Huiswerk Besliskunde A (2016) - Week 3

De deadline van deze huiswerkset is vrijdag 14 oktober 2016. Het huiswerk mag handgeschreven ingeleverd worden, maar we accepteren alleen *individuele* submissies. U kunt uw uitwerkingen tijdens het college inleveren. Als dit niet lukt, stuurt u dan tijdig uw uitwerkingen via e-mail naar zowel mjhvdbergh 'at' gmail.com als maykestraatman 'at' gmail.com.

Opgaven voor 6 EC (4 in totaal)

Opgave 1 Laat $X_1, X_2, \ldots$ een rij onafhankelijke, exponentieel verdeelde stochasten zijn met parameter λ.

a) Bereken de dichtheidsfunctie van $X_1 + X_2$. **Hint:** Gebruik de volgende eigenschap: Zij X en Y onafhankelijke, niet-negatieve stochasten met dichtheidsfuncties f_X en g_Y. Dan is de dichtheidsfunctie van $X + Y$ gegeven door $\int_0^t f_X(u) g_Y(t-u) \mathrm{d}u$.
b) Toon aan met inductie naar n dat de dichtheidsfunctie $f_{S_n}(t)$ van $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ gegeven wordt door

$$f_{S_n}(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!},$$

ofwel de dichtheidsfunctie van de Erlang verdeling met parameters n en λ zoals benoemd tijdens het college.
c) Laat zien dat dit de dichtheidsfunctie is van de kansverdeling

$$F_{S_n}(x) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!},$$

ofwel de verdelingsfunctie van de Erlang verdeling met parameters n en λ zoals benoemd tijdens het college.

Opgave 2 Laat $X_1, X_2, \ldots$ een rij onafhankelijke, exponentieel verdeelde stochasten zijn met parameter λ. Laat verder K een geometrisch verdeelde stochast zijn met succesparameter p, ofwel $\mathbb{P}(K = j) = (1-p)^{j-1}p$. Laat vervolgens de stochast Y gegeven zijn door $Y = \sum_{j=1}^K X_j$.

a) Laat zien dat Y exponentieel verdeeld is met parameter λp.

Beschouw een Poisson proces $\{N(t), t \geq 0\}$ met parameter λ. Stel dat we elke gebeurtenis gegenereerd door dit Poisson proces registreren met kans p. Dit gebeurt onderling onafhankelijk: het al dan niet registreren van de ene gebeurtenis geeft geen informatie over of we een andere gebeurtenis wel of niet zullen registreren. Laat $R(t)$ het aantal geregistreerde gebeurtenissen tot tijdstip t. We noemen $\{R(t), t \geq 0\}$ vervolgens een uitgedund telproces.

b) Geef $\mathbb{P}(R(t) = k \mid N(t) = n)$.
c) Bewijs dat $\{R(t), t \geq 0\}$ een Poisson proces is met parameter λp.

Opgave 3 Laat X_i een Poisson verdeelde stochast zijn met parameter λ_i, $i = 1, 2$. Bovendien zijn X_1 en X_2 onafhankelijk verdeeld. Laat zien dat X_1, geconditioneerd op de gebeurtenis dat $X_1 + X_2 = n$, binomiaal verdeeld is met de parameters n en $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

Opgave 4 De voetbalclubs Ajax en R.K.S.V. Nuenen spelen in de Amsterdam ArenA een voetbalwedstrijd, die bestaat uit twee helften van elk precies 45 minuten. De verwachting van het aantal doelpunten dat in een willekeurige helft valt is gelijk aan 5. Doelpunten van Ajax en doelpunten van R.K.S.V. Nuenen vallen elk volgens een Poisson proces. U mag er van uit gaan dat deze twee processen onafhankelijk zijn. Verder is gegeven dat Ajax gemiddeld gesproken anderhalf keer zoveel doelpunten maakt als R.K.S.V. Nuenen, en dat er in de eerste helft in totaal precies 3 doelpunten vallen. **Licht u uw antwoorden bij onderstaande opgaven kort toe, met ten hoogste drie à vier zinnen per antwoord. Minder wordt toegejuicht!**

a) Wat is de kans dat er in de eerste 10 minuten van de eerste helft twee doelpunten vallen?

b) Wat is de kans dat er in de eerste 10 minuten van de tweede helft twee doelpunten vallen voor Ajax, en een voor R.K.S.V. Nuenen?

c) Wat is de kans dat Ajax meer doelpunten maakt dan R.K.S.V. Nuenen in de eerste helft?

d) Wat is de kans dat de wedstrijd met 4-0 wordt afgesloten in het voordeel van Ajax?

Opgaven voor 10 EC (7 in totaal)

Opgaven 1-4 Zie hierboven.

Opgave 5 Laat $\{N(t), t \geq 0\}$ een Poisson proces zijn met parameter λ. Laat $U_1, \dots, U_k$ onderling onafhankelijke continue stochasten zijn met een uniforme verdeling op $(0, t)$.
a) Laat zien dat $\mathbb{P}(X_1 \leq s \mid N(t) = k) = 1 - (1 - \frac{s}{t})^k$. Hint: aan welke eigenschap moet $N(s)$ voldoen als $X_1 \leq s$?
b) Laat zien dat $\mathbb{P}(\min\{U_1, \dots, U_k\} \leq s) = 1 - (1 - \frac{s}{t})^k$.
c) Kennelijk geldt dat $\mathbb{P}(X_1 \leq s \mid N(t) = k) = \mathbb{P}(\min\{U_1, \dots, U_k\} \leq s)$. Geef hiervoor een intuitïeve uitleg.

Opgave 6 In de immer zo pittoreske gemeente Ermelo in Gelderland liggen 10 dorpen, waarvan één ook de naam Ermelo draagt. Uit statistische analyse blijkt dat de tijd tussen twee elektriciteitsstoringen in de gemeente exponentieel verdeeld is met verwachting een half jaar. Tijden tussen twee elektriciteitsstoringen zijn onderling onafhankelijk. Ook blijkt dat een elektriciteitsstoring in de gemeente met kans 0.75 niet het dorp zelf treft, onafhankelijk van eerdere of toekomstige elektriciteitsstoringen. **Licht u uw antwoorden bij onderstaande opgaven kort toe, met ten hoogste drie à vier zinnen per antwoord. Minder wordt toegejuicht!**

a) Wat is de kans dat in het komende half jaar zich drie elektriciteitsstoringen in het dorp Ermelo voordoen, en twee in de overige 9 dorpen?

b) Wat is de kans dat van de eerstvolgende vijf elektriciteitsstoringen in de gemeente, zich twee in het dorp Ermelo voordoen?

c) Wat is de kans dat de eerstvolgende elektriciteitsstoring in het dorp Ermelo zich pas na het komende jaar voordoet?

d) Stel dat er, bij wijze van hoge uitzondering, zich de komende week drie elektriciteitsstoringen voordoen. Hoe lang duurt het naar verwachting vanaf nu totdat de eerste van de drie zich voordoet?

Opgave 7 Is een Poisson proces $\{N(t), t \geq 0\}$ geheugenloos? Met andere woorden, voldoet het proces aan de eigenschap

$$\mathbb{P}(N(s+t) = k \mid N(s) = j, \{N(u), 0 \leq u \leq s\}) = \mathbb{P}(N(s+t) = k \mid N(s) = j)?$$

Beargumenteer uw antwoord.