Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Tentamen **Functietheorie**, 8 juli 1996, 13.30-16.30 uur.

1. Zij $G = B(0,1) \cap B(1,1)$. De rand van G bestaat uit twee cirkelbogen. Deze treffen elkaar in $P_1 = e^{i\pi/3}$ en $P_2 = e^{-i\pi/3}$ en maken in deze punten een hoek ter grootte $2\pi/3$. U hoeft dit niet te bewijzen.
   a. Bepaal een gebroken lineaire transformatie f zodat $f(P_1) = 0$ en $f(P_2) = \infty$. Laat zien dat $f(G)$ een sector is en bepaal de openingshoek α. Hangt α van de keuze van f af?
   b. Gebruik het vorige onderdeel om een conforme afbeelding van G op de eenheidsschijf te maken.

2. Bepaal en classificeer de singulariteiten op $\mathbb{C}$ van

$$\frac{z}{e^{\pi z} - 1} \log(z^2 + 4), \qquad \frac{1}{\cos\sqrt{z}}, \qquad e^{1/\sin z}.$$

3. Bereken

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4\cos t} dt.$$

4. Bereken

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(1 + x^2)^2} dx.$$

5. Laat zien dat er precies een analytische tak f van $\sqrt[4]{z^4 - 1}$ bestaat die gedefinieerd is op $\{z : \; |z| > 1\}$ en positief is op $\{z : \; x = 0, y > 1\}$. Bepaal de Laurent-reeks van f op zijn definitiegebied en bepaal

$$\int_{C(0,2)} z^2 f(z)\, dz.$$

   De functie f kan analytisch worden voortgezet tot $\mathbb{C} \setminus K$ waar $K = [-1,1] \cup [-i,i]$. U hoeft dit niet te bewijzen. Zij nu W het (positief georiënteerde) vierkant met hoekpunten $\frac{11}{10} e^{ik\pi/2}$, $k = 0,1,2,3$. Bepaal

$$\int_W z^6 f(z)\, dz.$$

6. Zij f een analytische functie gedefinieerd op een omgeving van de afsluiting van de annulus $A(0,1,2) = \{z : \; 1 < |z| < 2\}$. Veronderstel dat f niet constant is en $A(0,1,2)$ afbeeldt naar de eenheidsschijf waarbij de rand van $A(0,1,2)$ wordt afgebeeld naar $|z| = 1$.
   a. Laat zien dat f tenminste één nulpunt heeft.
   b. Laat zien dat voor $|w| < 1$ het aantal oplossingen van de vergelijking $f(z) = w$ onafhankelijk is van w.
   c. Laat zien dat f tenminste twee nulpunten heeft.

De uitslag van het tentamen zal in de eerste week van augustus aan kr 2.11 aangeplakt worden.