Huiswerk Besliskunde A (2016) - Week 8

De deadline van deze huiswerkset is vrijdag 25 november 2016. Het huiswerk mag handgeschreven ingeleverd worden, maar we accepteren alleen *individuele* submissies. U kunt uw uitwerkingen tijdens het college inleveren. Als dit niet lukt, stuurt u dan tijdig uw uitwerkingen via e-mail naar zowel mjhvdbergh 'at' gmail.com als maykestraatman 'at' gmail.com.

Opgaven voor 6 EC (5 in totaal)

Opgave 1 Toon aan dat elk geboorte-sterfte proces reversibel is. (In het college hebben we het speciale geboorte-sterfte proces bekeken waarbij de geboorte-intensiteit λ_i van toestand i naar toestand $i+1$ voor elke i gelijk is aan λ, en dat de sterfte-intensiteit μ_i van toestand i naar toestand $i-1$ voor elke i gelijk is aan μ. Deze opgave handelt echter over algemene λ_i en μ_i).

Opgave 2 Een databank heeft N verschillende items die gebruikt worden voor transacties. Een transactie heeft m items nodig met kans $\frac{1}{M}$, $1 \leq m \leq M$ voor zekere $M \leq N$. Gegeven dat een transactie m items nodig heeft, is elke deelverzameling van m gevraagde items even waarschijnlijk. Aanvragen voor transacties komen binnen volgens een Poisson proces met parameter λ. De verwerkingstijd van een transactie die bestaat uit m items, is $\exp(\mu)$ verdeeld. Een item dat gebruikt wordt bij de behandeling van een transactie, is niet beschikbaar voor andere transacties zolang de verwerking duurt. Aanvragen voor transacties waarvoor niet alle items beschikbaar zijn, gaan verloren. Dit model kan beschreven worden door een Markovproces met als toestanden $(n_1, \ldots, n_M)$, waarbij n_m het aantal lopende transacties is met m items, $1 \leq m \leq M$.

a) Bepaal de overgangsintensiteiten van het Markovproces.

b) Toon voor $N = 4$ en $M = 2$ aan dat het proces reversibel is. Zal dit ook voor algemene N en M waar zijn?

c) Bepaal de stationaire verdeling voor $N = 4$ en $M = 2$.

Opgave 3 Maak opgave 3.18 uit het dictaat.

Opgave 4 Laat $\{\hat{X}(t), t \in \mathbb{R}\}$ het omgekeerde proces zijn van een homogeen Markov proces $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, zie de definitie op pagina 85 van het dictaat. Toon aan dat $\{\hat{X}(t), t \geq 0\}$ een homogeen Markov proces is.

Opgave 5 Beschouw opgave 5.1(a) uit het dictaat. Geldt het gestelde in zijn algemeenheid? Of zijn bepaalde voorwaarden op het wachtrijsysteem in kwestie nodig voor de validiteit van het gestelde? (U hoeft opgave 5.1(a) zelf niet te maken.)

Opgaven voor 10 EC (9 in totaal)

Opgaven 1-5 Zie hierboven.

Opgave 6 Gegeven zij een 4 bij 4 schaakbord, waarop één paard staat, stel het staat op veld i. Na een $\exp(1)$ verdeelde tijd springt het naar een willekeurig veld dat het via een paardensprong vanuit i kan bereiken. Laat δ_i het aantal velden zijn dat vanuit i via een paardensprong bereikt kan worden. Van dat veld springt het na een $\exp(1)$ verdeelde tijd naar een willekeurig veld dat het via een paardensprong kan bereiken, etc. Gevraagd is hoe lang het in verwachting duurt tot het paard weer op zijn oorspronkelijke veld terug is.

a) Laat $X(t)$ het veld zijn veld waarop het paard op tijdstip t staat, $t \geq 0$. Beargumenteer dat $\{X(t), t \geq 0\}$ een irreducibel Markov-proces is, en specificeer de generator Q en de toestandsruimte S.

b) Toon aan dat $\{X(t), t \geq 0\}$ reversibel is en bereken de stationaire verdeling.

c) Bereken de verwachte terugkeertijd naar een veld.

Opgave 7 Maak opgave 3.11 uit het dictaat.

Opgave 8 Maak opgave 3.13 uit het dictaat.

Opgave 9 Maak opgave 3.21 uit het dictaat.