

**Jan van de Craats (UvA, OU)**

# **Basiswiskunde: met of zonder context?**

**MathMatch eindconferentie**

**Universiteit Twente, 15 februari 2007**

## KORTE (RECENTE) GESCHIEDENIS:

- begin 2006: Actie LieveMaria, debat Tweede Kamer
- 31 januari 2006: brief minister OCW aan Tweede Kamer over wiskunde in Tweede Fase.
- 14 februari 2006: Tweede Kamer aanvaardt unaniem de voorstellen van de minister
- 14 februari 2006: Tweede Kamer aanvaardt unaniem een motie die vraagt om instelling van een Resonansgroep wiskunde met als taak de voorstellen van de Vernieuwingscommissie wiskunde (cTWO, cie. Siersma) te beoordelen op hun doorstroomrelevantie
- 23 augustus 2006: installatie Resonansgroep wiskunde
- augustus 2006: Tweede Kamer vraagt de Resonansgroep ook commentaar te geven op de voorgestelde profielaanpassingen wiskunde voor de Tweede Fase op de korte termijn

## KORTE (RECENTE) GESCHIEDENIS (vervolg):

- september 2006: cTWO publiceert het concept-visiedocument 'Rijk aan betekenis'
- begin november 2006: Resonansgroep publiceert haar Standpunt t.a.v. de korte-termijnproblematiek
- begin november 2006: Resonansgroep publiceert een reactie op het concept-visiedocument cTWO
- 14 december 2006: minister publiceert besluiten t.a.v. profiel-aanpassingen
- 7 februari 2007: cTWO publiceert definitieve versie visiedocument

Zie ook

[www.resonansgroepwiskunde.nl](http://www.resonansgroepwiskunde.nl)  
[www.fi.uu.nl/ctwo/](http://www.fi.uu.nl/ctwo/)

## CONTEXTEN IN WISKUNDE OP HAVO EN VWO

Zeer zinvol, inspirerend en motiverend bij:

- **Introductie nieuwe begrippen**
- **Speciale, al dan niet profielbrede projecten**
- **Praktische opdrachten**
- **Profielwerkstukken**
- **Nieuwe vak wiskunde D**

Daarbij ook aandacht voor **KRITISCHE MODELVORMING**

## CONTEXTEN IN WISKUNDE OP HAVO EN VWO

Niet zinvol, juist demotiverend en misleidend als:

- de context gekunsteld is
- er geen aandacht is voor kritische modelvorming
- formules ongemotiveerd uit de lucht komen vallen
- context duidelijk alleen maar bedoeld is om wat te rekenen
- context duidelijk alleen maar bedoeld is om wat met formules te stoeien
- er geen zinnige vragen gesteld en beantwoord worden

## **Het CENTRAAL SCHRIFTELIJK EINDEEXAMEN (CE):**

### **Visiedocument cTWO:**

**Het CE is in de praktijk een richtinggevende standaard voor het niveau van het schoolexamen en het onderwijs in het algemeen – scholen richten zich met het schoolexamen immers veelal op het CE. Daarmee bepaalt het voor een belangrijk deel de invulling van de eindtermen.**

## **Het CENTRAAL SCHRIFTELIJK EINDEXAMEN (CE):**

### **Visiedocument cTWO:**

**Het CE is in de praktijk een richtinggevende standaard voor het niveau van het schoolexamen en het onderwijs in het algemeen – scholen richten zich met het schoolexamen immers veelal op het CE. Daarmee bepaalt het voor een belangrijk deel de invulling van de eindtermen.**

**Voor wat betreft het CE is een heroverweging gewenst waar het gaat om de norm voor algebraïsche vaardigheden, notatie en formulering, hulpmiddelen en het gebruik van contexten.**

## CONTEXTEN IN EXAMENOPGAVEN (CE):

**Standpunt resonansgroep:**

**Examenopgaven alleen in context plaatsen wanneer die context bestand is tegen een kritische analyse en wanneer de vraagstelling uitmondt in het oplossen van zinnige problemen met geschikte wiskundige hulpmiddelen.**



## CONTEXTEN IN EXAMENOPGAVEN (CE):

### Standpunt resonansgroep:

Examenopgaven alleen in context plaatsen wanneer die context bestand is tegen een kritische analyse en wanneer de vraagstelling uitmondt in het oplossen van zinnige problemen met geschikte wiskundige hulpmiddelen.

### Visiedocument cTWO:

Contexten huidige examens wiskunde B (m.u.v. kansrek. en stat.) dikwijls niet relevant (...).

Voor wiskunde B: buitenwiskundige contexten alleen als de aard van de opgave daar specifiek om vraagt.

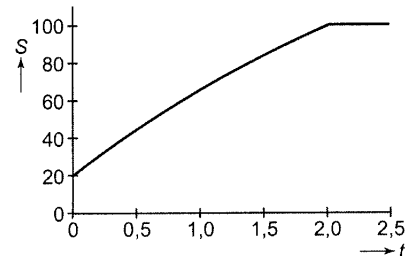
## Voorbeeld (CE vwo B12, 2006, 1e tijdvak)

### Sauna

Om 15.00 uur wordt het verwarmingselement van een sauna aangezet. Vanaf dat moment wordt de sauna opgewarmd. Dan geldt:  $S(t) = 200 - 180 \cdot e^{-0,29t}$ . Hierin is  $S$  de temperatuur in de sauna in graden Celsius en  $t$  de tijd in uren vanaf 15.00 uur.

De thermostaat van de sauna is ingesteld op 100 °C. Zodra die temperatuur bereikt is, wordt het opwarmen gestopt. Vanaf dat moment wordt de temperatuur constant gehouden. In figuur 1 staat de grafiek van  $S$ .

figuur 1



4p 1  Bereken hoe laat het opwarmen wordt gestopt. Geef het tijdstip in minuten nauwkeurig.

4p 2  Bereken met behulp van differentiëren de snelheid waarmee de temperatuur in de sauna toeneemt om 16.00 uur. Geef je antwoord in tienden van graden Celsius per minuut.

Om bij een ingestelde temperatuur van de thermostaat uit te rekenen hoe lang de sauna nodig heeft om deze temperatuur te bereiken, kun je een formule gebruiken die  $t$  uitdrukt in  $S$ .

4p 3  Druk  $t$  uit in  $S$ .

**Wiskundige kern: gegeven**  $S(t) = 200 - 180 \cdot e^{-0.29t}$

- 1. Los op**  $S(t) = 100$
- 2. Bereken**  $S'(1)$
- 3. Druk**  $t$  **uit in**  $S$

**Oplossing (kern):**

- 1. GR**
- 2. diff., GR**
- 3. Uit**  $A = e^B$  **volgt**  $B = \ln A$  **(formulekaart)**

# Correctiemodel:

## Sauna

### Maximumscore 4

- 1  •  $200 - 180 \cdot e^{-0,29t} = 100$
- beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden
  - de oplossing  $t \approx 2,027$
  - het tijdstip 17:02 uur

### Maximumscore 4

- 2  •  $S'(t) = -180 \cdot -0,29 \cdot e^{-0,29t}$
- $S'(1) \approx 39,06$
  - het antwoord 0,7 (°C/min)

### Maximumscore 4

- 3  • Uit  $S = 200 - 180 \cdot e^{-0,29t}$  volgt  $180 \cdot e^{-0,29t} = 200 - S$
- $e^{-0,29t} = \frac{200 - S}{180}$
  - $-0,29t = \ln \frac{200 - S}{180}$
  - $t = \frac{\ln \frac{200 - S}{180}}{-0,29}$  (of een gelijkwaardige uitdrukking)

## Vergelijk instaptoets 3 TU's (2006)

9. De oplossing van de vergelijking $e^{2x} = 16$ is  A. $\ln(4)$ B. $\ln(8)$ C. $\frac{(\ln(4))^2}{2}$ D. $\ln(64)$	A. 35% B. 39% C. 21% D. 5% <i>E-machten en logaritmen worden traditioneel slecht gemaakt, ook met formulekaart.</i>
	Antwoord: A

(percentages en commentaar van UTwente)

## De situatie bij Wiskunde A

### Visiedocument cTWO:

**‘In de examens wiskunde A bestaat er een traditie van opgaven waarin de context essentieel is voor de vraag; de context is feitelijk de vraag. De commissie (dwz. cTWO) beschouwt dit als een goede situatie (...)’**

## De situatie bij Wiskunde A

### Visiedocument cTWO:

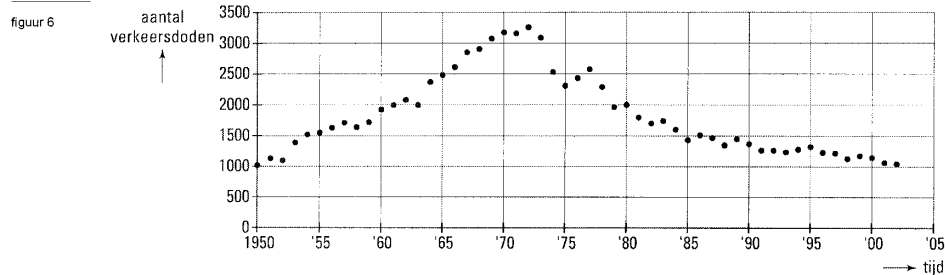
**‘In de examens wiskunde A bestaat er een traditie van opgaven waarin de context essentieel is voor de vraag; de context is feitelijk de vraag. De commissie (dwz. cTWO) beschouwt dit als een goede situatie (...)’**

**De afnemers (met name de universitaire studierichtingen economie en bedrijfskunde) denken hier echter heel anders over!**

**Maar eerst wat voorbeelden.**

# Voorbeeld: vwo wiskunde A12, 1e tijdvak, 2006

In figuur 6 zie je een grafiek van het aantal verkeersdoden voor de jaren 1950 tot en met 2002.



In figuur 6 is te zien dat het aantal verkeersdoden het grootst was in 1972. Toen waren er 3264 verkeersdoden. Door een actief beleid inzake verkeersveiligheid is sinds die tijd het aantal verkeersdoden afgenomen tot 1066 in het jaar 2002. Weliswaar steeg het aantal verkeersdoden in sommige jaren, maar toch is er een duidelijke dalende trend waarneembaar in de periode 1972-2002. We kunnen deze trend beschrijven met een model waarbij het aantal verkeersdoden exponentieel afneemt van 3264 in 1972 tot 1066 in 2002. Volgens dit model zou het aantal verkeersdoden tussen 1972 en 2002 jaarlijks met een vast percentage dalen.

4p 18  Bereken dit percentage.

Het verloop van het aantal verkeersdoden, zoals je dat ziet in figuur 6, kan bij benadering worden beschreven met de volgende formule:

$$N = 0,8 + \frac{t + 2}{10 + (0,04t)^{6,8}}$$

In deze formule is  $N$  het aantal verkeersdoden per jaar in duizendtallen en  $t$  is de tijd in jaren vanaf 1950, dus  $t = 0$  in 1950.

Deze formule is slechts een model dat hoort bij figuur 6. Daarom komt de grafiek die hoort bij de formule niet precies overeen met de grafiek uit figuur 6. Een belangrijk verschil is bijvoorbeeld dat volgens de formule de piek in het aantal verkeersdoden niet in 1972 plaatsvond, maar in een ander jaar.

3p 19  Onderzoek in welk jaar de piek plaatsvond volgens bovenstaande formule.



## Correctiemodel:

### Maximumscore 4

18  • De groeifactor per 30 jaar is  $\frac{1066}{3264}$  ( $\approx 0,3266$ )

• De groeifactor per jaar is  $\left(\frac{1066}{3264}\right)^{\frac{1}{30}}$

• De groeifactor is (ongeveer) 0,963

• Dat is een jaarlijkse afname met 3,7% (of 4%)

of

• het opstellen van de vergelijking  $3264 \cdot g^{30} = 1066$

• beschrijven hoe met de GR deze vergelijking kan worden opgelost

• De groeifactor  $g$  is (ongeveer) 0,963

• Dat is een jaarlijkse afname met 3,7% (of 4%)

### Maximumscore 3

19  • het gebruik van een geschikte optie van de GR om de waarde van  $t$  van de piek te berekenen

• De piek treedt op bij  $t = 27$

• Dat is in het jaar 1977

## Ander voorbeeld (zelfde eindexamen vwo wiskunde A):

Een roofdier van soort C is in totaal 1 uur onderweg. Voor deze roofdieren is de opbrengstfunctie gegeven door de formule:

$$r = 4\sqrt{t-1} \text{ als } t > 1 \text{ (voor het eerste uur geldt: } r = 0)$$

Hierin is  $t$  de tijd in uren en  $r$  de hoeveelheid gevonden voedsel in ee.

Deze opbrengstfunctie  $r$  heeft voor  $t > 1$  de volgende twee eigenschappen:

- een langere tijd levert altijd een hogere opbrengst op;
- de toename van de opbrengst wordt steeds geringer naarmate  $t$  groter wordt.

Deze twee eigenschappen zijn zichtbaar in de grafiek van  $r$ , maar ze kunnen ook worden verklaard aan de hand van de grafiek van de afgeleide van  $r$ .

- 5p 11  Schets de grafiek van de afgeleide van  $r$  en verklaar de beide eigenschappen aan de hand van deze grafiek.

## Correctiemodel:

$$11 \square \bullet r = 4(t-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\bullet r' = \frac{2}{\sqrt{t-1}} \quad (\text{of } r' = 2 \cdot (t-1)^{-\frac{1}{2}})$$

- een schets van de grafiek van  $r'$
- 1e eigenschap:  $r'$  is overal positief, dus moet  $r$  overal stijgen
- 2e eigenschap: de grafiek van  $r'$  is overal dalend, dus de toename van de opbrengst is steeds geringer

of

- de GR instellen op het tekenen van de grafiek van  $r'$
- een schets van de grafiek van  $r'$
- 1e eigenschap:  $r'$  is overal positief, dus moet  $r$  overal stijgen
- 2e eigenschap: de grafiek van  $r'$  is overal dalend, dus de toename van de opbrengst is steeds geringer

**N.b.:** dit is het **ENIGE** examenonderdeel waarin differentiëren ter sprake komt!

**Wat willen de afnemers van wiskunde A? Bijvoorbeeld de faculteiten economie en bedrijfskunde? (Jaarlijks duizenden eerstejaarsstudenten.)**

**Lijst van Herman ten Napel (economie, UVA), geaccordeerd door de gezamenlijke economie/bedrijfskundefaculteiten :**

- rekenvaardigheden
- formulevaardigheden
- kennis van elementaire functies
- differentiaalrekening

**(lijst beschikbaar op homepage Herman ten Napel, bereikbaar via [www.resonansgroepwiskunde.nl](http://www.resonansgroepwiskunde.nl))**

**Wat willen de afnemers van wiskunde A? Bijvoorbeeld de faculteiten economie en bedrijfskunde? (Jaarlijks duizenden eerstejaarsstudenten.)**

**Lijst van Herman ten Napel (economie, UVA), geaccordeerd door de gezamenlijke economie/bedrijfskundefaculteiten:**

- rekenvaardigheden
- formulevaardigheden
- kennis van elementaire functies
- differentiaalrekening

**(lijst beschikbaar op homepage Herman ten Napel, bereikbaar via [www.resonansgroepwiskunde.nl](http://www.resonansgroepwiskunde.nl))**

**Zie ook artikel over economie en bedrijfskunde aan de Universiteit van Maastricht in NRC Handelsblad, 20 januari 2007**

NEDERLANDSE STUDENT LEGT HET AF TEGEN DUITSE COLLEGA

# Lui, langzaam en matig

Maastricht is niet te spreken over de eerstejaars economie.

**Derk Walters**

MAASTRICHT spijkert Nederlandse economiestudenten bij in wiskunde en economie, in de zomer voor de studie begint. Hun Duitse medestudenten hebben dat niet nodig.

Drie onderzoekers van de Universiteit Maastricht, Dirk Tempelaar en Bart Rientjes (Economische Wetenschappen en Bedrijfskunde) en onderwiskundige Wim Gijsselaers, testten 1.580 eerstejaars economie (lichting 2004 en 2005) op niveau, motivatie en leerstrategieën - 585 Nederlanders en 640 Duitsers. Ze keken ook naar de verschillen tussen mannelijke en vrouwelijke studenten. Bovendien zijn de wiskundeprestaties uit 1999 per nationaliteit vergeleken met die sinds 2003. De belangrijkste conclusie: de Nederlanders blijven vakinhoudelijk ver achter bij hun Duitse medestudenten. Ze halen lagere cijfers en doen langer over hun studie.

De Maastrichtse wetenschappers noemen hun onderzoek het eerste empirische bewijs van wat critici van de tweede fase op het vwo al dachten. Het Nederlandse onderwijs is de afgelopen jaren slechter geworden. De resultaten liegen er niet om. Duitsers scoren over de hele linie beter, en vrouwen beter dan mannen. Bij Duitse vrouwen steken Nederlandse mannen af als ongenieusere. Ze zijn minder bereid om zich in te spannen en behalen matige resultaten. De vergelijking tussen Nederlandse en Duitse studenten is reëel: de Duitse studenten zijn weliswaar van het extra gemotiveerde soort - ze kiezen er voor in het buitenland te studeren - maar ze stromen toe in Maastricht en met die concurrentie hebben de Nederlanders te maken. Zeker als je bedenkt dat voor sommige economische stu-

• **Studiekeuzefestival in Leiden.**

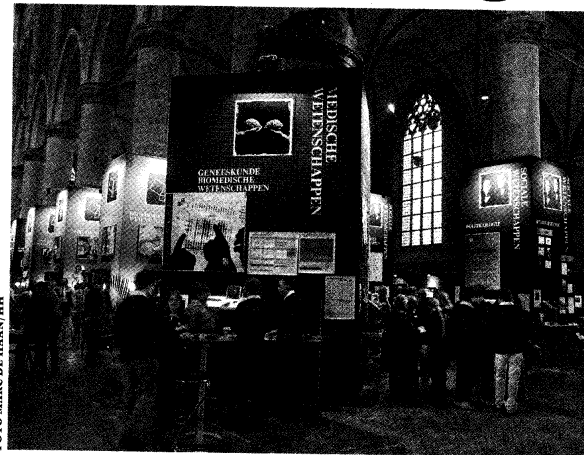


FOTO MARC DE HAAN/HRH

dies een numerus fixus bestaat.

Wij gingen er eigenlijk van uit dat Duitse studenten aansluitingsproblemen zouden hebben, vertelt onderzoeker Dirk Tempelaar. Tot een jaar of zes geleden deden de Duitsers het inderdaad iets minder goed aan het begin van hun studie. „Maar die achterstand hebben ze rap ingehaald,” Tempelaar, universitair docent wiskunde, oordeelt niet mild over de wiskunde-kennis van de Nederlandse eerstejaarsstudenten economie. Wiskunde is weliswaar niet het hoofdbestanddeel van de studie, maar, zegt Tempelaar, „alle economische opleidingen zijn tegenwoordig behoorlijk wiskundig georiënteerd”. Voor bepaalde afstudeerriichten is grondige kennis van wiskunde zelfs onontbeerlijk, aldus Tempelaar. De studenten zijn bij zijn vak „volstrekt afhankelijk van hun grafische rekenmachine”, een apparaat dat niet mag worden gebruikt op de universiteit. Overigens heeft eenderde van de instrumende Nederlandse studenten een van de ‘natuurprofielen’ gevolgd, met het

relatief zware wiskunde b1 of b2. De rest heeft alleen het lichtere wiskunde a1 of a2 als verplicht vak gehad.

Uit een ander onderzoek van Tempelaar blijkt dat vooral de ‘taligheid’ en het ‘contextrijke aanbod’ van de wiskunde op het vwo debet zijn aan de tekortkomingen van Nederlandse studenten. Sommigen zijn geen sommen meer, maar verhaaltjes die tot een logische conclusie moeten leiden. Bij economie missen de studenten vooral het overzicht en de samenhang.

**STATISTIEK** Is het Duitse onderwijs zoveel beter? Tempelaar: „Het is in elk geval stabiel gebleven.” Het negatieve effect van de tweede fase is daarentegen onmiskenbaar, stellen de onderzoekers. De keuzevrijheid die het huidige vwo kenmerkt, is volgens Tempelaar „niet voor iedereen goed”. Behalve op ‘harde’ wiskundeopdrachten zijn de studenten ook vergeleken op het onderdeel statistiek. Duitsers krijgen nauwelijks statistiek in het voortgezet onderwijs, Nederlanders in ruime mate. Toch

presteren de Nederlanders maar net iets beter dan de Duitsers. Daar wreekt zich, zegt Tempelaar, dat de Nederlandse studenten betrekkelijk ongericht leren en weinig interesse in het vak hebben. „De Duitsers doen vanaf dag één hun best om hun achterstand in te halen. Bij de eerste toets zijn ze daar al bijna in geslaagd.”

De beste remedie voor de alarmerende prestaties van de Nederlandse studenten zou aanpassing van het vwo-curriculum zijn, zeggen de onderzoekers. Omdat ze daarop geen invloed hebben, zijn ze begonnen met zomere online bijspijkercursumen wiskunde en economie voor aankomende studenten. De resultaten daarvan zijn spectaculair: de bijgespijkerde studenten maken volgens Tempelaar „enorme kennisprongen” en scoren in hun eerste jaar significant beter dan de studenten die de cursus niet hebben gevolgd. Maar eigenlijk zou de cursus niet nodig moeten zijn. Tempelaar: „We hopen echt op meer vakinhoud op het vwo. Er is wel wat in beweging, maar het zal een taai slag zijn.”

LE ANKI POSTHUMUS

**Huidige praktijk (bijvoorbeeld UVA, UM, EUR, VU)**

**Intensieve begincursus wiskunde (vwo-stof) van circa 7 tot 8 weken. Veel tussentoetsen (MathMatch!). Resultaten matig. Niet zelden negatief bindend studieadvies**

**Vrijwillige zomerbijspijkerkursus wiskunde (UM)**

**Meer hierover komt in een artikel van Dirk Tempelaar in Nieuw Archief voor Wiskunde, maartnummer 2007**

## **Voorstel Resonansgroep:**

**Splits het CE zowel voor wiskunde A als voor wiskunde B, zowel voor havo als voor vwo, in twee delen: een deel zonder hulpmiddelen (GR en formulekaart) en een deel met hulpmiddelen.**

**Over de praktische realisatie hiervan zal uitgebreid overleg worden gevoerd met alle betrokkenen.**



**Conclusies:**

## Conclusies:

- De huidige examenpraktijk (GR, formulekaart) belemmert het aanleren en onderhouden van rekenvaardigheid, formulevaardigheid, kennis van elementaire functies en calculus. Dit geldt zowel voor wiskunde A als voor wiskunde B.

## Conclusies:

- De huidige examenpraktijk (GR, formulekaart) belemmert het aanleren en onderhouden van rekenvaardigheid, formulevaardigheid, kennis van elementaire functies en calculus. Dit geldt zowel voor wiskunde A als voor wiskunde B.
- Niet de havo- en vwo-contexten worden in het vervolgonderwijs gebruikt, maar juist die abstracte vaardigheden.

## Conclusies:

- De huidige examenpraktijk (GR, formulekaart) belemmert het aanleren en onderhouden van rekenvaardigheid, formulevaardigheid, kennis van elementaire functies en calculus. Dit geldt zowel voor wiskunde A als voor wiskunde B.
- Niet de havo- en vwo-contexten worden in het vervolgonderwijs gebruikt, maar juist die abstracte vaardigheden.
- De vakken zelf zijn de context in hbo en universiteit.

## Conclusies:

- De huidige examenpraktijk (GR, formulekaart) belemmert het aanleren en onderhouden van rekenvaardigheid, formulevaardigheid, kennis van elementaire functies en calculus. Dit geldt zowel voor wiskunde A als voor wiskunde B.
- Niet de havo- en vwo-contexten worden in het vervolgonderwijs gebruikt, maar juist die abstracte vaardigheden.
- De vakken zelf zijn de context in hbo en universiteit.
- Terecht heeft de minister besloten de rekenregels voor differentiëren bij vwo A niet te schrappen uit de stof voor het CE.

## Conclusies:

- De huidige examenpraktijk (GR, formulekaart) belemmert het aanleren en onderhouden van rekenvaardigheid, formulevaardigheid, kennis van elementaire functies en calculus. Dit geldt zowel voor wiskunde A als voor wiskunde B.
- Niet de havo- en vwo-contexten worden in het vervolgonderwijs gebruikt, maar juist die abstracte vaardigheden.
- De vakken zelf zijn de context in hbo en universiteit.
- Terecht heeft de minister besloten de rekenregels voor differentiëren bij vwo A niet te schrappen uit de stof voor het CE.
- Realisatie van het voorstel van de Resonansgroep om het CE te splitsen in twee delen: een deel zonder hulpmiddelen (GR en formulekaart) en een deel mét hulpmiddelen, is een noodzakelijke voorwaarde voor doorstroomrelevant wiskundeonderwijs, zowel voor wiskunde A als voor wiskunde B.