

## Huiswerk Besliskunde A (2016) - Week 9

De deadline van deze huiswerkset is vrijdag 2 december 2015. Het huiswerk mag handgeschreven ingeleverd worden, maar we accepteren alleen *individuele* submissions. U kunt uw uitwerkingen tijdens het college inleveren. Als dit niet lukt, stuurt u dan tijdig uw uitwerkingen via e-mail naar zowel mjhvdbergh 'at' gmail.com als maykestraatman 'at' gmail.com.

### Opgaven voor 6 EC (4 in totaal)

**Opgave 1** Maak opgave 5.2 uit het dictaat.

#### Opgave 2

- Maak opgave 5.4 uit het dictaat.
- Bepaal  $\mathbb{P}(W_q^* > t | W_q^* > 0)$ . Welke verdeling heeft  $W_q^*$  geconditioneerd op de eventualiteit dat deze wachttijd positief is?
- Bepaal  $\mathbb{P}(W^* \leq t)$ , waarbij  $W^*$  de verblijftijd van een willekeurig aankomende klant in het systeem is (als het systeem zich in een stationaire toestand bevindt). Welke verdeling is dit?

#### Opgave 3

- Maak opgave 5.10 uit het dictaat.
- Geef een intuïtieve verklaring voor de zojuist aangetoonde stelling.

**Opgave 4** Geef van elk van de volgende uitspraken aan of ze waar zijn of niet waar. Beargumenteer bij elke uitspraak **kort** uw antwoord. (Uw antwoord wordt enkel goedgekeurd bij een correcte beargumentatie.)

- Het proces  $\{L(t), t \geq 0\}$  bij een M/M/1 wachtrij is een reversibel Markov proces.
- Het proces  $\{L(t), t \geq 0\}$  bij een M/M/s wachtrij is een reversibel Markov proces.
- Gegeven is een M/M/1 wachtrij, waarbij op tijdstip 0 geen klanten wachten of in bediening zijn (ofwel, een leeg systeem). Laat  $N(t)$  het aantal keren zijn tot tijdstip  $t$  dat een klant aankomt op een moment dat het systeem compleet leeg is. Dan is  $\{N(t), t \geq 0\}$  een vernieuwingsproces.
- Gegeven is een M/M/1 wachtrij, waarbij op tijdstip 0 geen klanten wachten of in bediening zijn (ofwel, een leeg systeem). Laat  $N(t)$  het aantal keren zijn tot tijdstip  $t$  dat een klant vertrekt en het systeem compleet leeg achterlaat. Dan is  $\{N(t), t \geq 0\}$  een vernieuwingsproces.

### Opgaven voor 10 EC (7 in totaal)

**Opgaven 1-4** Zie hierboven.

**Opgave 5** Maak opgave 5.6 uit het dictaat.

**Opgave 6** Maak opgave 5.11 uit het dictaat.

**Opgave 7** Beschouw een M/M/1 wachtrij. Laat  $\widetilde{BP}(s)$  de Laplace-Stieltjes transformatie (LST) representeren van de busy period  $BP$ .

- a) Laat de verwachte servicetijd gegeven zijn door  $\mu^{-1}$ . Wat is de LST van de servicetijd  $B$ ?
- b) Toon aan dat geldt dat

$$\widetilde{BP}(s) = \frac{\mu}{\mu + s + \lambda(1 - \widetilde{BP}(s))}.$$

U kunt hiervoor de intuïtie gebruiken die we hebben gebruikt tijdens het college om  $\mathbb{E}[BP]$  af te leiden.

- c) Los deze functionaalvergelijking op om  $\widetilde{BP}(s)$  te verkrijgen. Verifieer dat dezelfde waarde voor  $\mathbb{E}[BP]$  uit deze LST volgt. Wat is de variantie van  $BP$ ?