FdNWI
Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Tentamen **Analyse 3**, 26 mei 2008, 13.30-16.30 uur.

Alle opgaven tellen even zwaar.

1. Bepaal en classificeer de singulariteiten op $\mathbb{C}$ van de twee functies

$$\frac{z}{e^{i\pi z}-1}\exp\left(\frac{1}{z^2-4}\right), \qquad \frac{1}{\cos\sqrt{z}}.$$

2. Bepaal een conforme afbeelding die de halve schijf $\{z : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$ injectief afbeeldt op het eerste kwadrant, en wel zo dat de halve cirkel $\{|z| = 1, \operatorname{Re} z > 0\}$ op de imaginaire as terecht komt.

3. Bereken

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{(1+x^2)^2}dx.$$

4. (i) Bewijs voor een gehele functie f de Cauchyschattingen:

$$\frac{|f^n(0)|}{n!} \leq \frac{M_f(r)}{r^n},$$

waar $M_f(r)$ het maximum van $|f|$ op $C(0,r)$ is.
(ii) Formuleer en bewijs ook de stelling van Liouville over begrensde holomorfe functies op $\mathbb{C}$.

5. Bereken het aantal nulpunten op $B(0,2)$ van de functie

$$z^2 - z + \frac{\sin z}{e^2}.$$

6. (i) Geef een tak f aan van $\log(1 + 1/z^2)$ die holomorf is op een omgeving van de cirkel $C(0,2)$ met $f(2) > 0$.
(ii) Bepaal de Laurent reeks van $f(z) + f(4/z)$ die convergeert op $C(0,2)$.
(iii)Wat is de annulus van convergentie (i.e. het maximale ringgebied) waarop deze reeks convergeert?

Succes!