Huiswerk Besliskunde A (2016) - Week 11

De deadline van deze huiswerkset is vrijdag 16 december 2016. Het huiswerk mag handgeschreven ingeleverd worden, maar we accepteren alleen *individuele* submissies. U kunt uw uitwerkingen tijdens het college inleveren. Als dit niet lukt, stuurt u dan tijdig uw uitwerkingen via e-mail naar zowel mjhvdbergh 'at' gmail.com als maykestraatman 'at' gmail.com.

Opgaven voor 6 EC (3 in totaal)

Opgave 1 Maak opgave 6.2 uit het dictaat.

Opgave 2 In het college hebben we gezien dat

$$I = \int_{a_s}^{b_s} \int_{a_{s-1}}^{b_{s-1}} \cdots \int_{a_1}^{b_1} g(x_1, \ldots, x_s) dx_1 \ldots dx_{s-1} dx_s$$

geschreven kan worden als

$$I = \mathbb{E}[g(U_1, \ldots, U_s)] \prod_{i=1}^{s} (b_i - a_i),$$

waarbij $U_1, \ldots, U_s$ onafhankelijk verdeelde stochasten zijn, en de U_i Uniform$[a_i,\ b_i]$ verdeeld zijn, $i = 1, \ldots, s$. Schat via simulatie de numerieke waarde van de onderstaande expressies. U mag uiteraard uw favoriete softwarepakket gebruiken (Matlab, Maple, Mathematica, u mag het zeggen). Maakt u gebruik van de functie die trekkingen doet uit een standaard-uniforme verdeling (Matlab: rand, Mathematica: RandomReal[], etc). Als u trekkingen uit een andere verdeling nodig heeft, kunt u deze zelf via de inversiemethode, acceptatie-rejectie methode of een andere methode uit de standaard-uniforme trekkingen verkrijgen. Levert u naast het antwoord ook uw broncode in. Zonder broncode kan het antwoord helaas niet goedgekeurd worden.

a)

$$\int_{-2}^{5} \int_{2}^{5} \frac{|\sin t + x|}{t + x} dt\, dx$$

b)

$$\int_{0}^{6} \int_{0}^{5} \frac{\log(\max(s, 6))}{e^{\min(y,4)}} ds\, dy$$

Opgave 3 In het college hebben we gezien dat de wachttijden van klanten in een G/G/1 wachtrij voldoen aan de volgende recursie:

$$W_{q,n+1} = (W_{q,n} + B_n - A_n)^+,$$

waarbij $W_{q,n}$ de wachttijd is van de n-de klant in het systeem, B_n de bedieningstijd van de n-de klant en A_n de tijd tussen de aankomst van de n-de en de aankomst van de $n+1$-ste klant. Simuleer met behulp van uw favoriete softwarepakket een G/G/1 wachtrij met de volgende eigenschappen.

- De tussenaankomsttijden $A_0, A_1, \ldots$ zijn onderling onafhankelijk en hebben ieder de kansdichtsheidsfunctie (!)

$$f_A(t) = 4t^{-5} \mathbb{1}_{\{t \geq 1\}}.$$

- De servicetijden $B_1, B_2, \ldots$ zijn onderling onafhankelijk en hebben ieder de kansdichtheidsfunctie (!)

$$f_B(t) = \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}t} \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}.$$

Maakt u gebruik van de functie die trekkingen doet uit een standaard-uniforme verdeling. Als u trekkingen uit een andere verdeling nodig heeft, kunt u deze zelf via de inversiemethode, acceptatie-rejectie methode of een andere methode uit de standaard-uniforme trekkingen verkrijgen. Als antwoord zien we graag numerieke waarden voor de volgende zaken:

- De verwachte wachttijd van klanten in stationariteit.
- De verwachte verblijftijd van klanten in stationariteit.
- Het verwachte aantal klanten in het systeem (wachtend + in bediening) in stationariteit. (De wet van Little geldt ook voor de G/G/1 wachtrij!)

Levert u naast het antwoord ook uw broncode in. Zonder broncode kan het antwoord helaas niet goedgekeurd worden.

Opgaven voor 10 EC (5 in totaal)

Opgaven 1-3 Zie hierboven.

Opgave 4 Maak Opgave 6.4 uit het dictaat. U hoeft niet de getallen uit Tabel V te gebruiken, maar gebruikt u de methode die we in het college gezien hebben om trekkingen te doen uit een standaard-normale verdeling.

Opgave 5 Voert u met uw favoriete mathematische softwarepakket de volgende stappen uit:

- Doe met behulp van simulatie 10.000 trekkingen uit de verdeling van een tweedimensionale-stochast $U = (U_1, U_2)$, waarbij U_1 en U_2 onderling onafhankelijk en uniform[-1, 1] verdeeld zijn. Noemt u deze waarden $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(10000)}$, waarbij $u^{(i)} = (u_1^{(i)}, u_2^{(i)})$.
- Bepaal $\frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} \mathbb{1}_{\{(u_1^{(i)})^2 + (u_2^{(i)})^2 \leq 1\}}$

Welke waarde verkrijgt u? Levert u de gebruikte broncode in. Als het goed is, ligt uw waarde zeer dicht bij $\frac{\pi}{4}$. Verklaart u waarom dit theoretisch gezien het geval moet zijn.