

## Huiswerk Besliskunde A (2016) - Week 5

De deadline van deze huiswerkset is vrijdag 28 oktober 2016. Het huiswerk mag handgeschreven ingeleverd worden, maar we accepteren alleen *individuele* submissions. U kunt uw uitwerkingen tijdens het college inleveren. Als dit niet lukt, stuurt u dan tijdig uw uitwerkingen via e-mail naar zowel mjhvdbergh 'at' gmail.com als maykestraatman 'at' gmail.com.

### Opgaven voor 6 EC (4 in totaal)

**Opgave 1** Geef van elk van de volgende uitspraken aan of ze waar zijn of niet waar. Beargumenteer bij elke uitspraak **kort** uw antwoord. (Uw antwoord wordt enkel goedgekeurd bij een correcte beargumentatie.)

- 1) Laat  $\{N(t), t \geq 0\}$  een vernieuwingsproces zijn en definieer  $M(t) = \lfloor N(t)/2 \rfloor$ . Het proces  $\{M(t), t \geq 0\}$  is ook een vernieuwingsproces.
- 2) Voor elk vernieuwingsproces  $\{N(t), t \geq 0\}$  geldt dat  $\mathbb{P}(N(s+t) = k \mid N(s) = j) = \mathbb{P}(N(t) = k - j)$  voor alle  $s, t \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, k$  en  $k = 1, 2, \dots$
- 3) Stel  $X_1, X_2, \dots$  is een rij i.i.d. niet-negatieve stochasten. Dan is  $\tau = \inf\{k : \{\sum_{i=1}^{k-1} X_i \leq 1\} \cap \{\sum_{i=1}^k X_i \geq 1\}\}$  een stoptijd voor de rij  $X_1, X_2, \dots$

**Opgave 2** Maak opgave 2.2 uit het dictaat. Beperk u zich bij de argumentatie tot een enkele zin per subopgave.

**Opgave 3** Beschouw een vernieuwingsproces  $\{N(t), t \geq 0\}$ , waarvan de tussentijden  $X_1, X_2, \dots$  een verdeling hebben die continu en geheugenloos is met verwachting  $\mathbb{E}[X_1] = 2$ .

- a) Geef een uitdrukking voor  $m(t)$  en  $F_n(t)$ .

In de praktijk is een directe uitdrukking voor  $m(t)$  vaak niet bekend. Men zou dan op basis van Lemma 2.3 uit het dictaat kunnen postuleren dat  $m_j(t) = \sum_{n=1}^j F_n(t)$  voor een grote waarde van  $j$  de waarde van  $m(t)$  goed kan benaderen.

- b) Bereken met behulp van de computer waarden voor  $m_{10}(1), m_{10}(15), m_{10}(50), m_{40}(1), m_{40}(15)$  en  $m_{40}(50)$ , en vergelijk deze waarden met de theoretische waarden  $m(1), m(15)$  en  $m(50)$ , verkregen via a).
- c) Wat valt u op bij b)? Verklaar kort uw bevindingen. Zoals immer geldt het credo: 'hoe bondiger, hoe beter'!

Epiloog: als het goed is heeft u geconstateerd dat deze manier van benaderen in bepaalde gevallen niet zal werken. Overigens is deze manier van benaderen überhaupt al lastig over het algemeen:  $F_n(t)$  is voor grotere waarden van  $n$  in het algemeen lastig, op z'n minst veel werk, om uit te rekenen. Zoals tijdens het college gezegd: Lemma 2.3 is schattig, maar we hebben er in de praktijk weinig aan.

**Opgave 4** De illustere meneer X vervangt de batterij van zijn telefoon wanneer deze kapot gaat. Het vervangen van een batterij kost een negeerbare hoeveelheid tijd. De tijd (ofwel de levensduur) totdat een telefoonbatterij van meneer X het begeeft gemeten vanaf de installatie is continu uniform(0,5) verdeeld, gemeten in maanden. De levensduren van verschillende batterijen zijn onafhankelijk.

- a) Laat meneer X 3 maanden geleden een nieuwe batterij geïnstalleerd hebben. Wat is het verwachte aantal batterijen dat door meneer X sindsdien tot nu toe is geïnstalleerd?
- b) Meneer X is het vervangen van kapotte batterijen eigenlijk spuugzat, en hij besluit om per direct zijn strategie te veranderen. Wanneer een batterij al kapot gaat voordat deze 3 maanden oud is, dan vervangt meneer X deze. Echter, als een batterij na 3 maanden nog steeds functioneert, dan vervangt meneer X hem nu ook preventief, ook al functioneert hij nog steeds. Wat is bij deze nieuwe strategie de verwachte tijd tussen twee vervangingen van batterijen in de telefoon van meneer X?
- c) De onvolprezen mevrouw Y hanteert de nieuwe strategie van meneer X al sinds jaar en dag bij haar eigen telefoon, maar de levensduren van de batterijen behorend bij haar telefoon zijn ieder  $\text{Erlang}(3, 1)$  verdeeld, wederom gemeten in maanden. Deze levensduren zijn echter nog steeds onderling onafhankelijk. Wat is de lange-termijn vervangingsfrequentie van batterijen in de telefoon van mevrouw Y?
- d) Op de lange termijn, hoe vaak per maand moet mevrouw Y naar verwachting haar batterij vervangen omdat deze stuk gegaan is?

## Opgaven voor 10 EC (7 in totaal)

**Opgaven 1-4** Zie hierboven.

**Opgave 5** Maak opgave 2.1 uit het dictaat.

**Opgave 6** Maak opgave 2.4 uit het dictaat.

**Opgave 7** Maak opgave 2.12 uit het dictaat.