Universiteit Leiden
Tentamen Besliskunde A - Stochastische Besliskunde
9 maart 2016, 14:00-17:00

Naast een pen is bij dit tentamen een enkel vel a4-papier toegestaan, die aan beide kanten beschreven mag zijn met uw handgeschreven (dus geen digitale) aantekeningen. Andere hulpmiddelen (bijv. dictaten, rekenmachines) worden niet toegelaten.

Het aantal punten dat u voor elke deelvraag kunt verdienen staat tussen vierkante haken aangegeven. Het aantal punten dat u behaald heeft zal na deling door het totale aantal te behalen punten en vermenigvuldiging met het getal 10 uw tentamencijfer vormen.

Veel succes!

Opgave 1
Geef bij elk van de volgende uitspraken aan of deze waar is of niet waar. Beargumenteer bij elke uitspraak **kort** uw antwoord. (Uw antwoord wordt enkel goedgekeurd bij een correcte beargumentatie.)

a) [2 pt.] Bij discrete(-tijd) Markov ketens is nul-recurrentie een klasse-eigenschap. Met andere woorden, als er een enkele toestand in een klasse van communicerende toestanden bestaat die nul-recurrent is, moeten alle toestanden uit die klasse nul-recurrent zijn.

b) [2 pt.] De toestanden in een irreducibele discrete(-tijd) Markov keten hebben altijd een eindige periode.

c) [2 pt.] Laat $\{N(t), t \geq 0\}$ een vernieuwingsproces zijn met tussentijden $X_1, X_2, \ldots$. Dan is $Y = \max\{n \geq 0 : \sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\}$ voor een zekere $t > 0$ een stoptijd voor deze tussentijden.

d) [2 pt.] De stelling van Little voor wachtrijmodellen geldt niet alleen als het aankomstproces bij het wachtrijmodel in kwestie een Poisson proces vormt.

Opgave 2
In fabriek A, die altijd in bedrijf is, staan 2 machines, die onafhankelijk van elkaar producten bewerken. Er zijn te allen tijde 2 reparatieteams aanwezig. Als een machine operationeel is, dan is de tijd tot deze kapot gaat exponentieel verdeeld met parameter 5 (tijdseenheid: dagen). Als een machine kapot gaat, zal een reparatieteam direct aanvangen de machine te repareeren. De tijd die een reparatieteam nodig heeft om een machine te repareren is eveneens exponentieel verdeeld met parameter 5 (dagen). Er kan slechts één reparatieteam tegelijkertijd aan een machine werken, dus beide reparatieteams zullen bezig zijn dan en slechts dan als beide machines kapot zijn.

a) [2 pt.] Modelleer het aantal kapotte machines als een continue(-tijd) Markov keten. Geef de bijbehorende toestandsruimte en generatormatrix.

b) [2 pt.] Is deze Markov keten irreducibel? Is deze Markov keten recurrent? Zo ja, is deze positief recurrent? Licht uw antwoorden kort toe.

c) [2 pt.] Stel dat een reparatieteam zojuist de reparatie van een machine heeft afgerond; de andere machine is nog steeds in reparatie. Hoe lang duurt het naar verwachting voordat beide reparatieteams weer tegelijk aan het repareren zijn?

d) [4 pt.] Leg met behulp van uniformisatietechnieken uit dat, gegeven dat nu 0 machines operationeel zijn, de kans dat over precies 10 dagen er ook 0 machines operationeel zijn gelijk is aan $e^{-100}(1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^{2n}}{(2n)!})$.

Opgave 3

We beschouwen een CPU in een computer, die belangrijke en minder belangrijke rekentaken uitvoert. Belangrijke taken dienen zich aan volgens een Poisson proces met parameter λ_B en vergen een exponentieel verdeelde rekentijd met parameter μ. Minder belangrijke dienen zich aan volgens een Poisson proces met parameter λ_{MB} en vergen eveneens een exponentieel verdeelde rekentijd met parameter μ. Als een CPU idle is (ofwel niet bezig met het uitvoeren van een taak), dan wordt een zich aandienende taak meteen in behandeling genomen. In het andere geval wachten de taken af totdat de CPU ze in behandeling neemt. Na het afronden van een taak zal de CPU een belangrijke rekentaak in behandeling nemen. Indien er geen wachtende belangrijke rekentaak is, zal de CPU een niet belangrijke rekentaak in behandeling nemen. Indien er helemaal geen wachtende taken zijn, dan wordt de CPU idle.

a) [3 pt.] Modelleer het aantal aanwezige taken bij de CPU (zowel wachtend als in berekening) als een continue(-tijd) Markov keten. Bepaal op basis hiervan de verdeling van het aantal aanwezige taken L (zowel wachtend als in berekening) in het systeem op een arbitrair moment in stationariteit. Wat is de verwachting $\mathbb{E}[L]$ van dit aantal taken?

b) [3 pt.] Gebruik PASTA en de stelling van Little om via een mean-value analyse een uitdrukking voor $\mathbb{E}[L_B]$, het verwachte aantal *belangrijke* taken in het systeem op een arbitrair moment in stationariteit, te verkrijgen.

c) [2 pt.] Druk de verwachte wachttijd van minder belangrijke taken uit in $\mathbb{E}[L]$ en $\mathbb{E}[L_B]$. Deze verwachtingen heeft u reeds bij a) en b) berekend, maar u hoeft ze niet te substitueren. *Hint: wat is de relatie tussen* $\mathbb{E}[L]$, $\mathbb{E}[L_B]$ *en* $\mathbb{E}[L_{MB}]$, *waarbij* $\mathbb{E}[L_{MB}]$ *het verwachte aantal minder belangrijke taken in het systeem op een arbitrair moment in stationariteit is?*

d) [2 pt.] Wat is de verdeling van de duur van een periode dat een CPU aaneengesloten idle is? En wat is de verwachte duur van een periode dat de CPU aaneengesloten bezig is?

Opgave 4

Laat $\{N(t), t \geq 0\}$ een vernieuwingsproces zijn waarbij de tussentijden X_i $(i = 1, 2, \ldots)$ elk de volgende kansdichtheidsfunctie hebben:

$$f_{X_1}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \lambda_j e^{-\lambda_j t},$$

waarbij $\lambda_j > 0$ en $p_j > 0$ voor $j = 1, 2, \ldots$ en $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$.

a) [2 pt.] Hoeveel gebeurtenissen (ofwel vernieuwingen) vinden gemiddeld plaats per tijdseenheid op de lange duur?

b) [2 pt.] Het proces $\{N(t), t \geq 0\}$ is geen Markov proces. Echter, men kan het proces $\{M(t), t \geq 0\}$ zodanig definiëren dat $\{(M(t), N(t)), t \geq 0\}$ een Markov proces is. Hoe dient $M(t)$ dan gedefiniëerd te worden? *Let wel:* $\{M(t), t \geq 0\}$ *hoeft geen vernieuwingsproces te zijn.*

c) [3 pt.] Definieer $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Bepaal de Laplace-Stieltjes transformatie van S_n.

d) [4 pt.] Als we dit vernieuwingsproces wensen te simuleren, dienen we trekkingen te genereren uit de verdeling van X_1. Stel dat u willekeurige trekkingen uit de standaard-uniforme verdeling ter beschikking heeft. Beschrijf hoe u met behulp van deze trekkingen via de inversiemethode, ook wel de inverse transformatie methode genoemd, tot trekkingen kunt komen uit de verdeling van X_1. Let op: u wordt niet gevraagd om het algemene idee van de inversiemethode uit te leggen, maar om deze voor dit specifieke geval uit te werken.