Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Tentamen **Functietheorie**, 8 juli 1997, 13.30-16.30 uur.

1. Bepaal het aantal nulpunten op de annulus $A(0,1,2)$ van

$$z^{15} + 11z^{12} + 30z^7 + 10.$$

2. Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)(4+x^2)} dx.$$

3. Classificeer de singulariteiten van

$$\frac{\log(z^2+1)}{\sin z} \quad \text{en} \quad e^{\frac{1}{\sin 1/z}}.$$

Hier wordt met $\log(z^2+1)$ de tak bedoeld die reëel is op $\mathbb{R}$ en holomorf op $\mathbb{C} \setminus \{z = x+iy : x = 0,\ |y| \geq 1\}$. Als men de eerste functie in een machtreeks om de oorsprong ontwikkelt, wat is dan de convergentiestraal?

4. Laat zien dat er een holomorfe tak f bestaat van $\sqrt{\frac{z^2-1}{z^2+1}}$ die gedefinieerd is op $\mathbb{C}$ buiten $[-1,1] \cup [-i,i]$, zodanig dat $f(2) > 0$. Men ontwikkelt f in een Laurentreeks op $|z| > 1$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$. Bepaal $c_0, c_1, \ldots, c_4$. Bereken tot slot

$$\int_{C(0,2)^+} z^3 f(z)\, dz.$$

5. Zij $|a| < 1$. Laat zien dat $\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ een gebroken lineaire transformatie is die de eenheidsschijf $D = B(0,1)$ op zichzelf afbeeldt. Construeer een holomorfe functie f op D, continu op $\bar{D}$ met de eigenschap dat $f(1/2) = f(-1/2) = 0$ en $|f(z)| = 1$ als $|z| = 1$. Veronderstel nu dat F holomorf is op D, continu op $\bar{D}$ en $F(-1/2) = F(1/2) = 0$, terwijl $|F| \leq 1$. Bewijs de volgende variant op het Schwarz-Lemma:

$$|F(z)| \leq \left| \frac{4z^2-1}{4-z^2} \right| \quad \text{op } D.$$