Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Tentamen **Functietheorie**, 27 augustus 1996, 13.30-16.30 uur.

---

1. Zij $G = B(1,1) \setminus \overline{B(1/2, 1/2)}$. De rand van G bestaat uit twee cirkelbogen, die elkaar in 0 treffen.
   a. Bepaal een gebroken lineaire transformatie f die $C(1,1)$ op $\mathbb{R}$ afbeeldt, zodat $f(0) = \infty$. Beschrijf het beeld van G en verklaar Uw antwoord.
   b. Gebruik het vorige onderdeel om een conforme afbeelding van G op de strook $0 < \mathbf{Im}\, z < \pi$ te maken.

2. Beschouw de volgende Laurent reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(2n)!}.$$

   Bepaal van deze reeks het convergentiegebied, de somfunctie en zijn singulariteiten, alsmede hun aard.

3. Bereken het aantal nulpunten van $z^{10} + 8z^9 + 20z^3 + 2z$ op de annulus $1 \le |z| \le 2$.

4. Bereken

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)^2} dx.$$

5. Laat zien dat er precies een analytische tak f van $\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$ bestaat die gedefinieerd is op $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ en negatief is op $\{y = 0, x > 1\}$. Bepaal de eerste drie termen van de Laurent-reeks van f op $\{|z| > 1\}$. Bereken vervolgens

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-3} dz,$$

   a. als $\Gamma = C(0,4)$;
   b. als $\Gamma = C(0,2)$.

6. Beschouw de reeks

$$f(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + w^2}.$$

   a. Laat zien dat $f(w)$ een analytische functie voorstelt op $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
   b. Bereken $f(w)$. U mag hierbij gebruiken dat de functie $\pi \cot \pi z$ uniform begrensd is op de vierkanten V_n met hoekpunten $(n + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$ en enkelvoudige polen met residu 1 in de gehele getallen heeft.