta(-z) = \frac{-2 \cdot z!}{(2\pi)^{z+1}} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \zeta(z+1)$$

Vervolgens vond hij een formule waarin de priemgetallen-telfunctie $\pi(x)$ uitgedrukt wordt in de complexe nulpunten van deze zètafunctie.

De nulpunten van de zètafunctie

De nulpunten van de zètafunctie



Een plot van $|\zeta(\frac{1}{2} + t\ \mathrm{i})|$

Hoe is het gedrag van (de absolute waarde van) $\zeta(z)$ op de kritische lijn

$$z = \frac{1}{2} + t\ \mathrm{i}$$

voor reële waarden van t ?

Een plot van $|\zeta(\frac{1}{2} + t\ \mathrm{i})|$

Hoe is het gedrag van (de absolute waarde van) $\zeta(z)$ op de kritische lijn

$$z = \frac{1}{2} + t\ \mathrm{i}$$

voor reële waarden van t ?

Type in en varieer de grenzen van t:

```
plot abs(zeta(.5 + t*I)), t = 0 to 40
```

De niettriviale nulpunten

De niettriviale nulpunten

$\frac{1}{2} \pm 14,134725\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 21,022040\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 25,010856\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 30,424878\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 32,935057\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 37,586176\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 40,918720\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 43,327073\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 48,005150\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 49,773832\,\mathrm{i}$

Links staan de eerste twee maal tien niettriviale nulpunten van de zètafunctie, waarbij het imaginaire deel is afgerond op 6 decimalen.

De niettriviale nulpunten

$\frac{1}{2} \pm 14,134725\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 21,022040\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 25,010856\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 30,424878\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 32,935057\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 37,586176\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 40,918720\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 43,327073\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 48,005150\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 49,773832\,\mathrm{i}$

Links staan de eerste twee maal tien niettriviale nulpunten van de zètafunctie, waarbij het imaginaire deel is afgerond op 6 decimalen.

Ze liggen allemaal op de kritische lijn $\Re(z) = \frac{1}{2}$.

De niettriviale nulpunten

$\frac{1}{2} \pm 14,134725\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 21,022040\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 25,010856\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 30,424878\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 32,935057\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 37,586176\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 40,918720\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 43,327073\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 48,005150\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 49,773832\,\mathrm{i}$

Links staan de eerste twee maal tien niettriviale nulpunten van de zètafunctie, waarbij het imaginaire deel is afgerond op 6 decimalen.

Ze liggen allemaal op de kritische lijn $\Re(z) = \frac{1}{2}$.

Inmiddels is geverifieerd dat de eerste honderd miljard niettriviale nulpunten ook allemaal op de kritische lijn liggen.

De niettriviale nulpunten

$\frac{1}{2} \pm 14,134725\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 21,022040\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 25,010856\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 30,424878\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 32,935057\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 37,586176\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 40,918720\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 43,327073\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 48,005150\,\mathrm{i}$

$\frac{1}{2} \pm 49,773832\,\mathrm{i}$

Links staan de eerste twee maal tien niettriviale nulpunten van de zètafunctie, waarbij het imaginaire deel is afgerond op 6 decimalen.

Ze liggen allemaal op de kritische lijn $\Re(z) = \frac{1}{2}$.

Inmiddels is geverifieerd dat de eerste honderd miljard niettriviale nulpunten ook allemaal op de kritische lijn liggen.

Maar er zijn oneindig veel niettriviale nulpunten, en de Riemann-hypothese is nog steeds niet bewezen.

Tot slot . . .

Verder lezen:

Tot slot . . .

Verder lezen:

- Roland van der Veen en Jan van de Craats, De Riemann-hypothese – Een miljoenenprobleem, Epsilon Uitgaven 69, 2011

Tot slot . . .

Verder lezen:

- Roland van der Veen en Jan van de Craats, De Riemann-hypothese – Een miljoenenprobleem, Epsilon Uitgaven 69, 2011
- John Derbyshire, *Prime Obsession, Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, London, 2003, ISBN 0-452-28525-9

Tot slot . . .

Verder lezen:

- Roland van der Veen en Jan van de Craats, De Riemann-hypothese – Een miljoenenprobleem, Epsilon Uitgaven 69, 2011
- John Derbyshire, *Prime Obsession, Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, London, 2003, ISBN 0-452-28525-9
- Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes, why an unsolved problem in mathematics matters*, London, 2003, ISBN 1-84115-580-2

Tot slot . . .

Verder lezen:

- Roland van der Veen en Jan van de Craats, De Riemann-hypothese – Een miljoenenprobleem, Epsilon Uitgaven 69, 2011
- John Derbyshire, *Prime Obsession, Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, London, 2003, ISBN 0-452-28525-9
- Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes, why an unsolved problem in mathematics matters*, London, 2003, ISBN 1-84115-580-2

`http://staff.science.uva.nl/~craats`