Universiteit Leiden
Tentamen Besliskunde A - Stochastische Besliskunde
11 januari 2016, 14:00-17:00

Naast een pen is bij dit tentamen een enkel vel a4-papier toegestaan, die aan beide kanten beschreven mag zijn met uw handgeschreven (dus geen digitale) aantekeningen. Andere hulpmiddelen (bijv. dictaten, rekenmachines) worden niet toegelaten.

Het aantal punten dat voor elke deelvraag kunt verdienen staat tussen vierkante haken aangegeven. In totaal kunt u 38 punten behalen. Het aantal punten dat u behaald heeft zal na deling door 3.8 derhalve uw tentamencijfer vormen.

Veel succes!

Opgave 1

Geef bij elk van de volgende uitspraken aan of deze waar is of niet waar. Beargumenteer bij elke uitspraak **kort** uw antwoord. (Uw antwoord wordt enkel goedgekeurd bij een correcte beargumentatie.)

a) [2 pt.] Beschouw een continue(-tijd) Markov keten met toestandsruimte S en overgangsintensiteiten $\nu_{i,j}$. Laat $N(t)$ het aantal transities zijn die plaatsgevonden hebben in het tijdsinterval $[0, t)$. Een noodzakelijke voorwaarde voor de stelling '$\{N(t), t \geq 0\}$ is een Poissonproces' wordt gegeven door 'er bestaat een $\nu > 0$ zodat $\nu_{i,j} = \nu$ voor alle $i, j \in S$ waarvoor $i \neq j$'.

b) [2 pt.] Zij $\{N_1(t), t \geq 0\}$ en $\{N_2(t), t \geq 0\}$ twee Poisson processen, en $Y(t) = \lfloor \frac{N_1(t)+N_2(t)}{10} \rfloor$. Dan is $\{Y(t), t \geq 0\}$ een vernieuwingsproces.

c) [2 pt.] Beschouw een M/G/1 wachtrijmodel, waarbij de bediening van elke klant bestaat uit twee fasen, die elk een exponentieel (μ) verdeelde tijd benodigd hebben. Laat $L(t)$ het aantal klanten in het systeem zijn op tijdstip t. Dan kan het proces $\{L(t), t \geq 0\}$ gemodelleerd worden als een geboorte-sterfte proces.

d) [2 pt.] Als in een M/M/s wachtrijmodel de bedieningsvolgorde veranderd wordt van FIFO (first-in-first-out) naar LIFO (last-in-first-out), dan verandert de gemiddelde verblijftijd van een klant in het systeem. *Hint: vergeet u de stelling van meneer Little niet!*

Uitwerkingen

a) Niet waar. Om $N(t)$ een Poisson proces te laten zijn, moeten de tijden tussen transities allemaal exponentieel verdeeld zijn met dezelfde parameter. Aangezien de benodigde tijd om vanuit een toestand i te transitioneren naar een andere toestand exponentieel verdeeld is met parameter $-q_{i,i}$, is het noodzakelijk dat alle $q_{i,i}$ voor $i \in S$ aan elkaar gelijk zijn. Gelijke $\nu_{i,j}$ is een voldoende voorwaarde voor dit laatste, maar beslist geen noodzakelijke.

b) Waar. De superpositie van de twee Poisson processen $\{N_1(t), t \geq 0\}$ en $\{N_2(t), t \geq 0\}$, levert, als ze onafhankelijk zijn, opnieuw een Poisson proces, zeg met parameter λ. Het proces $\{Y(t), t \geq 0\}$ telt vervolgens elke tiende gebeurtenis van dit nieuwe Poisson proces, en heeft dus Erlang(10, λ) verdeelde tussentijden. Aangezien de tussentijden van het nieuwe Poisson proces per definitie onafhankelijk zijn, zijn de tussentijden van $\{Y(t), t \geq 0\}$ dit ook. Samengevat zijn de tussentijden van $\{Y(t), t \geq 0\}$ i.i.d., wat leidt tot de uitspraak.

c) Niet waar. Om het geheel te modelleren als een Markov-keten, zouden we het aantal bedieningsfasen in het systeem als toestand moeten nemen. Echter, bij elke aankomst komen er niet één maar twee bedieningsfasen het systeem binnen, wat niet in het framework van geboorte-sterfte processen past.

d) Niet waar. Er verandert in stochastische zin niets aan het proces dat het aantal klanten in het systeem beschrijft (bedieningsvolgorde maakt hiervoor immers niet uit), dus het verwachte aantal klanten in het systeem verandert niet. Via de stelling van Little kan dus beredeneerd worden dat de verwachte verblijftijd ook niet verandert.

Opgave 2
In een callcenter van een kabelmaatschappij wordt een medewerker door zijn supervisor scherp in de gaten gehouden, omdat de medewerker in kwestie verdacht wordt van het te lang helpen van de bellende klanten. De tijdsduren $X_1, X_2, \ldots$ van de gesprekken die de medewerker voert zijn onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld met parameter λ (tijdseenheid: minuten). Het betreft een beruchte kabelmaatschappij, dus u mag ervan uitgaan dat de hoeveelheid wachtende klanten onuitputtend is. Met andere woorden, na het afsluiten van een gesprek zal de medewerker gelijk met het volgende gesprek aanvangen. De supervisor besluit aanvankelijk de te lange gesprekken te turven: als een gevoerd gesprek langer dan γ minuten geduurd heeft, wordt dit aan het einde van het gesprek door de supervisor geregistreerd. Het einde van zo'n gesprek wordt een registratiemoment genoemd.

a) [2 pt.] Laat de stochast Y de hoeveelheid gesprekken tussen de start van het eerste gesprek en het eerste registratiemoment representeren. Bepaal $\mathbb{P}(Y = k)$.

b) [3 pt.] Beredeneer dat Y een stoptijd is voor $X_1, X_2, \ldots$, en gebruik dit gegeven om te bepalen wat de verwachte tijd is die verstrijkt tussen twee registratiemomenten.

Na de turfperiode besluit de inmiddels furieuze supervisor te lang gebelde minuten in euro's op het salaris van de medewerker in te houden. Zo betekent 2m30s te lang doorbellen bijvoorbeeld een salarisverlaging van € 2.50.

c) [3 pt.] Bepaal hoeveel euro gemiddeld per uur op het salaris van de medewerker wordt ingehouden.

Uitwerkingen

a) De kans dat een gesprek geregistreerd wordt is gelijk aan $\mathbb{P}(X_1 > \gamma) = e^{-\lambda\gamma}$. Y telt het aantal 'goede' gesprekken na een te lang gesprek, plus de 'foute' die erop volgt. Dit leidt tot de geometrische verdeling: $\mathbb{P}(Y = k) = (1 - e^{-\lambda\gamma})^{k-1} e^{-\lambda\gamma}$.

b) We hebben dat $Y = \min\{n \geq 1 : \{X_n > \gamma\} \cap \bigcup_{i=1}^{n-1}\{X_i < \gamma\}\}$. De gebeurtenis $\{Y = n\}$ hangt dus alleen van $X_1, \ldots, X_n$ af en niet van $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$. Derhalve is Y een stoptijd. Merk op dat $\mathbb{E}[Y] = e^{\lambda\gamma}$ en $\mathbb{E}[X_1] = \lambda^{-1}$. Via de vergelijking van Wald verkrijgen we vervolgens dat:

$$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{Y} X_i] = \mathbb{E}[Y] * \mathbb{E}[X_1] = \lambda^{-1} e^{\lambda\gamma}.$$

c) We bekijken het proces waarbij de registratiemomenten een vernieuwingsproces vormen. De 'kosten' per cyclus worden gevormd door de te lang doorgebelde minuten vlak voor het registratiemoment. De verwachte kosten per vernieuwingscyclus worden dus gegeven door $\mathbb{E}[X_1 - \gamma \mid X_1 > \gamma]$. Vanwege de geheugenloosheidseigenschap van de exponentiele verdeling is dit gelijk aan $\mathbb{E}[X_1] = \lambda^{-1}$. Vervolgens weten we al dat de verwachte tijd tussen registratiemomenten gelijk is aan $\lambda^{-1} e^{\lambda\gamma}$. Via Stelling 2.8 uit het dictaat komen we dan uit op $\frac{\lambda^{-1}}{\lambda^{-1} e^{\lambda\gamma}} = e^{-\lambda\gamma}$ euro per minuut. Dit is gelijk aan $60e^{-\lambda\gamma}$ euro per uur.

Opgave 3
Een notoire gokker gaat met een fors startkapitaal een avondje gokken in een gokhal. Bij elk gokspel wint hij met kans p een halve euro, in het andere geval verliest hij een halve euro. De gokker stopt pas met spelen als hij geen geld meer heeft of als hij een kapitaal bij elkaar heeft gegokt van tenminste N euro ($N \in \mathbb{N}, N > 1$). De gokker begint met een kapitaal van m euro ($m \in \{1, \ldots, N-1\}$). Laat X_n het kapitaal zijn van de gokker in euro's na het n-de gokspel, waarbij $X_0 = m$.

a) [2 pt.] Beredeneer dat $\{X_n, n \geq 0\}$ een discrete(-tijds) Markov keten is. Geef ook de bijbehorende toestandsruimte en de één-staps overgangsmatrix P.

b) [2 pt.] Is deze Markov keten irreducibel? Geef van elk van de klassen van deze Markov keten de bijbehorende periode.

c) [3 pt.] Wat is de kans dat de gokker uiteindelijk noodgedwongen stopt omdat zijn geld op is?

d) [3 pt.] Als de gokker minder dan j euro heeft maar het kapitaal nog wel positief is, dan bevindt hij zich in de gevarenzone. Toon aan dat de verwachte hoeveelheid spellen die de gokker die avond speelt terwijl hij in de gevarenzone zit gelijk is aan

$$\sum_{i=1}^{2j-1} \sum_{n=0}^{\infty} (P^n)_{m,\frac{i}{2}}.$$

Uitwerkingen

a) *Het verloop van de avond na het n-de gokspel hangt, gegeven X_n, niet meer af van $\{X_k, 0 \leq k < n\}$. Derhalve is $\{X_n, n \geq 0\}$ een DTMK. De toestandruimte S is gelijk aan $\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{2N-1}{2}, N\}$. De overgangsmatrix P is een $(2N+1) \times (2N+1)$ matrix, waarbij $p_{0,0} = p_{N,N} = 1$. Voorts hebben we dat $p_{i,i+\frac{1}{2}} = p$ en $p_{i,i-\frac{1}{2}} = 1-p$ voor alle $i \in S \backslash \{0, N\}$. Alle andere elementen van P zijn gelijk aan nul.*

b) *Niet irreducibel: vanuit toestanden 0 of N bereikt de Markov keten nooit een andere toestand. Bij de klassen $\{0\}$ en $\{N\}$ hoort een periode 1, bij de klassen $\{1, \ldots, N-1\}$ hoort een periode 2.*

c) *We passen een eerste-staps analyse toe. Stel dat f_i de kans is dat de Markov-keten uiteindelijk in toestand N beland, omdat deze zich nu in toestand i bevindt. Het antwoord op de vraag is dan $1 - f_m$. We weten dat*

$$f_0 = 0; f_N = 1 \ \text{en} \ f_i = (1-p) f_{i-1/2} + p f_{i+1/2}, i \neq 0, N.$$

Soortgelijk aan voorbeeld 1.2 in het dictaat leiden we hieruit af dat

$$f_m = \begin{cases} \frac{1-(\frac{1-p}{p})^{2m}}{1-(\frac{1-p}{p})^{2N}} & \text{als } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{m}{N} & \text{als } p = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

Het antwoord luidt dan ook dat de kans gelijk is aan $1 - \frac{1-(\frac{1-p}{p})^{2m}}{1-(\frac{1-p}{p})^{2N}}$ als $p \neq \frac{1}{2}$ en gelijk aan $\frac{N-m}{N}$ als $p = \frac{1}{2}$.

d) *Laat Y de verwachte hoeveelheid spellen die de gokker die avond speelt terwijl hij in de gevarenzone zit. We hebben dan dat*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\frac{1}{2} \leq X_n \leq j-\frac{1}{2}\}} \mid X_0 = m] = \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i \in \{1/2, 1, \ldots, j-1, j-1/2\}} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}} \mid X_0 = m] \\
&= \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2j-1} \mathbb{1}_{\{X_n = i/2\}} \mid X_0 = m] = \sum_{i=1}^{2j-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X_n = i/2\}} \mid X_0 = m] \\
&= \sum_{i=1}^{2j-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\mathbb{1}_{\{X_n = i/2\}} \mid X_0 = m) = \sum_{i=1}^{2j-1} \sum_{n=0}^{\infty} (P^{(n)})_{m,\frac{i}{2}} \\
&= \sum_{i=1}^{2j-1} \sum_{n=0}^{\infty} (P^n)_{m,\frac{i}{2}},
\end{aligned}$$

waarbij de laatste gelijkheid een bekend gevolg is van de Chapman-Kolmogorov vergelijkingen.

Opgave 4

Zij gegeven een M/M/s/N wachtrij met aankomstintensiteit λ en een verwachte bedieningsduur μ^{-1}, $\lambda, \mu > 0$. Laat $L(t)$ het aantal klanten zijn die in het systeem aanwezig zijn op tijdstip t, zowel de wachtenden als degenen die in bediening zijn.

a) [3 pt.] Stel dat $s = N = 1$. Bereken $\mathbb{P}(L(t) = 1 \mid L(0) = 1)$ met behulp van Kolmogorov's voorwaartse of achterwaartse differentiaalvergelijkingen.

b) [2 pt.] Laat $s = 1$ en $1 < N < \infty$. Definieer $P_N := \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(L(t) = N)$. Gebruik PASTA en de stelling van Little om via een mean-value analyse een uitdrukking voor de verwachte verblijftijd in dit systeem te verkrijgen in termen van P_N. U hoeft geen uitdrukking voor P_N te bepalen.

Neemt u in het vervolg van deze opgave aan dat $s = 2$, $N = \infty$ en $\lambda < 2\mu$. Laat $\bar{L}$ een stochast zijn met de limietverdeling zijn van $L(t)$ als $t \to \infty$. Met andere woorden, $\mathbb{P}(\bar{L} = k) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(L(t) = k)$.

c) [2 pt.] Bereken $\mathbb{P}(\bar{L} = 0)$.

d) [5 pt.] Bepaal de kansgenererende functie (ofwel PGF) van (de kansverdeling van) $\bar{L}$ en bereken op basis hiervan het verwachte aantal klanten in het systeem in stationariteit.

Uitwerkingen

a) Zie voorbeeld 3.8 uit het dictaat (gevraagd wordt $p_{11}(t)$).

b) De stelling van Little zegt ons dat

$$L = \lambda(1 - P_N) * W.$$

Met PASTA moeten we voorzichtig zijn. Een aankomende klant kan immers geen N klanten in het systeem aantreffen, dus het verwachte aantal klanten al in het systeem bij aankomst van een klant is niet L, maar $\frac{L-NP_N}{1-P_N}$. De noemer in deze uitdrukking is een gevolg van de renormalisatie. PASTA impliceert dus dat

$$W = \frac{L - NP_N}{1 - P_N}\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}.$$

Een combinatie van de twee hierboven genoemde resultaten levert

$$W = \frac{1 - (N + 1)P_N}{(1 - P_N)(\mu - \lambda)}.$$

c) Laat $P_k := \mathbb{P}(\bar{L} = 0)$. Door de geboorte-sterfte structuur te gebruiken (bijv. de snedevergelijkingen) weten we dat $P_1 = \frac{\lambda}{\mu}P_0$. Bovendien hebben we dat $P_i = \frac{\lambda}{2\mu}P_{i-1}$ voor $i \geq 1$. Hieruit volgt dat

$$P_i = (\frac{\lambda}{2\mu})^{i-1}\frac{\lambda}{\mu}P_0$$

voor $i \geq 1$. De normalisatievergelijking $\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$ reduceert vervolgens tot $P_0(1+\frac{\lambda}{\mu}\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{\lambda}{2\mu})^{i-1}) = 1$. Hieruit volgt dat

$$P_0 = (1 + \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{2\mu}})^{-1}.$$

d) Noem de PGF $\tilde{L}(z)$. We hebben dan dat

$$\begin{aligned}
\tilde{L}(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} P_i z^i = P_0 + \sum_{i=1}^{\infty} P_i z^i \\
&= P_0 + \sum_{i=1}^{\infty}(\frac{\lambda}{2\mu})^{i-1}\frac{\lambda}{\mu}P_0 z^i \\
&= P_0(1 + \frac{\frac{\lambda}{\mu}z}{1 - \frac{\lambda z}{2\mu}}),
\end{aligned}$$

met P_0 zoals bij c) berekend. Het verwachte aantal klanten in het systeem in stationariteit is vervolgens gelijk aan

$$\frac{d}{dz}\tilde{L}(z)|_{z=1} = P_0\frac{(1 - \frac{\lambda z}{2\mu})\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2}z}{(1 - \frac{\lambda z}{2\mu})^2}|_{z=1} = P_0\frac{\lambda}{\mu(1 - \frac{\lambda}{2\mu})^2}$$

met P_0 zoals in opgave c) berekend.