LOGICA IN HISTORISCH PERSPECTIEF

FRANK VELTMAN
AFDELING WIJSBEGEERTE
FACULTEIT DER GEESTESWETENSCHAPPEN
UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM

2002

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Traditionele Logica

Het vak logica beoogt verklarende theorieën te ontwikkelen met behulp waarvan redeneringen op hun geldigheid getoetst kunnen worden. Plato was de eerste filosoof die het ideaal van een dergelijke wetenschap ontwikkelde. Zijn leerling Aristoteles was de eerste die aan de verwezenlijking van dit ideaal werkte. Vóór Aristoteles bestudeerde men redeneringen meer vanuit het oogpunt van discussietechniek. Vandaar de naam *Dialectiek* voor wat men nu logica noemt. De achterliggende vraag bij dat onderzoek was niet 'Wanneer is een redenering geldig?'— een geldigheidsbegrip onderkende men nog niet — maar 'Wanneer zijn de toehoorders bij een openbaar debat overtuigd van iemands gelijk?'. Als men zich daarbij steeds zou hebben gericht op een zo kritisch mogelijke toehoorder, zou er weinig aan de hand geweest zijn. Dat deed men echter niet. In de dialectiek bleef geen drogreden, of sofisme zoals Aristoteles ze noemde, onbenut. Voor voorbeelden hiervan zij verwezen naar de aan sofisten toegeschreven redeneringen uit Plato's *Euthydemus* en uit Aristoteles' *De Sophisticis Elenchis*.

Aristoteles ging bij het opstellen van zijn theorie als volgt te werk. Hij isoleerde hij een fragment van de omgangstaal, de verzameling van categorische zinnen. Welke zinnen dat zijn en waarom Aristoteles juist deze zinnen van belang achtte wordt hier beneden uitgelegd. Vervolgens formuleerde hij regels waaraan gevolgtrekkingen die binnen dit fragment geformuleerd kunnen worden, moesten voldoen, wilden ze geldig zijn. Een en ander staat in *De Interpretatione*, hoofdstuk 1-11, en *Analytica Priora*, Boek 1, I-VII en XXIII-XXVI.

De titel van dit hoofdstuk suggereert dat er zoiets zou bestaan als *de* traditionele logica. Zo is het niet. Wat in dit hoofdstuk onder 1.1 behandeld wordt, is min of meer de harde kern van een aantal *verschillende* theorieën, die alle hun wortels bij Aristoteles vinden. In 1.2 wordt nader op enkele van de verschillen ingegaan.

Ondanks het feit dat we niet te maken hebben met één traditionele logica, meenden de traditionele logici allemaal dat hun theorie (slechts) een nadere uitwerking was van de Aristoteliaanse logica. Deze logica beschouwden ze bovendien als de enige 'ware' logica. Zo beweerde Kant bijvoorbeeld dat de logica bij Aristoteles begonnen was en door hem meteen voltooid werd (*Kritik de Reinen Vernunft*, B, p.7).

1.1 Het Standaardsysteem

1.1.1 Syntax en Semantiek

Een van de misverstanden die er over de traditionele logica bestaan, is dat ze minder formeel zou zijn dan de moderne logica. Dat is niet zo. Aristoteles en zijn opvolgers formuleerden hun logische theorieën aan de hand van een zeer 'onnatuurlijk' soort van zinnen, die we het best kunnen zien als de zinnen van een bepaald soort van formele talen. Die zinnen heten *categorische zinnen* en die talen zullen we, bij gebrek aan een betere uitdrukking, categorische talen noemen.

In deze paragraaf wordt beschreven hoe zo'n categorische taal in elkaar zit. Bovendien wordt vastgelegd over wat voor soort van werkelijkheid de sprekers van zo'n categorische taal geacht worden te spreken en ook hoe ze geacht worden dat te doen. M.a.w., we zullen niet alleen de syntax, maar ook een ontologie en semantiek voor die categorische talen specificeren.

Termen

Primitieve termen. De enige niet-logische constanten die in de zinnen van een categorische taal kunnen optreden zijn de zogenaamde primitieve termen. Deze primitieve termen spelen binnen de categorische talen dezelfde rol als de eenplaatsige predikaten in de talen van de predikatenlogica: dezelfde uitdrukkingen uit de natuurlijke taal — te weten soortnamen, bijvoeglijke naamwoorden, intransitieve werkwoorden — die in een taal van de predikatenlogica weergegeven worden met eenplaatsige predikaten, worden in de categorische talen vertaald met primitieve termen.

Wat de semantiek van die primitieve termen betreft het volgende: Om te beginnen zullen we net als aan de eenplaatsige predikaten uit de predikatenlogica aan elke primitieve term P een deelverzameling van een niet-leeg discussiedomein toekennen. Dat discussiedomein geven we aan met '$\mathbf{D}$', die deelverzameling noemen we 'de interpretatie van P in $\mathbf{D}$', en we geven die aan met '$\mathbf{I}(P)$'.

Een niet-lege verzameling $\mathbf{D}$ en een functie $\mathbf{I}$ die aan alle primitieve termen een deelverzameling van $\mathbf{D}$ toekent leggen samen een model $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$ vast. De modellen die we met categorische talen associëren, bezitten dus dezelfde eenvoudige ontologische structuur als de modellen die we met de talen van de eerste orde predikatenlogica geassocieërd hebben. De enige ontologische vooronderstelling die we de sprekers van zo'n categorische taal opdringen, is dat er een aantal objecten bestaat. Dit is een grove simplificatie die alleen recht doet aan de nominalisten onder de traditionele logici. In de meeste traditionele logische theorieën is de ontologie veel rijker. Daarover meer in het volgende hoofdstuk.

Ook de functies $\mathbf{I}$ zijn vergelijkbaar met de interpretatiefuncties uit de predikatenlogica. Zo'n functie doet met de primitieve termen uit een categorische taal hetzelfde als de interpretatiefuncties voor talen van de eerste-orde predikatenlogica met eenplaatsige predikaten doen. Echter, we zullen in het voetspoor van Aristoteles nog twee extra voorwaarden aan de functies $\mathbf{I}$ opleggen.

(i) voor alle primitieve termen P geldt $\mathbf{I}(P) \neq \emptyset$.

(ii) voor alle primitieve termen P geldt $\mathbf{D} \sim \mathbf{I}(P) \neq \emptyset$.

De eerste voorwaarde verzekert ons ervan dat we in een gegeven domein $\mathbf{D}$ altijd objecten kunnen vinden waarvan de term P gepredicеerd kan worden. De tweede voorwaarde stelt dat er in dat domein bovendien objecten voorkomen waaraan de eigenschap uitgedrukt door P niet toekomt. Deze twee voorwaarden leggen samen het *postulaat van existentiële import* vast.

Samengestelde termen. Behalve primitieve termen kunnen in categorische zinnen ook samengestelde, zogenaamde complementtermen, voorkomen. Formeel spreken we af dat als T een term is, ook $\bar{T}$ een term is. Met het teken '$^{-}$', dat we schrijven boven het teken van de term, verwijzen we naar een logische constante die, syntactisch gezien, uit een term weer een nieuwe term maakt.

Door deze afspraak is met elke term T een oneindig aantal samengestelde termen $\bar{T}$, $\bar{\bar{T}}$, $\bar{\bar{\bar{T}}}, \ldots$ geassocieerd. De semantiek voor deze samengestelde termen is gegeven met de volgende regel:

> De interpretatie $\mathbf{I}(\bar{T})$ voor een willekeurige samengestelde term $\bar{T}$ is gelijk aan $\mathbf{D} \sim \mathbf{I}(T)$.

$\mathbf{I}(\bar{T})$ is het *complement* van $\mathbf{I}(T)$, i.e. de verzameling van alle objecten waaraan de eigenschap uitgedrukt door T niet toekomt.[1] We spreken $\bar{T}$ dan ook uit als 'non-T'. Merk op dat het postulaat van existentiële import met zich meebrengt dat voor alle termen T, primitief en samengesteld, geldt dat $\mathbf{I}(\bar{T}) \neq \emptyset$ en $\mathbf{I}(\bar{T}) \neq \mathbf{D}$.

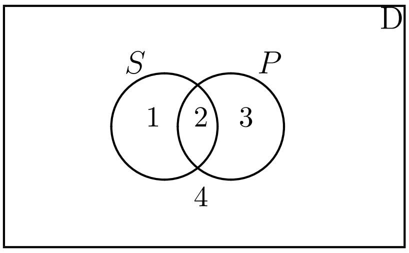
Categorische zinnen

Als S en P termen zijn van een categorische taal, dan is SaP — spreek uit 'alle S zijn P' — een zin van die taal. Met de letter 'a', die we schrijven tussen de tekens voor beide termen, verwijzen we daarbij naar een logische constante die, syntactisch gezien, uit twee termen een zin maakt.

De waarheidswaarde $\mathbf{V}_M(SaP)$ van de zin SaP is bij gegeven $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$ als volgt te bepalen: $\mathbf{V}_M(SaP) = 1$ als $\mathbf{I}(S) \subseteq \mathbf{I}(P)$, en $\mathbf{V}_M(SaP) = 0$ in andere gevallen.'1' en '0' staan hierbij respectievelijk voor de waarheidswaarden 'waar' en 'onwaar'.

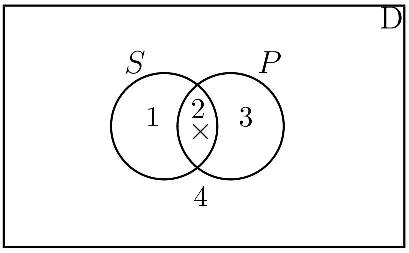
Dat $\mathbf{V}_M(SaP) = 1$ kunnen we in navolging van John Venn (1834-1923) als volgt in beeld brengen: we tekenen een rechthoek ter representatie van $\mathbf{D}$, en geven de verzamelingen $\mathbf{I}(S)$ en $\mathbf{I}(P)$ aan met elkaar overlappende cirkels. We krijgen op die manier vier gebiedjes 1, 2, 3, 4.

1. In Gamut 3.5 vindt u een uitleg van de verzamelingtheoretische notatie die in deze syllabus gebruikt wordt.



Met dit plaatje willen we niet suggereren dat elk van die gebiedjes ook elementen bevat. We spreken af om wanneer blijkt dat zo'n gebiedje elementen bevat, er een kruisje in te zetten, en om wanneer blijkt dat een bepaald gebiedje geen elementen bevat, dat gebiedje te arceren.

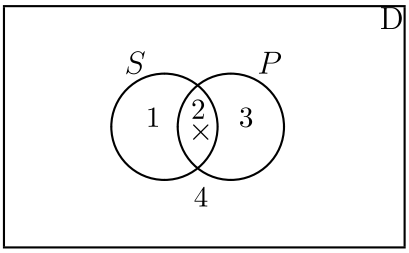
Dat $\mathbf{V}_M(SaP) = 1$ kunnen we dus eenvoudig als volgt aangeven:



We mogen gebiedje 1 arceren, want als $\mathbf{V}_M(SaP) = 1$, dan geldt dat alle objecten die de eigenschap uitgedrukt door S hebben, ook de eigenschap uitgedrukt door P hebben; er bevindt zich dus niets in gebiedje 1. Verder kunnen we een kruisje in gebiedje 2 plaatsen, want we weten dat $\mathbf{I}(S) \neq \emptyset$, en gezien het feit dat gebiedje 1 leeg is, is gebiedje 2 het enige gebiedje is waar de elementen van $\mathbf{I}(S)$ zich kunnen bevinden.

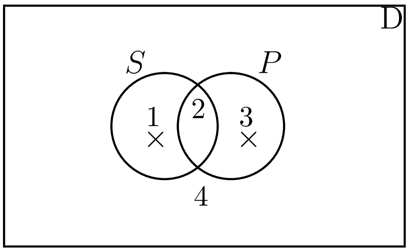
Als S en P termen zijn van een categorische taal, dan is SiP — spreek uit 'sommige S zijn P' — een zin van die taal.

De waarheidswaarde $\mathbf{V}_M(SiP)$ van de zin SiP is bij gegeven $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$ als volgt te bepalen: $\mathbf{V}_M(SiP) = 1$ als $\mathbf{I}(S) \cap \mathbf{I}(P) \neq \emptyset$; $\mathbf{V}_M(SiP) = 0$ in andere gevallen. Het feit dat $\mathbf{V}_M(SiP) = 1$ kunnen we als volgt in een Venn-diagram aangeven:



Als S en P termen zijn van een categorische taal, dan is SeP — spreek uit 'geen S is P' — een zin van die taal.

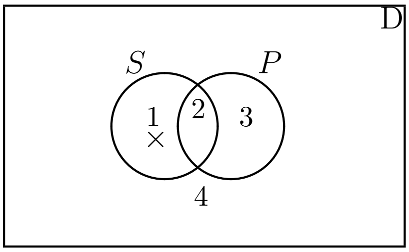
De waarheidswaarde $\mathbf{V}_M(SeP)$ van de zin SeP is bij gegeven $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$ als volgt te bepalen: $\mathbf{V}_M(SeP) = 1$ als $\mathbf{I}(S) \cap \mathbf{I}(P) = \emptyset$; $\mathbf{V}_M(SeP) = 0$ in andere gevallen. Het feit dat $\mathbf{V}_M(SeP) = 1$ kunnen we als volgt in een Venn-diagram aangeven:



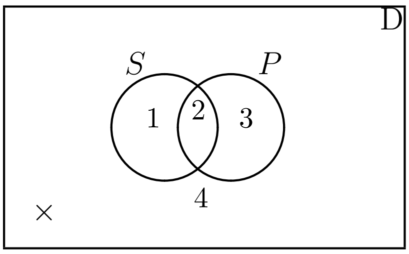
Vraag: vanwaar die kruisjes in gebiedje 1 en gebiedje 3?

Tenslotte: Als S en P termen zijn van een categorische taal, dan is SoP — spreek uit 'sommige S zijn niet P' — een zin van die taal.

Waarheidsconditie: $\mathbf{V}_M(SoP) = 1$ als $\mathbf{I}(S) \sim \mathbf{I}(P) \neq \emptyset$; $\mathbf{V}_M(SoP) = 0$ in andere gevallen. Het bijbehorende Venn-diagram ziet er zo uit.



Vraag: Met welke categorische zin(nen) kunt u de volgende situatie adekwaat beschrijven?



Terminologie Volgens de traditionele terminologie kunnen de vier soorten categorische zinnen die we hierboven geïntroduceerd hebben, van elkaar onderscheiden worden naar *kwaliteit* en *kwantiteit*. Een categorische zin kan wat kwaliteit betreft *affirmatief* —bevestigend — of *negatief* —ontkennend— zijn, en wat kwantiteit betreft *universeel* of *particulier*. Zo ontstaat de volgende indeling:

- universele affirmatieve zinnen; dit zijn zinnen van de vorm SaP. Sinds de Middeleeuwen noemt men deze zinnen, naar de eerste klinker in het woord 'affirmo' ook wel 'a-zinnen'.

- particuliere affirmatieve zinnen; dit zijn zinnen van de vorm SiP. Naar de tweede klinker in het woord 'affirmo' heten ze ook wel 'i-zinnen'.
- universele negatieve zinnen; dit zijn zinnen van de vorm SeP. Naar de eerste klinker in het woord 'nego' heten ze ook wel 'e-zinnen'.
- particuliere negatieve zinnen; dit zijn zinnen van de vorm SoP, ook wel 'o-zinnen' geheten, dit naar de tweede klinker in het woord 'nego'.

De eerste term die in een categorische zin optreedt, wordt de *subjectterm* van die zin genoemd, en de laatste de *predikaatterm*.

Een ander belangrijk begrip in traditionele logische beschouwingen is het al of niet *gedistribueerd* zij van een gegeven term in een gegeven zin. De scholastici delen ons mede dat de subjectterm gedistribueerd is in (universele) a- en e-zinnen, en de predikaatterm in de (negatieve) $e-$ en o-zinnen. Ze kwamen op dit distributiebegrip op grond van de volgende observatie: In a- en e-zinnen wordt ons iets verteld over elke specifiek object dat onder de subjectterm valt: Als alle S de eigenschap P hebben, dan heeft ook *deze* S de eigenschap P, en als geen enkele S P is, dan ook *deze* S niet. Dezelfde truc gaat op bij e predikaatterm in in e- en o-zinnen: als geen enkele S P is, dan is ook geen enkele S *deze* P, en als sommige S niet P zijn, dan zijn ook sommige S niet *deze* P. De predikaatterm in een a-zin is niet gedistribueerd want als alle S P zijn, dan kun je niet concluderen dat alle S deze P zijn. Wat i-zinnen betreft, kun je er op dezelfde manier achter komen dat noch de subjectterm noch de predikaatterm gedistribueerd is.

1.1.2 Middellijke en onmiddellijke gevolgtrekkingen

Zij $n \geq 0$ en $\varphi_1, \ldots . \varphi_n/\psi$ een redenering in een categorische taal. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n/\psi$ is *geldig* desda voor alle modellen $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$ geldt: als $\mathbf{V}_M(\varphi_i) = 1$ voor alle $1 \leq i \leq n$, dan $\mathbf{V}_M(\psi) = 1$. We noemen een categorische zin φ een *logische wet* desda de redenering $/\varphi$ geldig is, d.w.z. desda voor alle modellen $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$ geldt dat $\mathbf{V}_M(\varphi) = 1$. (Vgl. de geldigheidsdefinitie in het boek van Gamut.)

In de volgende paragrafen bekijken we achtereenvolgens redeneringen met nul premissen, redeneringen met één premisse, redeneringen met twee premissen, en redeneringen met meer dan twee premissen. Dit naar traditioneel gebruik.

Logische wetten

De enige logische waarheden die in de traditionele literatuur een aparte status hebben zijn de categorische zinnen van de vorm SaS en $Se\bar{S}$. Traditionele filosofen verwijzen naar de eerste logische waarheid als 'de wet er identiteit' en naar de tweede als 'de wet der non-contradictie'.

Dat zinnen van deze vorm noodzakelijk waar zijn berust op de volgende triviale feiten.

(i) In alle modellen $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$ geldt voor alle termen S dat $\mathbf{I}(S) \subseteq \mathbf{I}(S)$. Immers, elke verzameling is een deelverzameling van zichzelf. Derhalve geldt dat $\mathbf{V}_M(SaS) = 1$.

(ii) In alle $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$ geldt voor alle S dat $\mathbf{I}(S) \cap (\mathbf{D} \sim \mathbf{I}(S)) = \emptyset$. Immers, de doorsnede van een verzameling met zijn complement is altijd leeg.

Opgave 1

(i) Ga na dat ook alle categorische zinnen van de vorm SiS, $\bar{S}eS$, $So\bar{S}$, $Sa\bar{\bar{S}}$ logische waarheden zijn.

(ii) Welke van de onder (i) besproken zinsvormen danken hun geldigheid aan het beginsel van existentiële import?

Onmiddellijke gevolgtrekkingen

Onmiddellijke gevolgtrekkingen zijn gevolgtrekkingen uit slechts één premisse. Er wordt in de traditionele logica-leerboeken heel wat aandacht aan besteed. Bovendien komt uit die beschouwingen een hoop terminologie vandaan die nog steeds druk gebruikt wordt in continentale filosofische kringen.

Het oppositievierkant Een vraag die we eerst stellen is de volgende. Laten φ en ψ twee categorische zinnen zijn waarin dezelfde termen in dezelfde volgorde optreden; hoe verhouden φ en ψ zich tot elkaar? M.a.w., wat zijn de logische relaties tussen de zinnen SaP, SiP, SeP, en SoP?

We kunnen die vraag uitputtend beantwoorden na de volgende definities.

Definitie 1

Laten φ en ψ twee categorische zinnen zijn.

- φ is contradictoir met ψ desda voor alle $\mathbf{M}$ geldt dat $\mathbf{V}_M(\varphi) = 1$ desda $\mathbf{V}_M(\psi) = 0$.
- φ is contrair met ψ desda voor alle $\mathbf{M}$ geldt dat $\mathbf{V}_M(\varphi) = 0$ of $\mathbf{V}_M(\psi) = 0$.
- φ is subcontrair ψ desda voor alle $\mathbf{M}$ geldt dat $\mathbf{V}_M(\varphi) = 1$ of $\mathbf{V}_M(\psi) = 1$.
- φ is subaltern t.o.v. ψ desda voor alle $\mathbf{M}$ geldt dat als $\mathbf{V}_M(\psi) = 1$, ook $\mathbf{V}_M(\varphi) = 1$.

U kunt nu zelf bewijzen dat het volgende geldt:

- Elke SaP-zin is contradictoir met de corresponderende SoP-zin.
- Elke SeP-zin is contradictoir met de corresponderende SiP-zin.
- Elke SaP-zin is contrair met de corresponderende SeP-zin.
- Elke SiP-zin is subcontrair met de corresponderende SoP-zin.
- Elke SiP-zin is subaltern t.o.v. de corresponderende SaP-zin.
- Elke SoP-zin is subaltern t.o.v. de corresponderende SeP-zin.

Hier volgt een bewijs voor de gevallen (i), (iii) en (vi).

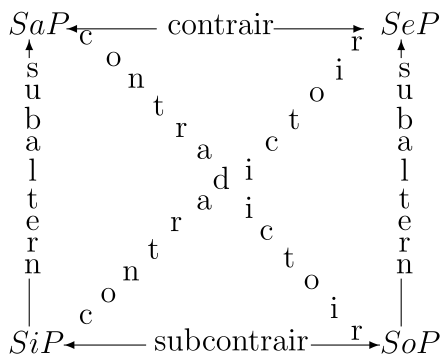
Ad (i). Zij $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$ een willekeurig model. Dan geldt $\mathbf{V}_M(SaP) = 1$ desda $\mathbf{I}(S) \subseteq \mathbf{I}(P)$ desda $\mathbf{I}(S) \sim \mathbf{I}(P) = \emptyset$ desda $\mathbf{V}_M(SoP) = 0$.

Ad (iii). Zij $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$ een willekeurig model. Neem aan dat geldt $\mathbf{V}_M(SaP) = \mathbf{V}_M(SeP) = 1$. Dan geldt (a) $\mathbf{I}(S) \subseteq \mathbf{I}(P)$, en (b) $\mathbf{I}(S) \cap \mathbf{I}(P) = \emptyset$. Uit (a) en (b) volgt dat $\mathbf{I}(S) = \emptyset$. Maar dit is in strijd met het postulaat van existentiële import. We moeten de aanname dus laten vallen. Ergo $\mathbf{V}_M(SaP) = 0$ of $\mathbf{V}_M(SeP) = 0$.

Ad (vi). Zij $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$ een willekeurig model. Neem aan dat $\mathbf{V}_M(SeP) = 1$ (*). Dan geldt dat) $\mathbf{I}(S) \cap \mathbf{I}(P) = \emptyset$. We mogen aannemen dat $\mathbf{I}(S) \neq \emptyset$. Zij d een element van $\mathbf{I}(S)$. Op grond van (*) geldt dat d geen element is van $\mathbf{I}(P)$. M.a.w. $\mathbf{I}(S) \sim \mathbf{I}(P) \neq \emptyset$. Hetgeen betekent dat $\mathbf{V}_M(SoP) = 1$.

Opgave 2 Bewijs de resterende gevallen.

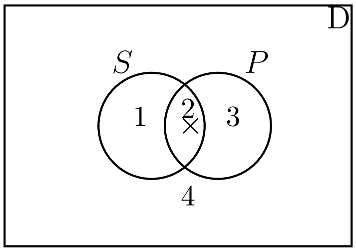
Dat we met (i) t/m (vi) de relaties tussen SaP-, SiP-, SeP-, en SoP-zinnen uitputtend behandeld hebben, blijkt uit het volgende zogenaamde *oppositievierkant*, een diagram waarin die relaties netjes worden opgesomd.

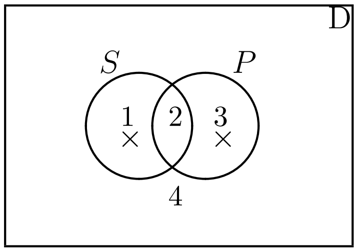


Opgave 3 Wat blijft er over van het oppositievierkant als we het postulaat van existentiële import laten vallen?

Bestudering van de onderlinge relaties tussen SaP-, SiP-, SeP-, en SoP-zinnen heeft ons twee geldige gevolgtrekkingsschema's opgeleverd SaP/SiP en SeP/SoP. Een magere oogst. Wat vruchtbaarder is het om enkele operaties op categorische zinnen te bekijken.

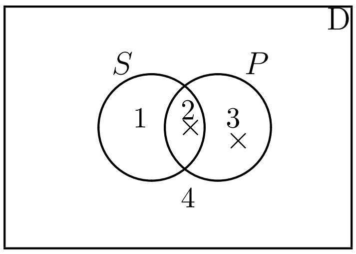
Conversie De *converse* van een categorische zin vind je door de subject- en predikaatterm te verwisselen. De vraag die we ons nu stellen is: voor welke soort van categorische zinnen geldt dat de converse ervan logisch volgt uit de zin zelf? Het antwoord luidt: voor i-zinnen en e-zinnen. Dat dit antwoord juist is ziet u onmiddellijk aan de desbetreffende Venn-diagrammen.

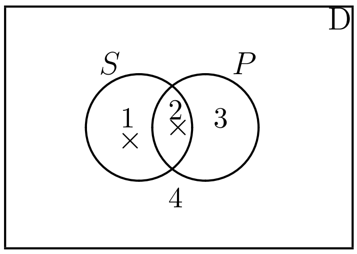




$\mathbf{V}_M(SiP) = 1$ desda $\mathbf{V}_M(PiS) = 1$ $\mathbf{V}_M(SeP) = 1$ desda $\mathbf{V}_M(PeS) = 1$

Dat we uit de waarheid van een *a*- of *o*-zin niet zomaar tot de waarheid van de converse mogen besluiten blijkt uit onderstaande, in diagram gegoten, tegenvoorbeelden.





$\mathbf{V}_M(SaP) = 1$, maar $\mathbf{V}_M(PaS) = 0$ $\mathbf{V}_M(SoP) = 1$, maar $\mathbf{V}_M(PoS) = 0$

Obversie De *obverse* van een categorische zin verkrijgt men door de kwaliteit van die zin te veranderen en het predikaat van die zin te vervangen door het complement van dat predikaat. De obverse van de zin SaP is dus de zin $Se\bar{P}$, de obverse van de zin SoP is dus de zin $Si\bar{P}$, etc.

Obversie is een geldige operatie voor alle soorten van categorische zinnen. (Het bewijs laten we achterwege). Merk ook op dat men ook omgekeerd uit de waarheid van de obverse van een categorische zin tot de waarheid van de zin zelf kan concluderen.

Contrapositie De *gecontraponeerde* zin van een categorische zin verkrijgt men door de subjectterm en predikaatterm te verwisselen en van beide het complement te nemen. Opnieuw vragen we ons af: voor welke soorten van categorische zinnen geldt dat contrapositie geldig is? Het antwoord luidt ditmaal: voor *a*- en *o*-zinnen, maar niet voor *i*- en *e*-zinnen. De lezer kan de juistheid van deze stelling zelf controleren door bijvoorbeeld een Venn-diagram op te stellen, of een wat meer abstracte verzamelingtheoretisch bewijs op te stellen. Meer in de lijn van traditionele logica ligt het om het zo te doen: Dat contrapositie geldig is voor *a*-zinnen, volgt ook al uit het feit dat obversie geldig is voor alle soorten van zinnen en conversie geldig is voor *e*-zinnen. Immers $SaP/Se\bar{P}$ is geldig (obversie); Uit $Se\bar{P}$ volgt $\bar{P}eS$ (conversie), en nogmaals toepassen van de obversieoperatie levert $\bar{P}a\bar{S}$. U kunt dezelfde soort van redenering opzetten m.b.t. de contrapositie van *o*-zinnen.

Middellijke Gevolgtrekkingen

We zij toe aan categorische redeneringen met twee premissen. Een bijzonder deelverzameling van deze redenering wordt gevormd door de *syllogismen*. Om duidelijk te maken wat dat voor redeneringen zijn, kunnen we misschien het beste uitgaan van een voorbeeld.

Alle dieren zijn levende wezens
Alle mensen zijn dieren
Alle mensen zijn levende wezens

Of formeel:

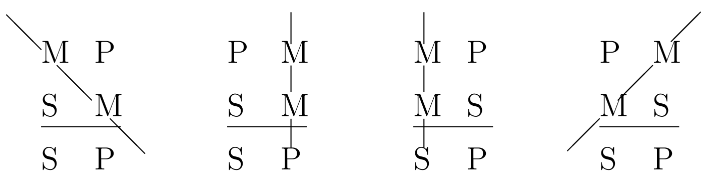
DaL
$\underline{MaD}$
MaL

In deze redenering met twee premissen, en in alle andere syllogismen treden drie termen op, alle drie twee maal, geen enkele twee maal in dezelfde zin, en elk telkens gepaard aan een andere.

Het predikaat van de conclusie van een syllogisme heet de *majorterm* van dat syllogisme en het is gebruikelijk om de premisse waarin die term optreedt de majorpremisse noemen en die als eerste te vermelden. Het subject van de conclusie heet de *minorterm*, en de premisse waarin de minorterm optreedt de minorpremisse. De derde term heet de *middenterm* en komt in beide premissen voor.

De reden dat Aristoteles de majorterm 'de grotere', de middenterm 'de middelste', en de minorterm 'de kleinere' noemt is gelegen in het feit dat de extensies van die termen zich in de zogenaamde perfecte syllogismen (die van de vorm $aaa-1$, zie beneden), zich zo verhouden als de namen suggereren. In andere syllogismen kan die verhouding heel anders liggen, ook al blijft de naamgeving gehandhaafd.

Syllogismen worden geclassificeerd naar hun *modus* en naar hun *figuur*. Het figuur van een syllogisme ligt vast met de wijze waarop de middenterm over de twee premissen verdeeld is, uitgaande van de afspraak dat de majorpremisse als eerste en de minorpremisse als tweede gegeven wordt. In bovenstaand voorbeeld is de middenterm subject van de majorpremisse en predikaat van de minorpremisse. Dat had ook andersom kunnen zijn. In principe doen er zich vier mogelijkheden voor die we als volgt in schema kunnen brengen.



1e figuur *2e figuur* *3e figuur* *4e figuur*

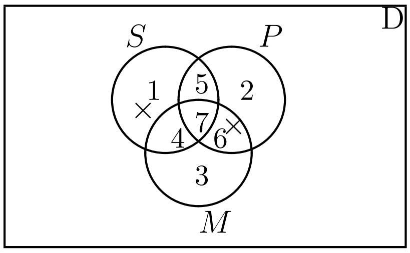
(De lijnen die door de verschillende configuraties getrokken zijn, vormen samen een soort van 'W'. Dit kan wellicht dienst doen als een geheugensteuntje).

De *modus* van een syllogisme wordt bepaald door de kwaliteit en kwantiteit van respectievelijk de majorpremisse, de minorpremisse en de conclusie. Het syllogisme waar mee we deze paragraaf begonnen, is een voorbeeld van een *aaa*-syllogisme; zowel de majorpremisse als de minorpremisse als ook de conclusie van dit syllogisme bestaan uit *a*-zinnen. Verder is dit syllogisme er een van de eerste figuur. Dit samen levert een syllogisme van de *vorm* $aaa - 1$. Ander voorbeeld: een $aee - 4$-syllogisme.

$$\begin{array}{l} PaM \\ \underline{MeS} \\ SeP \end{array}$$

Alle syllogismen van de vorm $aee - 4$ zijn geldig. We kunnen dat op verschillende manieren bewijzen:

Met een Venn-diagram.



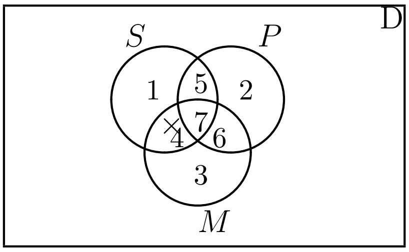
Neem aan dat beide premissen waar zijn. Op grond van de majorpremisse moeten we dan de gebiedjes 5 en 2 arceren en een kruisje zetten in minstens een van de gebiedjes 7 en 6, maar aangezien we (nog) niet weten in welke van de twee, laten we dat kruisje (nog even) weg. De minorpremisse stelt dat ook de gebiedjes 4 en 7 gearceerd moeten worden en dat er kruisjes moeten komen in (a) minstens een van de gebiedjes 1 en 5, en (b) minstens een van de gebiedjes 3 en 6. Gebiedje 5 is uitgesloten, dus we kunnen een kruisje in gebiedje 1 zetten. Bovendien blijkt nu dat er geen kruisje in gebiedje 7 kan, en dit terwijl we al wisten dat er een moest staan in gebiedje 6 of 7. Er kan dus een kruisje in gebiedje 6. We zien nu dat de gebiedjes 5 en 7 gearceerd zijn, en dat er een kruisje staat in een van de gebiedjes 1 en 4, en een in een van de gebiedjes 2 en 6. We kunnen er dus zeker van zijn dat de conclusie waar is.

Verzamelingtheoretisch. Als $\mathbf{V}_M(PaM) = 1$, dan geldt (i) $\mathbf{I}(P) \subseteq \mathbf{I}(M)$. Als geldt $\mathbf{V}_M(MeS) = 1$, dan geldt (ii) $\mathbf{I}(M) \cap \mathbf{I}(S) = \emptyset$. Uit (i) en (ii) volgt dat $\mathbf{I}(P) \cap \mathbf{I}(S) = \emptyset$. En daaruit volgt dat $\mathbf{V}_M(SeP) = 1$.

Een tweede voorbeeld: Alle syllogismen van de vorm $eao - 3$ zijn geldig.

$$\begin{array}{l} MeP \\ \underline{MaS} \\ SoP \end{array}$$

Bekijk het volgende Venn-diagram:



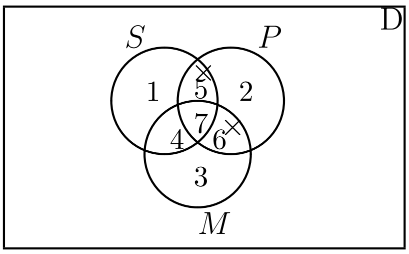
Op grond van de eerste premisse moeten we de gebiedjes 6 en 7 arceren, een kruisje zetten in minstens een van de gebiedjes 5 en 2 (maar we weten niet in welk van de twee), en een kruisje zetten in minstens een van de gebiedjes 3 en 4 (maar we weten niet in welke van de twee). Op grond van de tweede premisse mogen we de gebiedjes 3 en 6 arceren, en een kruisje zetten in een van de gebiedjes 4 en 7. In gebiedje 7 kan niet; dus we zetten een kruisje in gebiedje 4. Er staat nu een kruisje in een van de gebiedjes 1 en 4 en derhalve kunnen we er zeker van zijn dat de conclusie SoP waar is.

Alternatief: Als de majorpremisse waar is dan geldt (i) $\mathbf{I}(M) \cap \mathbf{I}(P) = \emptyset$. Waarheid van de minorpremisse houdt in dat $\mathbf{I}(M) \subseteq \mathbf{I}(S)$. We kunnen er zeker van zijn dat (iii) $\mathbf{I}(M) \neq \emptyset$. Neem nu aan dat de conclusie onwaar is, d.w.z. dat $\mathbf{I}(S) \sim \mathbf{I}(P) = \emptyset$, oftewel (iv) $\mathbf{I}(S) \subseteq \mathbf{I}(P)$. Uit (ii) en (iv) volgt $\mathbf{I}(M) \subseteq \mathbf{I}(P)$. Samen met (iii) geeft dit $\mathbf{I}(M) \cap \mathbf{I}(P) \neq \emptyset$. Dit is echter in strijd met (i). De aanname dat de conclusie onwaar is leidt tot een contradictie. De conclusie moet dus wel waar zijn.

Met een Venn-diagram kun je ook aantonen dat een syllogisme ongeldig is. Voorbeeld: syllogismen van de vorm $ieo - 1$ zijn ongeldig.

$$\begin{array}{l} MiP \\ \underline{SeM} \\ SoP \end{array}$$

Bekijk het volgende Venn-diagram:



Merk op de gebiedjes 4 en 7 zijn gearceerd, er staat een kruisje in gebiedje 5 en er staat een kruisje in gebiedje 6. Dit betekent: de minorpremisse is waar. Er staat een kruisje in gebiedje 6, hetgeen betekent dat ook de major premisse waar is. De conclusie is echter onwaar, want er staat geen kruisje in gebiedje 1 of gebiedje 4.

Verzamelingtheoretisch alternatief: Beschouw $\langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$ met $\mathbf{D} = \{1, 2\}$, $\mathbf{I}(M) = \{1\}$, $\mathbf{I}(P) = \{1, 2\}$, en $\mathbf{I}(S) = \{2\}$. U kunt zelf nagaan dat in dit model de premissen allebei waar zijn, en de conclusie onwaar.

Opgave 4 Bekijk de volgende redenering:

> Sommige armoedzaaiers zijn egoïsten, want sommige kunstenaars zijn armoedzaaiers, en alle kunstenaars zijn egoïsten.

(i) Schrijf dit syllogisme in de standaardvorm op. Wat is wat is de modus en de figuur?

(ii) Onderzoek de geldigheid van dit syllogisme met behulp van een Venn-diagram. Geef kort aan hoe u tot u conclusie gekomen bent.

Er zijn 256 syllogistische vormen — bereken dit zelf — en van die 256 zijn er 24 geldig. We sommen ze hier op:

$aaa - 1$	$eae - 2$	$iai - 3$	$aee - 4$
$eae - 1$	$aee - 2$	$aii - 3$	$iai - 4$
$aii - 1$	$eio - 2$	$oao - 3$	$eio - 4$
$eio - 1$	$aoo - 2$	$eio - 3$	$(aii - 4)$
$(aai - 1)$	$(aeo - 2)$	$(aai - 3)$	$(eao - 4)$
$(eao - 1)$	$(eao - 2)$	$(eao - 3)$	$(aeo - 4)$

Wanneer we het postulaat van existentiële import laten vallen, dan blijken er 9 syllogismen af te vallen. We hebben die hierboven tussen haakjes gezet.

Met de bovenstaande rijtjes heeft u heel wat oefenstof gekregen. U kunt van alle syllogismen die in die rijtjes voorkomen op twee manieren de geldigheid bewijzen, met een Venn-diagram, of verzamelingtheoretisch. U kunt bovendien op twee manieren de ongeldigheid aantonen van alle syllogismen die niet in die rijtjes voorkomen —keus genoeg. En tenslotte kunt u van de syllogismen die tussen haakjes zijn gezet dat ze geldig zijn als het postulaat van existentiële import aangenomen wordt, en ongeldig als we dat postulaat laten vallen.

Mocht deze oefening gaan vervelen, dan zou u eens na kunnen denken over het bewijs van de volgende stelling, die zo rond 1500 in de logica-leerboeken verschijnt.

Stelling 1 Een syllogisme is geldig desda aan de volgende vier voorwaarden voldaan is.

(i) de middenterm is gedistribueerd in minstens een van de premissen.

(ii) elke term die gedistribueerd is in de conclusie is ook gedistribueerd in een van de premissen.

(iii) minstens een van de premissen is affirmatief.

(iv) de conclusie is negatief desda een van de premissen negatief is.

Wanneer we het postulaat van existentiële import laten vallen, dan moeten we de bovenstaande voorwaarden nog aanvullen met een vijfde:

(v) als de conclusie particulier is, dan is ook minstens een van de premissen particulier.

Opgave 5 Laat aan de hand van bovenstaande stelling zien dat elk syllogisme met als maiorpremisse een *i*-zin en als minor premisse een *e*-zin ongeldig is.

1.1.3 Volledigheid

Ter inleiding van het onderwerp van deze paragraaf beschouwen we de volgende categorische redenering met vier premissen;

$$MaP, SaM, NeP, RiS/RoN$$

Deze redenering is geldig. Hier volgt een verzamelingtheoretisch bewijs:

Zij $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$ een willekeurig model. Neem aan $\mathbf{V}_M(MaP) = 1$; dan (i) $\mathbf{I}(M) \subseteq \mathbf{I}(P)$. Neem aan $\mathbf{V}_M(NeP) = 1$; dan (ii) $\mathbf{I}(N) \cap \mathbf{I}(P) = \emptyset$. Uit (i) en (ii) volgt dat (iii) $\mathbf{I}(M) \cap \mathbf{I}(N) = \emptyset$. De tweede premisse leert dat (iv) $\mathbf{I}(S) \subseteq \mathbf{I}(M)$. (iii) en (iv) samengenomen garanderen dat (v) $\mathbf{I}(S) \cap \mathbf{I}(N) = \emptyset$. Voegen we hieraan toe dat (vi) $\mathbf{I}(R) \cap \mathbf{I}(S) \neq \emptyset$, hetgeen mag gegeven de laatste premisse, dan kunnen we er op grond van (v) en (vi) zeker van zijn dat $\mathbf{I}(R) \sim \mathbf{I}(N) \neq \emptyset$. Dat betekent dat $\mathbf{V}_M(RoN) = 1$. QED.

De andere bewijsmethode die we in de vorige paragraaf gebruikt hebben, het opstellen van een Venn-diagram, is hier niet meer adekwaat toe te passen. In de bovenstaande redenering treden vijf termen op. Dit heeft tot gevolg dat we in een eventueel Venn-diagram 32 verschillende gebiedjes zouden moeten onderscheiden, elk de doorsnede van een vijftal termen of complementtermen representerend. Als we dan in die gebiedjes kruisjes moeten gaan zetten of zo, dan wordt het al vlug onoverzichtelijk.

Er is echter nog een andere manier om om de geldigheid van de hier ter discussie staande redenering aan te tonen. We kunnen namelijk om te beginnen uit de eerste en de derde premisse de tussenconclusie MeN afleiden:

$$\begin{array}{ll} NeP & \\ \underline{MaP} & (eae-2) \\ MeN & \end{array}$$

Vervolgens kunnen we met behulp van de tweede premisse en deze eerste tussenconclusie syllogistisch besluiten tot SeN:

$$\begin{array}{ll} MeN & \\ \underline{SaM} & (eae-1) \\ SeN & \end{array}$$

En uit deze tweede tussenconclusie samen met de vierde premisse volgt tenslotte de eigenlijke conclusie:

$$\begin{array}{ll} SeN & \\ \underline{RiS} & (eio-1) \\ RoN & \end{array}$$

Een ander voorbeeld. We beschouwen de redenering

$$MaP, Se\bar{M}, \bar{S}a\bar{R}/RaP$$

Ook deze redenering is geldig. Ten eerste geldt dat we uit de tweede premisse kunnen concluderen tot SaM; $Se\bar{M}$ is immers de obverse van SaM, en obversie is een geldige, en ook 'omgekeerd' geldige operatie. Ten tweede kunnen we uit deze tussenconclusie SaM en de eerste premisse via een syllogisme van de vorm $aaa-1$ concluderen tot SaP. De derde premisse is logisch equivalent met RaS want contrapositie is geldig en ook omgekeerd geldig voor a-zinnen. Uit de tussenconclusie SaP en de tussenconclusie RaS kunnen we via een syllogisme van de vorm $aaa-1$ tenslotte de eindconclusie RaP afleiden.

We zouden ons nu de volgende vraag kunnen stellen: Zij $\varphi_i, \ldots \varphi_n/\psi$ een willekeurige geldige categorische redenering. Is er dan *altijd* zo'n keten van geldige syllogismen en onmiddellijke gevolgtrekkingen te vinden zodanig dat de conclusie van de laatste gevolgtrekking in die keten de conclusie van de oorspronkelijke redenering is en dat de enige premissen die in de redeneringen van die keten gebruikt worden, premissen uit de oorspronkelijke redenering of tussenconclusies of tautologieën (dat kan natuurlijk ook nog) zijn?

We kunnen deze vraag bevestigend beantwoorden mits we nog de volgende algemene gevolgtrekkingsregel aan de reeds besproken geldige regels toevoegen

> De redenering $\varphi_1, \ldots, \varphi_i, \ldots, \varphi_n/\psi$ is geldig desda de redenering $\varphi_1, \ldots, \tilde{\psi}, \ldots, \varphi_n/\tilde{\varphi}_i$ geldig is.

N.B. In de bovenstaande bewering bedoelen we met $\tilde{\varphi}_i$ en $\tilde{\psi}$ de zinnen die contradictoir zijn met ψ respectievelijk φ_i.

De hier geïntroduceerde regel is een Aristoteliaanse versie de *reductio ad absurdum*-regel. Als je moet bewijzen dat de redenering $\varphi_1, \ldots, \varphi_n/\psi$ geldig is dan kun je dat doen door te laten zien dat een van de premissen onwaar is aangenomen dat de conclusie onwaar is. Voorbeeld: de redenering MeM/SaP is geldig. Bewijs: We kunnen ons beperken tot een bewijs voor de redenering SoP/MiM; immers SoP is contradictoir met SaP en MiM is contradictoir met MeM. Verder geldt: de redenering SoP/MiM is geldig, want de redenering $/MiM$ is geldig. (MiM is een tautologie).

We kunnen het reductieprincipe dat hierboven al zo'n beetje uit de losse pols geformuleerd is, verscherpen tot de volgende stelling:

Stelling 2 Als $\varphi_1, \ldots, \varphi_n/\psi$ een geldige categorische redenering is dan bestaat er een eindige rij van geldige categorische gevolgtrekkingen zodanig dat

(a) ψ de conclusie is van de laatste gevolgtrekking in die rij, de premissen in de eerste gevolgtrekking van die rij alle tot de verzameling $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ behoren, en de premissen in de overige gevolgtrekkingen tot de verzameling $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ behoren of conclusies zijn uit vorige redeneringen in die rij.

(b) voor alle redeneringen in die rij geldt dat ze
   (i) (wet van de identiteit) van de vorm $/SaS$ zijn;
   (ii) of (conversie) van de vorm SiP/PiS of SeP/PeS zijn;
   (iii) of (obversie) van de vorm $SaP/Se\bar{P}$, $SiP/So\bar{P}$, $SeP/Sa\bar{P}$, $SoP/Si\bar{P}$ of omgekeerd zijn;
   (iv) of (subalternatie) van de vorm SaP/SiP of SeP/SoP zijn;
   (v) of syllogismen van de vorm $aaa - 1$, $eae - 1$, $eio - 1$ of $aii - 1$ zijn;
   (vi) of door toepassing van de aristoteliaanse reductio ad absurdum regel tot een van de voorgaande redeneervormen kunnen worden teruggebracht.

Gegeven deze stelling is het niet nodig andere redeneervormen te bestuderen dan de redeneervormen die hierboven aan de orde zijn geweest. Want zoals de stelling aantoont de geldigheid van die andere redeneervormen kan altijd in termen van de geldigheid van de in de stelling genoemde redeneervormen worden verklaard.

In de geschriften van de traditionele logici vindt men geen bewijs van deze stelling. Dat bewijs kan men namelijk pas geven als men behalve de syntax ook de semantiek van de categorische talen *expliciet* formuleert — hetgeen binnen de traditionele logica nooit gebeurt. Pas als de semantiek expliciet geformuleerd heeft krijgt men voldoende vat op het geldigheidsbegrip om er stellingen *over* te bewijzen.

Overigens, ook al ontbreekt in de traditionele geschriften een bewijs voor deze stelling in al zijn algemeenheid, toch was al aan Aristoteles bekend dat de stelling in ieder geval voor syllogistische redeneringen opgaat. Volgens hem waren de vier in de stelling genoemde syllogismen van de eerste figuur de enige waarvan de geldigheid zonder meer intuïtief in te zien is — die syllogismen worden daarom ook wel *perfect* genoemd. Hij achtte het dan ook zijn plicht om de geldigheid van de andere geldige syllogismen te verklaren op grond van de geldigheid van deze vier. Derhalve liet hij zien hoe ze alle reduceerbaar waren tot deze vier, dit onder gebruikmaking van de onmiddellijke gevolgtrekkingsregels en reductio ad absurdum.

Voorbeelden van dergelijke reducties zijn:

(a) voor syllogismen van de vorm $oao - 3$: $MoP, MaS/SoP$ is geldig, immers $SaP, MaS/MaP$ $(aaa - 1)$ is geldig en SaP is de contradictoire zin bij SoP en MaP de contradictoire zin bij MoP (r.a.a.);

(b) voor syllogismen van de vorm $eao-3$: $MeP, MaS/SoP$ is geldig. Beschouw de volgende rij: de eerste redenering is MaS/MiS, de tweede MiS/SiM, en de derde $MeP, SiM/SoP$ (eio-1).

In de Middeleeuwen moest elke student alle geldige syllogismen uit het hoofd kennen en bovendien bij elk niet-perfect syllogisme zonder aarzelen een reductieprocedure tot een perfect syllogisme kunnen aangeven. Ze hadden daarbij een ezelsbruggetje tot hun beschikking dat er in grote lijnen als volgt uitzag: Alle geldige syllogistische vormen hebben een naam; de klinkers in die naam geven de modus van het syllogisme in kwestie aan. Zo zijn de namen van de vier perfecte syllogismen: Barbara, Celarent, Darii, en Ferio. De namen van de geldige vormen van de tweede, derde en vierde figuur zijn verder zo opgebouwd dat je aan de medeklinkers kan zien hoe ze tot een perfect syllogisme gereduceerd kunnen worden. De eerste medeklinker in die naam correspondeert met de eerste medeklinker van het perfecte syllogisme waartoe de reductie leidt. Bocardo — de naam van $oao - 3$ — zal dus reduceren tot barbara. Cesare ($eae - 2$) en Camenes ($aee - 4$) tot Celarent, en Felapton ($eao - 3$) tot Ferio. De aanwijzingen uit de overige medeklinkers zijn de volgende: een 'm' geeft aan dat de premissen verwisseld moeten worden (probeer het eens bij Camenes); een 's' geeft aan: pas conversie toe op de zin voor deze 's' (beschouw Cesare); een 'p' geeft aan dat er achtereenvolgens subalternatie en conversie toegepast moet worden op de zin die voor die 'p' staat (we hebben dat al gezien bij Felapton), en een 'c' geeft aan dat er bij de reductie een reductio ad absurdum ingelast moet worden met betrekking tot de premisse voor de 'c' in kwestie (bekijk Bocardo).

Opgave 6

(i) Herschrijf de volgende categorische redenering als een keten van drie geldige syllogistische vormen.

$$PeQ,\ RaS,\ RaQ,\ SaT\ /\ ToP$$

(ii) Reduceer elk van de syllogistische vormen die u onder (i) gevonden heeft tot een syllogisme van de eerste figuur.

1.2 Historische Opmerkingen

In het voorgaande is met moderne middelen een representatie gegeven van de de harde kern van de traditionele gevolgtrekkingsleer. Dat is echter onvoldoende wanneer men wil begrijpen met wat voor problematiek traditionele logici doorgaans worstelden. De meeste van hen vertelden namelijk heel wat meer over logica dan tot nu toe weergegeven. Sommigen gebruikten andere formaliseringen, die nieuwe problemen opriepen. Sommigen waren geïnteresseerd in uitbreiding van het bestudeerde taalfragment. Soms werd men hierdoor genoodzaakt een rijkere ontologie aan te nemen dan die uit het voorgaande, waardoor de de logica van het oorspronkelijke fragment een totaal andere semantische fundering kon krijgen.

Op een aantal van deze zaken zal nu beknopt worden ingegaan.

1.2.1 Individuele Termen

Naast termen met een lege extensie had Aristoteles ook individuele termen — termen zoals eigennamen die naar één object verwijzen — uitgesloten van het door hem bestudeerde fragment. Dat had een kentheoretische motivering: er zou geen werkelijke kennis mogelijk zijn over zulke objecten vanwege het vergankelijke karakter ervan.

Niet iedereen echter deelde Aristoteles' redenen om deze ook wel 'singulier' genoemde termen te verwaarlozen. Velen breidden de categorische taal uit tot een taal waarin ook singuliere termen en singuliere zinnen voorkwamen.

Bij een dergelijke uitbreiding staan er in principe twee verschillende wegen open: óf men behandelt singuliere termen als een apart soort termen en singuliere zinnen als een apart soort zinnen, óf men probeert singuliere zinnen zoveel mogelijk als algemene termen op te vatten in de hoop de logica van singuliere zinnen te herleiden tot die van 'algemene' termen.

De eerste weg werd ingeslagen door de renaissancefilosoof Hospinianus, en later ook gevold door Petrus Ramus(1515-1572) en zijn school. In deze traditie worden affirmatieve singuliere zinnen zoals 'Socrates is een filosoof 'u-zinnen' genoemd, terwijl negatieve singuliere zinnen 'y-zinnen' genoemd werden. De interpretatie $\mathbf{I}(\mathrm{a})$ van een singuliere term is dan, net als de interpretatie van een individuele constante uit de talen van de eerste orde predikatenlogica, een of ander object uit het discussiedomein $\mathbf{D}$. En de logische eigenschappen van singuliere zinnen liggen dan vast met de volgende twee semantische regels:

$\mathbf{V}_M(\mathrm{a}uP) = 1$ desda $\mathbf{I}(\mathrm{a}) \in \mathbf{I}(P)$.
$\mathbf{V}_M(\mathrm{a}yP) = 1$ desda $\mathbf{I}(\mathrm{a}) \notin \mathbf{I}(P)$.

Op deze weg zullen we hier niet verder ingaan omdat de tweede weg, filosofisch gezien, van grotere invloed is geweest. Hierboven werd die tweede weg gekarakteriseerd als de poging singuliere termen zoveel mogelijk als algemene termen te behandelen. Daarbij moet men bedenken dat de moderne onderscheiding tussen deze twee soorten termen niet altijd expliciet gemaakt werd.

Een standpunt dat in vele traditionele leerboeken — het eerst bij Duns Scotus (1266-1308) – wordt ingenomen is dat u-zinnen behandeld kunnen worden als a-zinnen, en y-zinnen als e-zinnen. Het idee hierachter is dat een zin als 'Socrates is een filosoof' synoniem is met 'Alwie Socrates is, is een filosoof' en een zin als 'Socrates is geen filosoof' synoniem is met 'Niemand die Socrates is, is een filosoof'. Nu is er is niets mis met de gelijkstelling van 'Socrates is een filosoof' met 'Alwie Socrates is, is een filosoof' mits men het eerste optreden van 'is' in in de laatste zin maar opvat als een identificerend 'is' en niet als een predicerend 'is'. (In de taal van de predikatenlogica zou de vertaling worden $\forall x(x = s \to Fx)$ en niet $\forall x(Sx \to Fx)$). Helaas werd dat onderscheid niet gemaakt.

Een enkele filosoof, Petrus Hispanus (c1205-1277)—ook bekend als paus Johannes XXI — bijvoorbeeld, herleidde in zijn *Summulae Logicales*, het standaard leerboek logica voor de late Middeleeuwen, singuliere zinnen tot particuliere. Maar ook dat loopt mis. Sterker, het is niet moeilijk in te zien dat de logica van u- en y-zinnen op geen enkele wijze te herleiden is tot die van a-, e-,i-,of o-zinnen. Voor een dergelijke herleiding staan in principe vier mogelijkheden ter beschikking.

(i) de logica van u zinnen is die van a-zinnen
de logica van y-zinnen is die van e-zinnen
(ii) de logica van u-zinnen is die van a-zinnen
de logica van y-zinnen is die van o-zinnen
(iii) de logica van u-zinnen is die van i-zinnen
de logica van y-zinnen is die van e-zinnen
(iv) de logica van u-zinnen is die van i-zinnen
de logica van y-zinnen is die van o-zinnen

Een blik op het oppositievierkant leert dat mogelijkheden (i) en (iv) afvallen: een u-zin en de daarmee corresponderende y-zin zijn contradictoir, en niet contrair of subcontrair. Mogelijkheid (iii) identificeert de logica van u-zinnen met die van i-zinnen. Dat dit niet correct is moge blijken uit het feit dat zo met de intuïtief *geldige* redenering in de derde figuur

Jan is een filosoof
<u>Jan is een warhoofd</u>
Sommige warhoofden zijn filosoof

een *ongeldig* syllogisme

MiP
$\underline{MiS}$
SiP

blijkt te corresponderen.

Rest nog mogelijkheid (ii). Bekijk de zin ‘Jan is niet een non-warhoofd’. Deze is van de vorm j$y\bar{P}$. Bovendien is deze bewering equivalent met ‘Jan is een warhoofd’ oftewel juP. Het is echter niet zo dat $Jo\bar{P}$ logisch equivalent is met JaP. Met andere woorden: ook mogelijkheid (ii) blijkt te falen.

De conclusie die we hieruit moeten trekken, is dat de logica van singuliere zinnen onherleidbaar is tot die van universele en particuliere zinnen. Tot deze conclusie was Hospinianus al gekomen, maar ze werd door de meeste filosofen veronachtzaamd.

1.2.2 Generische Termen en Essentialisme

Vergelijk de eerste van de volgende zinnen met de twee erna.

1. *Tijgers zijn zwart-geel gestreept.*
2. *Alle tijgers zijn zwart-geel gestreept.*
3. *De meeste tijgers zijn zwart-geel gestreept.*

In zin 2 en 3 wordt het meervoud ’tijgers’ voorafgegaan door wat logici een kwantor noemen: uitdrukkingen als ’alle’, ’de meeste’, ’veel’, ’twaalf’, ’meer dan drie', 'geen', 'bijna honderd' etc. In zin 1 staat het meervoud alleen, vandaar de uitdrukking 'kaal meervoud'.

Zin 1 heeft niet dezelfde waarheidscondities als zin 2. Meer in het algemeen: zinnen van de vorm *Alle A's zijn B* laten geen uitzondering toe. Als je van mening bent dat alle A's de eigenschap B hebben dan zal je die mening moeten opgeven zodra je een *A* tegenkomt die de eigenschap B mist. Voor zinnen van de vorm *A's zijn B* geldt dat niet. Elke dierkunde-encyclopedie staat vol met zinnen als *Tijgers zijn zwart-geel gestreept*. Het loopt van *Adders zijn giftig* t/m *Wilde zwijnen leven in troepen*. Op de meeste van die regels zijn uitzonderingen te vinden, maar kennelijk is dat voor biologen nog geen reden om hun boeken te herschrijven.

Kan zin 1 dan over één kam geschoren worden met zin 3? Hebben zinnen van de vorm *A's zijn B* dezelfde waarheidscondities als zinnen van de vorm *De meeste A's zijn B*? Ook dat is niet zo. Beschouw:

4a. *Krokodillen sterven voor ze drie weken oud zijn.*

4b. *De meeste krokodillen sterven voor ze drie weken oud zijn.*

Geen bioloog zal 4a voor zijn rekening willen nemen. Toch is 4b waar. Hetzelfde geldt mutatis mutandis voor de volgende zinnen.

5a. *Mensen zijn heteroseksueel.*

5b. *De meeste mensen zijn heteroseksueel.*

Deze voorbeelden tonen aan dat een zin van de vorm *De meeste A's zijn B* soms acceptabel is, terwijl de kale meervoudsvorm *A's zijn B* dat niet is. Maar ook het omgekeerde lijkt voor te komen:

6a. *Ratten brengen de pest over.*

6b. *De meeste ratten brengen de pest over.*

7a. *Hollanders zijn goede zeelui.*

7b. *De meeste Hollanders zijn goede zeelui.*

8a. *Parijzenaars rijden als gekken.*

8b. *De meeste Parijzenaars rijden als gekken.*

Misschien bent u geneigd de zinnen 7a en 8a als louter vooroordelen te verwerpen. Wellicht doet u dat met als argument dat 7b en 8b onwaar zijn. Maar waarom 6a dan niet ook verworpen? 6b is net zo goed onwaar. En wat te denken van dit vooroordeel:

9. *Malariamuggen brengen malaria over.*

Per slot van rekening heten malariamuggen zo omdat ze malaria overbrengen. En dat terwijl verreweg de meeste van die beestjes helemaal geen drager zijn van de parasiet die voor malaria verantwoordelijk is.

Als zinnen van de vorm *A's zijn B* al waarheidscondities hebben, dan verschillen die van de waarheidscondities van *De meeste A's zijn B*. Dikwijls wordt het verschil gezocht in het onderscheid tussen de soort *A* en de verzameling individuele *A*'s die tot die soort behoren. De zin *Tijgers zijn zwart-geel gestreept* zegt in de eerste plaats iets over de zoogdiersoort Tijger, zo stelt men dan. Het is aan de soort dat de eigenschap zwart-geel gestreept te zijn wordt toegeschreven; wat dat voor de exemplaren van de soort betekent is punt twee. In dit geval geldt toevallig dat de eigenschap in kwestie ook aan de meeste exemplaren van die soort toekomt. Maar in andere gevallen, denk aan het malariamuggenvoorbeeld, is dat niet zo. Een zin van de vorm *De meeste A's zijn B* daarentegen zegt in de eerste plaats iets over de verzameling individuele A's: de meeste elementen ervan hebben de eigenschap B. Het kan in voorkomende gevallen zo zijn dat die eigenschap B van de individuele A's naar de soort A overgedragen wordt, maar dat hoeft niet per se, zoals onder andere uit het krokodillenvoorbeeld blijkt.

Er is meer dat pleit voor het maken van een ontologisch onderscheid tussen 'soort' en 'exemplaar'. Merk op dat er predikaten zijn die wel zinvol van een soort gepredicеerd kunnen worden, maar niet van de exemplaren ervan. Zo is het zinvol om te zeggen *Tijgers zijn bijna uitgestorven*, maar *Shere Khan is bijna uitgestorven* is onzin.

Anderzijds zal duidelijk zijn dat het maken van dit onderscheid hooguit een eerste stap op weg naar de uiteindelijke oplossing van het probleem kan zijn. Als aan de soort A de eigenschap B toekomt, dan moet dat toch iets te maken hebben met de individuen die tot die soort behoren. Het mag dan verkeerd zijn dat iets te zoeken in het toevallige aantal A's met de eigenschap B - alle A's?, de meeste A's?, veel A's? - dat wil nog niet zeggen dat er helemaal geen verband zou zijn. Per slot van rekening kunnen wij onze kennis over zo'n abstract object als een soort alleen maar verwerven via de concrete objecten die ertoe behoren.

Dat het hier slechts om een eerste stap gaat, blijkt ook uit het feit dat hij nauwelijks enig inzicht verschaft in het logische gedrag van kale meervoudszinnen. Beschouw bijvoorbeeld de volgende redenering:

Hollanders zijn goede zeelui.
____
Hollanders zijn zeelui.

En vergelijk die met:

Michiel is een goede zeeman.
____
Michiel is een zeeman.

De tweede redenering is geldig, de eerste niet. Men kan best de premisse van de eerste redenering onderschrijven zonder dat met de conclusie te willen doen. Een goede logische theorie voor kale meervouden zou een handvat bieden voor een verklaring, maar de bovenstaande doet dat niet. Kennelijk is het heel iets anders om een eigenschap toe te schrijven aan een abstracte soortelijke entiteit dan aan een concreet object. Anders zou met de tweede redenering ook de eerste geldig worden. Maar wat het verschil tussen deze twee manieren van prediceren is, blijft vooralsnog onduidelijk.

Filosofen gebruiken graag generische zinnen, zij het dat ze in plaats van een kaal meervoud liever nog een lidwoord van bepaaldheid hanteren. In plaats van

Mensen zijn rationele wezens.

zeggen ze liever

De mens is een rationeel wezen.

Uit de literatuur is duidelijk dat men zo'n generische zin *De A is B* in het algemeen niet equivalent acht met de universele zin *Alle A zijn B*, en ook niet met *De meeste A's zijn B*. Maar wat precies het verschil is wordt helaas niet duidelijk. Om hiervan een beeld te geven volgt nu een beknopt overzicht van de ontstaansgeschiedenis van generische termen.

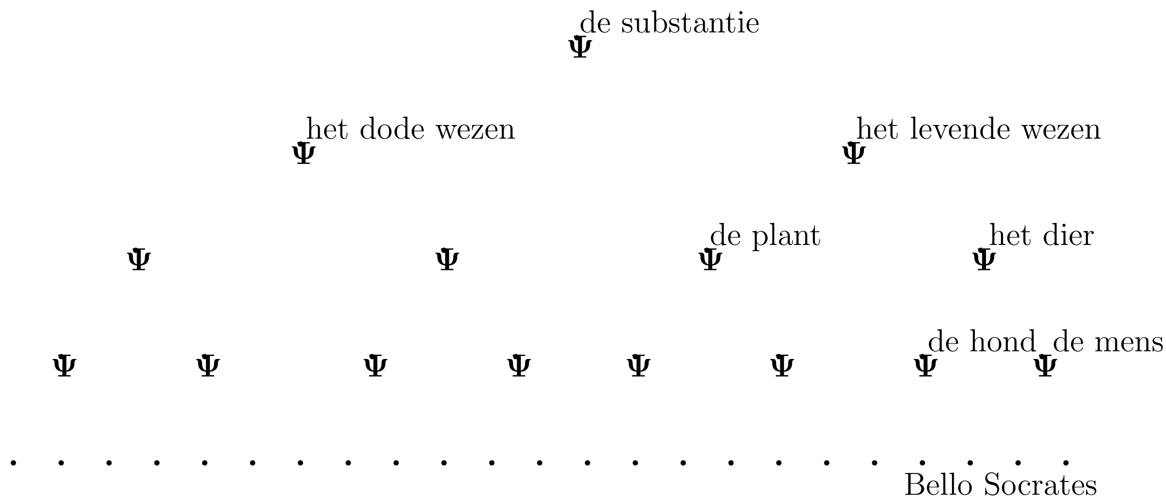
Plato maakte gebruik van een technische taal waarbinnen hij aan het vocabulair van algemene termen een verzameling toevoegde die hij van de algemene termen afleidde door de enkelvoudsvorm van zo'n algemene term vooraf te laten gaan door het lidwoord van bepaaldheid en te laten volgen door het woordje 'zelf'. De interpretatie van zo'n complexe term was een *idee* en niet de verzameling van alle entiteiten waarvan de oorspronkelijke term naar waarheid geprediceerd kon worden. Dit soort termen kan wellicht als de oorsprong van van generische termen worden beschouwd.

Aristoteles maakte veelvuldig gebruik van de enkelvoudsvorm vorm van algemene termen zonder daarmee een individu uit de extensie van die term te willen aanduiden. Hem gaat het om de *soort* te benoemen waartoe al de individuen uit de extensie van de term behoorden.

Omdat Aristoteles zich op diverse plaatsen expliciet afzet tegen Plato's ideeënleer zijn de commentatoren van Aristoteles er meestal van uitgegaan dat de interpretatie van de termen waarmee Aristoteles soorten aanduidde geen ontologische zelfstandigheid toekwam, maar dat die termen verwijzen naar wat dan het enige alternatief lijkt te zijn: de verzameling van entiteiten waarvan ze geprediceerd kunnen worden. (Wij hebben in het voorgaande deze standaardinterpretatie gevolgd).

Toch kan dit niet Aristoteles' opvatting geweest zijn. In de *Categorieën* verdeelt hij alle bestaande entiteiten in verschillende groepen. Tot de categorie van de ontologisch zelfstandige entiteiten, de categorie der *substanties*, blijken bijvoorbeeld niet alleen individuele mensen te behoren (als zijnde *primaire* of ontologisch meest zelfstandige substanties), maar ook De Mens en Het Dier (zijnde *secundaire* of afgeleide substanties. Over de relatie tussen een primaire substantie als deze mens Socrates en en een secundaire substantie als De Mens zegt Aristoteles expliciet dat deze hetzelfde is als die tussen een secundaire substantie als De Mens en een secundaire substantie als Het Dier.

Echter, wanneer we, zoals meeste moderne Aristoteles commentatoren voorstellen, als interpretatie van generische termen deelverzamelingen van het discussiedomein zouden nemen, dan is duidelijk dat de relatie tussen een individu en zijn soort een andere is dan tussen een soort en zijn genus. In het eerste geval gaat het om de relatie 'element zijn van' en in het tweede geval om de relatie 'deelverzameling van'. Wat Aristoteles voor ogen stond is wellicht het best uit te leggen aan de hand van een plaatje.



Aan de basis van deze ontologische hiërarchie bevinden zich de primaire substanties, die alle *exemplificaties* zijn van verschillende secundaire substanties. Zo is Socrates een exemplificatie van De Mens, en Bello van De Hond. Socrates en Bello zijn allebei exemplificaties van Het Dier. De Mens is ook een exemplificatie van Het Dier, en Het Dier en De Mens zijn allebei exemplificaties van Het Levende Wezen.

Een secundaire substantie wordt ook wel een *species* (Latijn voor: *'soort'*) genoemd. En als een species een exemplificatie is van een ander species, dan heet die tweede species ook wel een *genus*, (Latijn voor: *geslacht*) van de eerste. In het plaatje ziet u dat elk species precies één *genus proximum* heeft, een 'dichtstbijzijnde genus'. Voor De Mens is dat Het Dier, en voor De Hond ook.

In plaats van *'x is een exemplificatie van y'* kun je ook zeggen *'y is een essentie van x'*. Daarbij geldt, zoals aangegeven in het plaatje, dat secundaire substanties essenties van zichzelf zijn, maar primaire substanties niet. Aristoteles was van namelijk mening dat alleen entiteiten waarvan een definitie te geven is, essenties kunnen zijn (*Metaphysica Z, 1030 a 6-13)*). En omdat primaire substanties een samenstel waren van van onkenbare materie enerzijds en vorm (i.e. speciesvorm) anderzijds, kon er volgens hem van deze geen definitie gegeven worden. Anders lag dat bij de secundaire substanties, de species en de genera. Hiervan zijn wel definities te geven. Daarbij had Aristoteles een heel specifiek soort definities op het oog. Om te begrijpen hoe die eruit zagen dient u te weten dat Aristoteles naast de categorie van de substantie nog verschillende andere categorieën onderscheidde. De belangrijkste daarvan is de categorie der kwaliteiten. Kwaliteiten hebben als belangrijkste eigenschap dat ze al dan niet als eigenschap kunnen toekomen aan primaire en secundaire substanties. Denk aan begrippen als 'wit', 'rationeel','sterfelijk'. Het zijn eigenschappen die in tegenstelling tot substantiële' eigenschappen als 'hond' en 'mens' niet ontologisch zelfstandig zijn; ze hebben een drager nodig.

In aristotelische definities spelen kwaliteiten een belangrijke rol. Aristoteles streefde er namelijk naar om van elk species een zogenaamde *definitio per genus proximum et differentiam specificam* te geven, een definitie waarin een species wordt vastgelegd door de substantie die als genus proximum geldt te noemen plus de kwaliteit die de species in kwestie onderscheidt van alle andere species met hetzelfde genus proximum. 'De Mens is het rationele dier' is het schoolvoorbeeld van zo'n definitie.

De hierboven geschetste ontologische denkbeelden hebben een enorme invloed — 'impact' is misschien een beter woord — op het filosofisch denken gehad. Elke filosoof die van deze ontologie uitgaat zal een aantal belangrijke vragen moeten behandelen. Zo zul je, als je een onderscheid maakt tussen substantie en kwaliteit over criteria moeten beschikken om te bepalen of een bepaalde eigenschap nu 'substantieel' is of niet. Met 'ontologische zelfstandigheid' als uitgangspunt kom je niet ver. Neem de eigenschap 'vrouw' of 'chinees' of 'filosoof' of 'cirkel'. Aristoteles zou alleen 'de cirkel' als secundaire substantie toelaten, maar niet iedere filosoof trekt de grens op dezelfde plaats.

Veel belangrijker nog: als je secundaire substanties toelaat als zelfstandige entiteiten, dan zul je antwoord moeten geven op de vraag hoe je kennis kunt verwerven over die entiteiten. Het is op dit punt dat fundamentele verschillen tussen filosofische scholen aan de dag treden. Aristoteles, en in zijn voetspoor alle empiristisch geïnspireerde filosofen denken hier "bottom up", terwijl iemand als Plato, en in zijn voetspoor alle meer rationalistisch geïnspireerde filosofen "top down" denken.

Met "bottom up denken" bedoel ik dit: kennis over secundaire substanties verkrijg je langs *indirecte* weg. Directe kennis kun je alleen over primaire substanties krijgen, en dit middels je vijf zintuigen. Blijkt in je onderzoek dat een bepaalde eigenschap P toekomt aan alle primaire exemplificaties van een of andere secundaire substantie S, dan mag je concluderen tot '*de S is P*, en dan kun je van die primaire substanties zelf zeggen dat ze *essentieel P* zijn. Zo is het een essentiële eigenschap van Socrates dat hij sterfelijk is. Immers, Socrates is een exemplificatie van de secundaire substantie 'mens' en alle mensen zijn sterfelijk. Maar het is geen essentiële eigenschap van Socrates dat hij filosoof is. Dit omdat Socrates 'in de eerste plaats'[2] mens is, en niet alle mensen zijn filosoof.

Voor de "top down" denkers liggen deze zaken heel anders. Volgens hen is het wel degelijk mogelijk directe kennis te verkrijgen over secundaire substanties, al geven de verschillende filosofische scholen die dat vinden ieder hun eigen antwoord op de vraag hoe dat precies in zijn werk gaat. Volgens Plato herinneren we ons de idiële werkelijkheid uit een eerdere bestaansvorm, Descartes geloofde in aangeboren ideeën, de fenomenologen schouwen de 'zuivere' begrippen via een

2. De toevoeging 'in de eerste plaats' is hier cruciaal. Er wordt mee bedoeld dat Socrates — althans volgens Aristoteles — direct onder de species 'mens' valt; er zit geen andere secundaire substantie tussen.

speciale door hen ontwikkelde methode. Ook wordt in dit verband wel eens een beroep gedaan op goddelijke verlichting en dikwijls is er een speciale rol weggelegd voor een soort zesde zintuig, de intuïtie, waarmee we op een of andere manier kunnen 'zien' wat er in het rijk van de secundaire substanties aan de hand is.

Hoe dit ook zij, ook voor de top down denkers is het zo dat als je eenmaal geconstateerd hebt dat de secundaire substantie S de eigenschap P heeft, mag concluderen dat P een essentiële eigenschap is van alle primaire entiteiten die exemplificaties van S. Maar — en hier gaat het om — anders dan bij Aristoteles en de zijnen hoeft dat nog niet te betekenen dat deze primaire S de eigenschap P werkelijk toekomt hebben. Uit de *De mens is goed* mag je concluderen tot *Jan is in wezen goed*, ook al heeft hij misschien in werkelijkheid de gruwelijkste misdaden begaan. De fenomenale wereld is nu eenmaal onvolmaakt. In deze wereld bestaan er geen perfecte rechthoekige driehoeken, en ook is het onmogelijk een volkomen rechte lijn te trekken. Wiskundige waarheden hebben betrekking op de zuivere ideeën wereld, en kunnen in fenomenale werkelijkheid hoogstens benaderd worden. Zo[3] is het ook gesteld met de individuele mensen, die slechts onvolmaakte afspiegelingen zijn van van de idee mens. Individuele mensen belichamen weliswaar zo'n idee, maar, bezwangerd als ze zijn met materie brengen ze hun essentiële kenmerken niet altijd optimaal naar buiten.

Merk op: binnen het platonistische denkraam functioneert een secundaire substantie *de S* vaak als norm of voorbeeld voor de concrete individuen eronder vallen. "De vrouw is een zorgend wezen" schreef de fenomenoloog Buytendijk, en "In het vrouwelijke bestaan ontmoeten wij in het verzorgen de zedelijke eis der belangeloze liefde, de overgave, het offer". Toen dit inzicht hem niet in dank werd afgenomen, voegde hij eraan toe "Het is blijkbaar aan menig lezeres ontgaan dat mijn onderzoek het *vrouwelijke in de vrouw* betreft zoals dat zich uit de aanleg in een gunstig milieu *kan* ontwikkelen".[4] Met andere woorden: De zin 'De vrouw is een zorgend wezen' kan waar zijn', terwijl toch veel vrouwen in het dagelijks leven deze zorgende instelling missen. In dat geval is er iets misgegaan, de omstandigheden ter ontplooiing van de vrouwelijke essentie waren kennelijk niet optimaal.

Het zal duidelijk zijn wat het grote probleem van deze vorm van essentialisme is. Uitspraken van de vorm *De S is P* zijn in deze opvatting niet empirisch verifieerbaar of falsifieerbaar. Wie zo'n uitspraak wil bekritiseren staat met lege handen. Intersubjectieve toetsingscriteria ontbreken. Het is de 'intuïtie' van de een tegenover de 'intuïtie' van de ander. Men hoeft de ander maar een slecht 'geheugen', te weinig goddelijke verlichting, of een gebrekkige fenomenologische

---

3. In hoofdstuk 3 zullen we zien dat er op de premisse van deze analogieredenering van alles aan te merken is. Met andere woorden: Plato's opvattingen over filosofie zijn geïnspireerd door zijn opvattingen over wiskunde, maar de die opvattingen over wiskunde waren op zijn zachtst gezegd nogal naïef.

4. F.J.J. Buytendijk, *De Vrouw. Haar natuur, verschijning en bestaan. Een existentieel-psychologische studie*, tiende druk, Utrecht 1953, bladzijde 7 en verder.

aanleg te verwijten en de kritiek is gepareerd.[5]

5. Dit hoofdstuk is een bewerking van een oudere syllabus over Traditionele Logica die ik samen met Jeroen van Rijen geschreven heb.

Hoofdstuk 2

Meer over relaties

Vergeleken met de talen van de eerste orde predikatenlogica hebben de categorische talen uit het voorgaande hoofdstuk een zeer beperkte uitdrukkingskracht. Probeer maar eens met categorische middelen het verschil tussen de zin *'Alles heeft een oorzaak'* en de zin *'Er is iets is dat oorzaak van alles is'* weer te geven. In de taal van de eerste orde predikatenlogica kan de eerste zin vertaald worden met een formule van de vorm $\forall x \exists y Oyx$ — en iedereen die een cursus eerste orde logica heeft gelopen, weet dat die wel te onderscheiden is van de formule $\exists y \forall x Oyx$. Maar categorische talen kennen geen relationele predikaten, alleen 'eenplaatsige' termen, en in categorische zinnen komen geen geneste kwantoren voor.

Deze gebrekkige uitdrukkingskracht maakt dat categorische talen ten enen male ongeschikt zijn voor het analyseren van wetenschappelijk taalgebruik. Geen wonder dat de logica als vak met de opkomst van de moderne natuurwetenschap na de renaissance in een isolement raakte, en daar pas weer uit kon komen na de uitvinding van de eerste orde predikatenlogica door Frege.

U heeft al kennis gemaakt met tweeplaatsige predikaten, en de relaties die ze uitdrukken. U weet dat sommige relaties *symmetrisch* zijn en andere *asymmetrisch*, u kent ook de noties *antisymmetrisch*, *reflexief*, *irreflexief*, *transitief*, en *samenhangend*. Maar u heeft nog niet echt gezien waar al die noties goed voor zijn. Dit hoofdstuk hoopt u daar iets meer inzicht in te geven.

2.1 Equivalentierelaties en abstractie

Vergelijk de zinnen in de linkerkolom met die uit de rechterkolom:

Jan is even lang als Piet	de lengte van Jan = de lengte van Piet
Jan is even zwaar als Piet	het gewicht van Jan = het gewicht van Piet
lijn l is evenwijdig met lijn m	de richting van l = de richting van m
△ ABC is congruent met △ DEF	de gedaante van △ ABC = de gedaante van △ DEF
'vrijgezel' is synoniem met 'ongehuwde volwassene'	de betekenis van 'vrijgezel' = de betekenis van 'ongehuwde volwassene'
Algemeen:	
x is even A als y	de A-heid van x = de A-heid van y

In de linkerkolom worden *concrete* objecten met elkaar vergeleken: Jan en Piet, de lijn l met de lijn m, driehoek ABC en driehoek DEF, de uitdrukking 'vrijgezel' en de uitdrukking 'ongehuwde volwassene'. Van deze paren van objecten wordt beweerd dat ze in een bepaalde relatie met elkaar staan: ze zijn even .... Wat de verschillende relaties uit de linkerkolom met elkaar gemeen hebben is dat het zogenaamde *equivalentierelaties* zijn:

Definitie 2 (Equivalentierelatie) Een relatie E is een *equivalentierelatie* desda E reflexief, transitief en symmetrisch is.

Wat de zinnen uit de rechterkolom met elkaar gemeen hebben is dat ze een identiteit uitdrukken. Het zijn echter allesbehalve concrete objecten die gelijk worden gesteld: Jans lengte en Piets lengte, Jans gewicht en Piets gewicht. In de rechterkolom gaat het om relatief gezien abstracte begrippen als 'lengte', 'gewicht', 'gedaante', 'betekenis'.

De zinnen uit de linkerkolom en de corresponderende zinnen uit de rechterkolom zijn onderling verwisselbaar. We hebben ze hier naast elkaar hebben gezet, omdat ze aangeven langs welke weg abstracte begrippen tot stand gebracht kunnen worden. De abstracte kenmerken van ieder object afzonderlijk —zijn lengte, gewicht, vorm – blijken afgeleid te zijn van de concrete relaties die dat object met andere objecten onderhoudt. Hieronder zullen we dat nader uitwerken.

Definitie 3 (Equivalentieklasse) Zij E een equivalentierelatie op het domein $\mathbf{D}$. Zij d een element van $\mathbf{D}$. We definiëren:

$$[d]_E = \text{ de verzameling van alle } d' \text{ in } \mathbf{D} \text{ waarvoor geldt dat } Ed'd.$$

De verzameling $[d]_E$ heet 'de equivalentieklasse gegenereerd door d', en bestaat uit alle objecten waarmee d in de relatie E staat.

Stelling 3 Laat E een equivalentierelatie op het domein $\mathbf{D}$ zijn. Dan geldt: elk element van **D** is element van precies één equivalentieklasse.

Bewijs Elk element van **D** is element van van minstens één equivalentieklasse. Immers, de relatie E is reflexief, derhalve geldt Edd voor elke d, en met bovenstaande definitie volgt dan dat d element is van $[d]_E$.

Elk element van **D** is element van van hoogstens één equivalentieklasse. Neem aan dat a element is van $[b]_E$ én van $[c]_E$. We moeten bewijzen dat deze beide equivalentieklassen identiek zijn. Dat wil zeggen: we moeten bewijzen dat beide equivalentieklassen dezelfde elementen hebben.

Welnu beschouw een willekeurig element x uit $[b]_E$. Op grond van bovenstaande definitie geldt dat Exb. Ook geldt dat Eab, en op grond van de *symmetrie* van E dus ook dat Eba. Uit het feit dat Exb en Eba volgt onder toepassing van de *transitiviteit* van E dat geldt dat Exa. Dit laatste samen met het feit dat Eac levert vanwege dezelfde transitiviteit dat Exc. Met andere woorden x is ook element van $[c]_E$. Op dezelfde manier kun je bewijzen dat een willekeurig element van de equivalentieklasse van c ook element is van de equivalentieklasse van b.

Uit bovenstaande stelling volgt nu haast onmiddellijk dat voor een willekeurige equivalentierelatie E het volgende geldt:

$$Eab \text{ desda } [a]_E = [b]_E.$$

En dit is — maar nu in precieze termen — het *abstractiebeginsel* dat de overstap van zinnen uit de linkerkolom naar zinnen uit de rechterkolom mogelijk maakt. Het stelt ons in staat objecten die in een bepaalde equivalentierelatie met elkaar staan tot op zekere hoogte te identificeren. Uitgaande van een equivalentierelatie 'even A als' kunnen we een abstract begrip 'A-heid' invoeren, waarbij we ons de A-heid van een object a kunnen voorstellen als de verzameling objecten die even A zijn als a.

Omgekeerd kunnen we stellen dat zulke abstracte begrippen als 'lengte', 'gewicht', 'betekenis', 'aantal', wortelen in zulke concrete relaties als 'even lang', 'even zwaar' etc. Het abstractie beginsel geeft een recept om dergelijke abstracte begrippen te analyseren.

Merk op dat 'abstraheren' in deze zin niets te maken heeft met 'weglaten', 'wegdenken', of 'veronachtzamen'. In de traditionele pre-fregeaanse logica werd abstractie wel in deze laatste zin opgevat. (Men moest wel want in de theorie was geen plaats voor relationele begrippen). Het beeld dat men had van het introduceren van abstracte begrippen als 'lengte' was dit: laat a een willekeurig fysisch object zijn. Als we nu de dikte, de kleur, het gewicht, het materiaal en zo nog een stel kenmerken van a — de moeilijkheid met de traditionele opvatting is nu juist dat men niet precies kon aangeven welke kenmerken allemaal — wegdenken, dan houden we een object a' over dat nog maar één kenmerk heeft. Dit object noemen we de lengte van a.

Tegenwoordig denken we geen dingen meer weg. We denken er dingen bij: neem alle objecten die even lang zijn als a. De verzameling die dan ontstaat gedraagt zich precies zo als je dat van de lengte van a zou willen.

Terzijde Waar een equivalentierelatie is, is dikwijls ook een comparatieve relatie. Bij 'even warm als' hoort 'warmer dan', bij 'even zwaar' hoort 'zwaarder dan' In het algemeen bij 'even ... als' hoort '...-er dan'. Twee relaties C en E bepalen een *comparatieve ordening* als aan de volgende voorwaarden voldaan is:
(i) C is transitief;
(ii) C is asymmetrisch;
(iii) C is co-transitief, d.w.z $\forall x \forall y \forall z((\neg Cxy \wedge \neg Cyz) \rightarrow \neg Cxz)$
(iv) E is te definiëren als $\forall x \forall y(Exy \leftrightarrow (\neg Cxy \wedge \neg Cyx))$

Opgave 7 Bewijs dat E, gedefinieerd als in (iv), gezien de eigenschappen van C inderdaad een equivalentierelatie is.

Wie geïnteresseerd is in begripsvorming, en zich bijvoorbeeld afvraagt hoe het komt dat sommige zaken *kwantificeerbaar* zijn en andere niet, en precies wil weten wat voor eigenschappen een begrip — denk aan 'intelligentie' bijvoorbeeld — moet hebben wil het *meetbaar* zijn, die zal nog vaak comparatieve ordeningen tegenkomen. Tijd, massa, temperatuur — aan al die begrippen ligt een comparatieve ordening ten grondslag.

2.2 Getal en Oneindigheid

We gaan nu een bijzonder geval bekijken van definitie door abstractie, namelijk de definitie van het begrip 'getal' uit het begrip 'evenveel', zoals dat eind vorige eeuw door Frege en Cantor (onafhankelijk van elkaar) ontwikkeld is. Het bijzondere van die definitie is dat ze niet alleen een manier geeft om grip te krijgen op de getallen die we gebruiken om eindige hoeveelheden te karakteriseren, maar ook toegang geeft tot het oneindige, en een oplossing biedt voor de paradoxen waar het begrip 'oneindig' aanleiding toe heeft gegeven.

Aan de basis van deze onderneming staat het begrip *bijectie*. Wat dat is wordt wellicht duidelijk met een eenvoudige voorbeeld. Beschouw de verzameling V van alle getrouwde vrouwen en de verzameling M van alle getrouwde mannen (beide in Nederland). Door middel van de relatie 'getrouwd zijn met' kunnen we een verband leggen tussen deze twee verzamelingen met de volgende karakteristieke eigenschappen:
(i) Bij ieder element a van de verzameling V hoort precies één element b van de verzameling M zodanig dat a getrouwd is met b.
(ii) Bij ieder element b van de verzameling M hoort precies een element a van de verzameling V zodanig dat b getrouwd is met a.

Het zijn deze twee eigenschappen die maken dat we de relatie ‘getrouwd zijn met’ een bijectie tussen de verzameling V en de verzameling M kunnen noemen.[1]

Preciezer: In een model $\langle \mathbf{M}, \mathbf{I} \rangle$ is de interpretatie van het binaire predikaat R een bijectie tussen de interpretaties van de unaire predikaten A en B, indien de volgende zinnen waar zijn:

(i) $\forall x \forall y(Rxy \to (Ax \wedge By))$;
(ii) $\forall x(Ax \to \exists! yRxy)$;
(iii) $\forall x(Bx \to \exists! yRyx)$.

In een plaatje kunnen we een dergelijke bijectie weergeven door middel van een serie dubbele pijltjes. Stel dat in het onderhavige geval Marie getrouwd is met Jan, Anja met Piet, Beatrix met Claus, Jossie met Fred, etc., dan krijgen we het volgende plaatje:

Marie	Anja	Beatrix	Jossie	… …
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
Jan	Piet	Claus	Fred	… …

Ander voorbeeld: Als in een zaal iedere stoel bezet is, dan bestaat er tussen de mensen in die zaal en de stoelen in die zaal een bijectie, middels de relatie ‘zitten op’.

Jan	Piet	Klaas	Marie	…
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
de rode stoel	de witte stoel	de stoel links vooraan	de stoel met de kapotte poot	…

Merk op: je weet in het bovenstaande geval dat er *evenveel* stoelen als mensen in de zaal zijn, maar om dat te weten te komen heb je noch de mensen, noch de stoelen hoeven tellen.

Merk ook op dat het best mogelijk is dat er tussen twee verzamelingen meerdere bijecties bestaan. (Als er twee mensen van plaats verwisselen ontstaat een andere bijectie).

Definitie 4 (Gelijkmachtig) Voor verzamelingen A en B geldt dat A *gelijkmachtig* is met B dan en slechts dan als er een bijectie tussen A en B bestaat.

Het begrip ‘gelijkmachtigheid’ werd door Cantor ingevoerd als de theoretische uitwerking van de notie van ‘even groot’. Dat twee verzamelingen van gelijkmachtigheid zijn wil zoveel zeggen als dat de twee verzamelingen in kwestie ‘even groot’ zijn, of ‘evenveel elementen hebben’. Merk op: de notie zegt niets over de ‘absolute grootte’ — het aantal elementen — van deze verzamelingen.

1. Een en ander in de vooronderstelling dat er in Nederland geen bigamie voorkomt.

Wil 'het bestaan van een bijectie' kwalificeren als een definitie van 'evenveel' dan zal het op zijn minst een equivalentierealtie moeten zijn (in het domein van alle verzamelingen). Dat klopt. Ten eerste is de gelijkmachtigheidsrelatie *reflexief*. Voor elke verzameling A geldt dat er een bijectie bestaat tussen A en A: neem de identiteitsrelatie. Ook is de relatie *symmetrisch*, als R een bijectie is tussen A en B, dan is de 'omgekeerde' relatie $\tilde{R}$ — gedefinieerd als: $\tilde{R}xy$ desda Ryx — een bijectie tussen B en A. Tenslotte is de relatie ook *transitief*. Als er een bijectie bestaat tussen A en B, en ook een tussen de B en C, dan ook tussen A en C. Je kunt de twee gegeven bijecties immers aan elkaar koppelen. Preciezer: als R en S de betreffende bijecties tussen A en B en tussen B en C zijn, dan met T gedefinieerd als $Txy \leftrightarrow \exists z(Rxz \wedge Szy)$ een bijectie tussen A en C gegeven.

Beschouw nu de volgende bijectie:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots\;\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots\;\ldots \end{array}$$

Hier is een bijectie geschetst tussen de natuurlijke getallen, $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, en de positieve natuurlijke getallen, $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. Volgens onze definities betekent dit dat deze verzamelingen evenveel elementen hebben. Maar de tweede is een echte deelverzameling van de eerste! Stel je voor: je hebt een aantal dingen, je gooit een ervan weg, en toch houd je evenveel dingen over — dat is toch raar!

Het kan nog raarder:

Opgave 8 Bewijs de volgende beweringen:

(a) De verzameling natuurlijke getallen, $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, is gelijkmachtig met de verzameling *even* natuurlijke getallen; $\{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$.

(b) De verzameling van de gehele getallen, $\{\ldots, -3 - 2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$, is gelijkmachtig de verzameling van de natuurlijke getallen.

Galilei had lang voor Cantor al bedacht dat de notie 'evenveel' te definiëren is in termen van het bestaan van een bijectie, maar voor hem waren de bovenstaande resultaten zo paradoxaal dat hij de toepassing op oneindige verzamelingen verwierp. Voor Cantor en Frege was die toepassing op het oneindige juist het aantrekkelijke. Sterker, je zou 'oneindig groot' zelfs kunnen definieren door te stellen: Een verzameling is oneindig groot desda als hij gelijkmachtig is met een echte deelverzameling van zichzelf'.

Hebben alle oneindige verzamelingen nu evenveel elementen? Of zijn er gradaties in oneindigheid? De bovenstaande resultaten doen u wellicht vermoeden dat het eerste het geval is, en het volgende voorbeeld versterkt dat vermoeden wellicht nog.

Stelling 4 Er zijn evenveel natuurlijke getallen als rationale getallen.

Voor de goede orde: rationale getallen zijn getallen die te schrijven als een breuk, bijvoorbeeld 1/4, -2/3, 298563/348, etc. Het verrassende van de stelling zit hem hierin dat bij een normale rangschikking naar grootte er tussen elke twee natuurlijke getallen oneindig veel rationale getallen liggen. Dat suggereert dat er veel en veel meer rationale getallen zijn dan natuurlijke getallen. Echter, je kan de rationale getallen ook nog op andere wijzen rangschikken, en in het bewijs van de stelling gebeurt dat ook.

Bewijs We beperken ons ertoe te laten zien dat er een bijectie bestaat tussen $\mathbb{N}^2$ en $\mathbb{N}$, d.w.z. de verzameling van alle geordende paren van natuurlijke getallen en natuurlijke getallen. (Merk op dat je een breuk kan zien als een geordend paar van natuurlijke getallen).

Beschouw het volgende plaatje:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\dots & & & & & & & & \\
9 & & & & & & & & \\
\langle 0,3\rangle & & \dots & & & & & & \\
 & \nwarrow & & & & & & & \\
5 & & 8 & & & & & & \\
\langle 0,2\rangle & & \langle 1,2\rangle & & \dots & & & & \\
 & \nwarrow & & \nwarrow & & & & & \\
2 & & 4 & & 7 & & & & \\
\langle 0,1\rangle & & \langle 1,1\rangle & & \langle 2,1\rangle & & \dots & & \\
 & \nwarrow & & \nwarrow & & \nwarrow & & & \\
0 & & 1 & & 3 & & 6 & & \\
\langle 0,0\rangle & & \langle 1,0\rangle & & \langle 2,0\rangle & & \langle 3,0\rangle & & \dots
\end{array}
$$

Elk paar $\langle n,m\rangle$ is ergens in het bovenstaande 'rooster' terug te vinden. Wanneer we nu dat rooster doorlopen op de wijze die de pijlen aangeven, en bij elk 'volgende' roosterpunt het volgende natuurlijke getal zetten, dan verkrijgen we een bijectie tussen $\mathbb{N}^2$ en $\mathbb{N}$.

(Als u het preciezer wil: Het punt $\langle m,n\rangle$ ligt op de $(m+n+1)^e$ antidiagonaal, de nul-diagonaal meegeteld. Voor een willekeurig punt $\langle m,n\rangle$ zijn er dus $(m+n)$ complete antidiagonalen. Op deze diagonalen liggen $1+2+\ldots+(m+n)$, ofwel $\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)$ punten. Het punt $\langle m,n\rangle$ wordt op zijn eigen antidiagonaal nog voorafgegaan door n punten. En dus wordt $\langle m,n\rangle$ voorafgegaan door precies $\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+n$ punten. Wanneer we nu R definiëren als de relatie die aan elk paar $\langle m,n\rangle$ het getal $\frac{1}{2}(m^2+2mn+n^2+m+3n)$ toevoegt, dan is R een bijectie tussen $\mathbb{N}^2$ en $\mathbb{N}$. (Deze bijectie beeldt een willekeurig punt $\langle m,n\rangle$ af op het aantal punten dat aan $\langle m,n\rangle$ vooraf gaat als we $\mathbb{N}^2$ ordenen op de wijze die in bovenstaande figuur wordt weergegeven.)

Na het bovenstaande lijkt het dat het antwoord op de vraag of er überhaupt oneindige verzamelingen bestaan die niet gelijkmachtig zijn met de natuurlijke getallen ontkennend zal zijn. Maar nee, er zijn meerdere soorten van oneindigheid. De volgende stelling geeft hier uitsluitsel over.

Stelling 5 Zij A een willekeurige verzameling. Er is geen bijectie tussen A en en de machtsverzameling van A, i.e. $\{X \mid X \subseteq A\}$.

Bewijs Uit het ongerijmde. Neem aan dat er een bijectie R bestaat tussen A en $\{X \mid X \subseteq A\}$.

Beschouw de verzameling B gedefiniëerd als:

$$B = \{z \in A \mid z \notin V \text{ voor de unieke } V \text{ zodanig dat } RzV\}$$

Er geldt dat $B \subseteq A$, en omdat R een bijectie is moet gelden dat er een $u \in A$ bestaat zodanig dat RuB. Maar dan geldt op grond van de definitie van B dat:

$$u \in B \Longleftrightarrow u \notin V \text{ voor de unieke } V \text{ zodanig dat } RuV.$$

En op grond van het feit dat RuB dat:

$$u \in B \Longleftrightarrow u \in V \text{ voor de unieke } V \text{ zodanig dat } RuV.$$

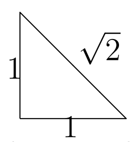
Contradictie.

De stelling leert ons onder andere dat de machtsverzameling van $\mathbb{N}$ van de natuurlijke getallen meer elementen heeft dan $\mathbb{N}$. Dat is helaas een nogal abstract voorbeeld. Het volgende spreekt wellicht iets meer aan.

Stelling 6 Er is geen bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. Anders gezegd: de punten op een rechte lijn zijn niet aftelbaar.

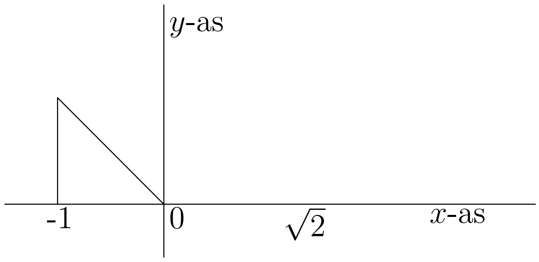
Terzijde. Voordat we ons met het bewijs van deze stelling gaan bezig houden, is het wellicht nuttig u eraan te herinneren dat we de punten op een rechte lijn dikwijls representeren met reële getallen. (We spreken in dat verband van de reële getallenrechte). Het was al aan de Pythagoreeërs bekend dat we die punten niet kunnen representeren met rationale getallen. Tot dat inzicht kwamen ze als volgt.

Bekijk de volgende figuur:



De stelling van Pythagoras leert dat in de bovenstaande driehoek de lengte van schuine zijde $\sqrt{2}$ maal zo lang is als een van de korte.

Bekijk dit nu eens in een coördinatenstelsel. Als we de schuine zijde omcirkelen, dan snijdt die cirkel de x-as ergens in een punt. Dat punt zouden we graag representeren met een getallenpaar, en dat kan ook: het betreft hier het punt $\langle\sqrt{2}, 0\rangle$.



Waar het om gaat is dat we dat punt niet zouden kunnen representeren met dit getallenpaar, als we alleen maar van rationale getallen gebruik zouden kunnen maken: $\sqrt{2}$ is geen rationaal getal.

(Het bewijs van deze laatste stelling wordt aan Euclides toegeschreven, en gaat als volgt. Stel dat er wel een rationaal getal x bestaat zodanig dat $x^2 = 2$. Neem aan dat de breuk $\frac{m}{n}$ aan de gestelde eis voldoet. We mogen aannemen dat m en n zo gekozen zijn dat ze geen gemeenschappelijke deler hebben. Als $(\frac{m}{n})^2 = 2$ dan geldt: $m^2 = 2n^2$ en dus: m^2 is even. Als m^2 even is, dan is m ook even. Neem aan dat $m = 2l$. Dan geldt: $4l^2 = 2n^2$, met andere woorden, $n^2 = 2l^2$. Derhalve is n^2 even en daarmee n ook: m en n zijn dus beide even. Dit in tegenstelling tot onze aanname dat m en n geen gemeenschappelijke deler zouden hebben. Contradictie).

Uit het feit dat er op een rechte lijn punten liggen die geen rationale coördinaten hebben, volgt natuurlijk nog niet dat er méér punten op die lijn liggen dan er rationale getallen zijn. Toch is dat zo, en het bewijs van die stelling danken we aan Cantor, die er eeuwige roem mee verworven heeft. Het was het eerste bewijs dat liet zien dat er oneindige verzamelingen bestaan die niet gelijkmachtig zijn.

Bewijs Alle punten op een rechte lijn kunnen worden weergegeven met een reëel getal, en alle reële getallen kunnen worden weergegeven met een oneindig doorlopende decimale breuk. Bijvoorbeeld:

$1/3 = 0{,}333333333333\ldots$
$1/2 = 0{,}500000000000\ldots$
$\pi = 3{,}1415927\ldots$
$\sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots$

Beschouw nu alle reële getallen tussen 0 en 1. We zullen laten zien dat er geen bijectie bestaat tussen deze verzameling en de natuurlijke getallen.[2] Daartoe be-

2. Het zal duidelijk zijn dat dat voldoende is. Een verzameling kan nooit minder elementen dan een echte deelverzameling ervan. (Overigens: het is niet moeilijk te bewijzen dat de verzameling van alle reële getallen gelijkmachtig is met de verzameling van alle reële getallen tussen 0 en 1).

schouwen we een willekeurige *functionele* relatie R tussen de natuurlijke getallen enerzijds en de reële getallen tussen 0 en 1 anderzijds — d.w.z. een relatie waarvoor geldt dat er bij elk natuurlijk getal n hoogstens één reëel getal r te vinden is zodanig dat Rnr. We zullen laten zien dat er altijd een reéel getal bestaat dat met geen enkel natuurlijk getal verbonden wordt.

Eenvoudiger gesteld: kies bij elk natuurlijk getal een reëel getal. U kunt dat nooit zo doen dat alle reële getallen aan de beurt komen. Kijk maar, hieronder heb ik een zo'n mogelijke keuze in beeld gebracht.

1 ↔ 0, **2** 8 4 9 8 6 5 3 1 1 4 6...
2 ↔ 0, 8 **7** 6 5 4 4 4 4 3 9 6 9 8...
3 ↔ 0, 7 7 **7** 7 3 1 2 2 5 3 4 6 0...
4 ↔ 0, 7 7 7 **1** 0 1 0 4 9 7 2 8 7...
5 ↔ 0, 6 5 2 3 **2** 4 2 5 2 6 2 7 2 8...
6 ↔ 0, 5 5 1 6 6 **1** 3 1 4 2 2 2 7 6...
7 ↔ 0, 0 0 0 4 5 0 **9** 4 3 0 0 2 1 1...
8 ↔ 0, 0 0 0 0 0 0 0 **0** 0 7 6 4 5 5...
9 ↔ 0, 9 9 9 8 8 8 7 7 **7** 6 3 4 5...
10 ↔ 0, 1 1 2 3 5 8 1 3 2 **1** 3 4...
... ↔...

Neem nu de eerste decimaal van het eerste getal, de tweede decimaal van het tweede getal, de derde decimaal van het derde getal enzovoorts. De betreffende getallen zijn dik gedrukt en door ze achter elkaar te schrijven krijg je een reëel getal:

$$0,2\,7\,7\,1\,2\,1\,9\,0\,7\,1\ldots$$

Beschouw nu een reëel getal dat in elke decimaal van dit getal verschilt. Bijvoorbeeld:

$$0,8\,3\,3\,9\,8\,9\,1\,6\,3\,5\ldots$$

Claim: dit laatste getal komt nergens in de bovenstaande lijst voor. Het kan niet bij 7 gekozen zijn, want het verschilt in de 7de decimaal van het getal dat bij 7 gekozen is, het kan niet bij 25 gekozen zijn want het verschilt in de 25e decimaal van het getal dat bij 25 gekozen is, het kan bij geen enkel getal n gekozen zijn want het verschilt in de n-de decimaal van het getal dat bij n gekozen is.

Het zal duidelijk zijn dat deze truc altijd werkt: hoe die oneindige lijst er ook uitziet, er is altijd een reëel getal tussen 0 en 1 te vinden dat er niet op staat. Er bestaat geen bijectie tussen de natuurlijke getallen en de reële getallen tussen 0 en 1.

We hebben nu gezien dat het begrip 'evenveel' precies gedefinieerd kan worden, en dat dat begrip ook voor oneindige verzamelingen zin heeft. Cantor, met Frege in zijn voetspoor, ging één stap verder. Zij wilden, uitgaande van dit begrip tot het abstracte begrip 'aantal' komen. De wijze waarop ze dachten deze doelstelling te realiseren is globaal de volgende.

De gelijkmachtigheidsrelatie heeft de eigenschappen heeft van een equivalentierelatie. Bij de bespreking van equivalentierelaties hebben we gezien hoe je uitgaande van, bijvoorbeeld, de notie 'groter dan' het abstracte begrip 'lengte' kan invoeren; door de relatie 'even groot als' te beschouwen als een equivalentierelatie, kan de 'lengte' van een object a worden voorgesteld als de verzameling objecten die 'even lang' zijn als 'a'.

Op precies dezelfde wijze dacht Cantor het begrip 'aantal' (kardinaalgetal) te kunnen invoeren. Hij begreep het *aantal* elementen van een verzameling A als "the general concept which by means of our active faculty of thought arises from the aggregate A when we make abstraction of the nature of its various elements and of the order in which they are given." En dit "general concept" of kardinaalgetal, zo werd verondersteld, kan begrepen worden als de equivalentieklasse die door A onder de gelijkmachtigheidsrelatie wordt gegenereerd. Met andere woorden, het kardinaalgetal van een verzameling A is de verzameling van alle verzamelingen die gelijkmachtig zijn met A. Het getal 1 kan dan gelijkgesteld worden met de "verzameling" van alle verzamelingen die gelijkmachtig zijn met $\{\emptyset\}$; het getal 2 met de verzameling van alle verzamelingen die gelijkmachtig zijn met $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, etc.

Een briljant idee, maar helaas in deze vorm niet houdbaar. Het veronderstelt namelijk dat de verzameling van alle verzamelingen een object is waar zinvol over kan worden gesproken. Dit is niet zo (Zie Gamut pag. 86). De extensie van het gelijkmachtigheidspredikaat is geen verzameling en de kardinaalgetallen van Cantor en Frege bestaan dan ook niet. Het idee dat men de *echte* getallen 1, 2, etc. kan zien als equivalentieklassen heeft men dan ook laten varen. In deze syllabus zullen we het probleem van 'absolute grootte' verder laten voor wat het is.

Hoofdstuk 3

De axiomatische methode

3.1 Deductief redeneren

Als het goed is, begint u dit te lezen na kennis gemaakt te hebben met het natuurlijke deductiesysteem voor talen van de predikatenlogica. U heeft daarbij geleerd wat het is om afleidingen te maken *in* dat systeem. En misschien zijn er ook wel enige stellingen *over* dat systeem bewezen, het soort stellingen als vermeld in de volgende opgave.

Opgave 9 Zij Δ een verzameling premissen. Bewijs: Als er een afleiding bestaat van φ uit Δ, dan bestaat er een afleiding van φ uit Δ waarin nergens de regel $EFSQ$ gebruikt wordt.

De stelling in de bovenstaande opgave is een eenvoudig voorbeeld van een metalogische stelling, een stelling *over* een logisch systeem, in dit geval een bewijssysteem. Logici brengen het grootste gedeelte van hun werktijd door met het bewijzen van dit soort stellingen. Sterker, het geformaliseer waar logici zo van lijken te houden, heeft enkel en alleen tot doel zoveel greep op 'de' logica te krijgen dat het mogelijk wordt die als het ware *van buiten af* te bestuderen en er dingen *over* te bewijzen.

In het volgende schrijven we

$$\Delta \vdash \varphi$$

als afkorting van 'Er bestaat een natuurlijke deductie waarin als premissen alleen zinnen uit de verzameling Δ worden gebruikt en die uitmondt in de conclusie φ'. We zeggen in dat geval ook wel 'φ is afleidbaar uit Δ'.
U dient die afkorting niet te verwarren met deze:

$$\Delta \models \varphi$$

Dit laatste betekent dat φ *logisch volgt* uit Δ in semantische zin, oftewel dat voor elke model $\mathbf{M} = \langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$ geldt: als $V_{\mathbf{M}}(\psi) = 1$ voor elke $\psi \in \Delta$, dan geldt ook $V_{\mathbf{M}}(\varphi) = 1$.

Hoewel ze een verschillende betekenis hebben komen de relaties '$\vdash$' en '$\models$' toch op hetzelfde neer. Met andere woorden: het natuurlijk deductiesysteem zit zó in elkaar zit dat de notie van 'afleidbaarheid' de notie van 'geldigheid' precies dekt.

Stelling 7 (Volledigheidsstelling)

$$\Delta \vdash \varphi \text{ d.e.s.d.a } \Delta \models \varphi$$

De ene helft van deze stelling verzekert ons ervan dat wat syntactisch afleidbaar is ook semantisch geldig is. Dat is niet zo verrassend. Sterker, als dit niet zo was, dan zouden we de conclusie moeten trekken dat we een fout gemaakt hebben bij het in elkaar zetten van dat systeem.

De andere helft van de stelling is heel wat dieper. Het is eigenlijk een soort van wonder dat de die ingewikkelde relatie '$\models$', die gedefinieerd wordt met een kwantificatie over alle mogelijke — eindige én oneindige — modellen, te vangen is in die paar afleidingsregels van ons deductiesysteem.

Het belang van de volledigheidsstelling wordt misschien duidelijker als u zich realiseert dat de twee manieren waarop we het geldigheidsbegrip — en ik bedoel hier het intuïtieve geldigheidsbegrip — hebben gemodelleerd in zekere zin complementair zijn. De ene manier is vooral erg nuttig als het erom gaat de ongeldigheid van een redenering aan te tonen, en de andere manier als het erom gaat de geldigheid van een redenering aan te tonen. Immers, de ene manier levert een object, te weten een tegenmodel, in geval van ongeldigheid, de andere levert een object, te weten een afleiding, in geval van geldigheid.

Merk op: Een formele afleiding is meestal eenvoudig in een informeel bewijs om te zetten, zodat ook een leek niets van al die formaliteiten wil weten, zich van de geldigheid van de betreffende redenering zal laten overtuigen. En ook een verzamelingtheoretisch tegenmodel kunnen we met enige omslag van woorden — 'stel eens dat de wereld er zó uitziet:...'— dikwijls zoveel vlees en bloed meegeven dat ook een ongetraind persoon zal moeten toegeven dat het best mogelijk is dat de premissen van de redenering in kwestie waar zijn en de conclusie onwaar.

Met andere woorden: *los van de volledigheidsstelling* kunnen we er enig vertrouwen in hebben dat wanneer er een formele afleiding bestaat van de formele vertaling van de conclusie van een redenering uit de formele vertaling van de premissen, ieder weldenkend mens zich van de geldigheid van die redenering zal laten overtuigen. En ook mogen we ervan uitgaan dat als er een formeel tegenmodel tegen de formele vertaling van een redenering bestaat, de ongeldigheid van die redenering voor iedereen duidelijk zou moeten zijn.

Wat de volledigheidsstelling hier nu aan toevoegt is dat we in de gelukkige omstandigheid verkeren dat het altijd één van tweeën is: ofwel er bestaat een formele afleiding, ofwel er is een tegenmodel. Gegeven het bovenstaande, kunnen we er dus zeker van zijn dat onze formele machinerie nooit zal haperen.[1]

De volgende stelling volgt haast onmiddellijk uit de volledigheidsstelling.

Stelling 8 (Compactheidsstelling) Als $\Delta \models \varphi$ dan is er een eindige deelverzameling Δ' van Δ zodanig dat $\Delta' \models \varphi$.

Deze stelling is natuurlijk alleen interessant in het geval dat de genoemde Δ zelf oneindig veel elementen heeft, en zegt — enigszins verrassend — dat het nooit voor kan komen dat uit oneindig veel premissen een conclusie volgt die niet al uit een eindig aantal ervan volgt. (Hint voor het bewijs: Pas de volledigheidsstelling toe, en realiseer u vervolgens dat afleidingen een eindige lengte hebben, en er dus maar eindig veel premissen in gebruikt kunnen worden).

De compactheidsstelling heeft vele toepassingen. Hier is een voorbeeld dat vooral interessant is omdat het aantoont dat de uitdrukkingskracht van de talen van de de eerste orde predikatenlogica beperkt is.

Stelling 9 Zij $\mathcal{L}$ een taal van de predikatenlogica. Er bestaat geen zin φ zodanig dat voor alle modellen $\langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$ geldt: φ is waar in $\langle \mathbf{D}, \mathbf{I} \rangle$ d.e.s.d.a $\mathbf{D}$ eindig veel elementen heeft.

Bewijs. Neem aan dat er wel een zin φ bestaat die waar is in alle eindige modellen en onwaar in alle oneindige modellen.

Beschouw de verzameling Δ bestaande uit alle zinnen die voorkomen in de volgende oneindige rij:

$$\begin{array}{l}
\exists x_1 \exists x_2 (x_1 \neq x_2) \\
\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3) \\
\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_1 \neq x_4 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_4 \wedge x_3 \neq x_4) \\
\qquad\qquad \vdots
\end{array}$$

De eerste zin zegt dat er tenminste twee dingen bestaan. De tweede zin zegt dat er tenminste drie dingen bestaan. De derde dat er tenminste vier dingen bestaan. Enzovoorts.

Merk op dat Δ geen eindige modellen heeft. Immers bij elk getal n is er een formule in Δ te vinden die stelt dat er meer dan n dingen bestaan. De informatie opgeslagen in Δ is dan ook onverenigbaar met de zin φ. M.a.w:

$$\Delta, \varphi \models \perp$$

1. In Gamut 4.4 staan nog meer bijzonderheden over de volledigheidsstelling.

Passen we nu de compactheidsstelling toe dan volgt dat er een eindige deelverzameling Γ van Δ is zodanig dat

$$\Gamma, \varphi \models \bot$$

Maar is dit zo? Nee! Met een eindige deelverzameling van Δ kun je niet afdwingen dat er oneindig veel dingen bestaan. Elke eindige deelverzameling van Δ heeft een model waarin ook φ waar is.

Zo zijn we bij een tegenspraak beland. En de enige manier om die op te heffen is om de aanname dat er zin van de eerste orde predikatenlogica bestaat die waar is in precies de eindige modellen, te laten vallen.

Eindigheid is niet uitdrukbaar in een taal van de eerste orde predikatenlogica, maar wel in een taal van de tweede orde logica. Tweede orde talen[2] verschillen van eerste orde talen hierin, dat er niet alleen gekwantificeerd kan worden over *objecten* uit het domein, maar ook over *deelverzamelingen* van het domein en *relaties* op het domein. Naast eerste orde variabelen $x_1, \ldots, x_n., \ldots$ kennen deze talen ook eenplaatsige predikaatvariabelen $X_1, \ldots, X_n., \ldots$ en tweeplaatsige predikaatvariabelen $R_1, \ldots, R_n., \ldots$. We kunnen dan formules maken als $\forall X(Xa \leftrightarrow Xb)$, hetgeen zoveel betekent als: a heeft precies dezelfde eigenschappen als b. En ook:

$$\neg\exists R(\forall x\forall y\forall z((Rxy\wedge Rxz) \rightarrow y = z)\wedge\forall x\forall y\forall z((Ryx\wedge Rzx) \rightarrow y = z)\wedge\forall x\exists yRxy\wedge\neg\forall y\exists xRxy)$$

Dat is een hele mond vol, maar hopelijk ziet u na enig puzzelen dat deze formule, als hij waar is in een model, met zich meebrengt dat er geen bijectie bestaat tussen het domein en een echte deelverzameling van het domein, hetgeen zoals we in het vorige hoofdstuk gezien hebben betekent dat het domein eindig is.

Tweede orde talen hebben dus een grotere uitdrukkingskracht dan eerste orde talen. Maar alles heeft zijn prijs, en die is in dit geval wel heel erg hoog. Een onmiddellijk gevolg van die grotere uitdrukkingskracht is dat voor de tweede orde logica de compactheidsstelling niet meer opgaat, en dus dat er geen volledigheidsstelling bewezen zal kunnen worden die net zo sterk is als die voor de eerste orde logica. Maar dat is niet alles. Het is zelfs zo dat er geen afleidingssysteem voor de talen van de tweede orde logica bestaat zodanig dat voor alle formules φ geldt:

$$\vdash \varphi \text{ d.e.s.d.a. } \models \varphi$$

Met andere woorden: niet alleen het geldigheidsbegrip, maar ook het begrip 'logische waarheid' is voor deze talen zo ingewikkeld dat het in geen enkel bewijssysteem te vangen is.

2. Zie ook Gamut 5.4.

3.2 Axiomasystemen

Ter inleiding van deze paragraaf de volgende definities:

Definitie 5 (Theorie) Zij $\mathcal{L}$ een taal van de predikatenlogica. Een *theorie* in $\mathcal{L}$ is een verzameling zinnen van $\mathcal{L}$.

NB: U herinnert zich vast dat een formule een *zin* heet als er geen vrije variabelen in optreden.

Definitie 6 Zij Δ *theorie* in een taal $\mathcal{L}$ van de eerste orde predikatenlogica.
(i) Δ is *consistent* desda voor geen enkele φ geldt dat $\Delta \vdash \varphi$ en $\Delta \vdash \neg\varphi$;
(ii) Δ is *compleet* desda voor alle φ geldt dat $\Delta \vdash \varphi$ of $\Delta \vdash \neg\varphi$.

Opgave 10 Zij Δ een theorie in een taal $\mathcal{L}$ van de eerste orde predikatenlogica. Beredeneer dat de volgende beweringen equivalent zijn:
(i) Δ is consistent;
(ii) $\Delta \nvdash \bot$;
(iii) Er is een zin φ zodanig dat $\Delta \nvdash \varphi$.

Opgave 11
Deze opgave heeft betrekking op een taal van de eerste orde predikatenlogica, die als enige niet-logische symbolen de eenplaatsige predikaten A en B heeft. We beschouwen de theorie

$$\Delta = \{\exists x Ax, \exists y By, \exists x \exists y (x \neq y \wedge \forall z (z = x \vee z = y))\}$$

(i) Bewijs dat deze theorie niet compleet is.
(ii) Specificeer een zin φ zodanig dat $\Delta \cup \{\varphi\}$ compleet en consistent is. Motiveer uw antwoord.

Logici die zich met grondslagenonderzoek bezighouden — en dat kan grondslagenonderzoek van de wiskunde zijn, of van de natuurkunde, of van de economie of de sociologie, van elke wetenschap eigenlijk inclusief de filosofie zelf — bestuderen vaak geformaliseerde theorieën. Zoals hierboven reeds gezegd doen ze dat niet zozeer omdat ze graag formele, 'exacte' versies willen geven van stellingen en bewijzen die op zichzelf al overtuigend genoeg zijn. Nee, waar het om gaat is meer inzicht te krijgen in de theorieën zelf, door er stellingen *over* te bewijzen. Consistentie en compleetheid zijn daarbij twee eigenschappen waar men in geïnteresseerd is. Er zijn er meer, maar in het volgende beperken we ons tot deze twee.

Voorbeeld 1: *Ordeningstheorieën*

Zij $\mathcal{L}$ een taal van de predikatenlogica met één binair predikaat '$<$'. In plaats van '$< xy$' schrijven we '$x < y$'. De volgende theorie staat bekend als de theorie van de partiële ordeningen.

1. $\forall x(\neg x < x)$ irreflexiviteit.
2. $\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$ transitiviteit.

De theorie der lineaire ordeningen wordt verkregen door aan de theorie der partiële ordeningen de volgende zin aan toe te voegen:

3. $\forall x \forall y(x \neq y \rightarrow (x < y \vee y < x))$ samenhangendheid.

Een dichte lineaire ordening is een lineaire ordening waarvoor ook nog het volgende geldt:

4. $\forall x \forall y(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))$ dichtheid.

En de theorie $\Delta_<$ der dichte lineaire ordeningen zonder eindpunten is gegeven met de zinnen 1 t/m 4 hierboven plus:

5. $\forall x \exists y(x < y)$ geen eindpunt.
6. $\forall x \exists y(y < x)$ geen beginpunt.

Neem als discussiedomein de verzameling van alle rationale getallen, en als interpretatie voor het predikaat '$<$' de kleiner-dan relatie tussen die getallen. In het resulterende model zijn alle bovenstaande zinnen waar.

Neem als discussiedomein de verzameling van alle reële getallen, en als interpretatie voor het predikaat '$<$' de kleiner-dan relatie tussen die getallen. Het resultaat is ook een model van de theorie $\Delta_<$.

Uit het feit dat de theorie $\Delta_<$ der dichte lineaire ordeningen zonder eindpunten modellen heeft kunnen we concluderen dat die theorie consistent is. Dit dankzij de volledigheidsstelling, die immers o.a. zegt dat als $\Delta_< \not\models \perp$ ook geldt dat $\Delta_< \nvdash \perp$.

Is $\Delta_<$ ook compleet? Gegeven het feit dat de twee modellen die we hierboven gegeven hebben zo van elkaar verschillen — het ene heeft een aftelbaar domein, het andere een overaftelbaar domein — zou je verwachten van niet. Je zou denken dat er vast wel een zin φ is van de eerste orde taal in kwestie die waar is in het ene model en onwaar in het andere. En voor die zin φ zou dan gelden dat noch $\Delta_< \vdash \varphi$ noch $\Delta_< \vdash \neg\varphi$. Maar zo'n zin bestaat niet, al zullen we dat hier niet bewijzen. Er is wel een verschil in ordeningseigenschappen tussen de rationale en de reële getallen, maar dat verschil is niet in een eerste orde taal onder woorden te brengen. $\Delta_<$ is compleet.

Voorbeeld 2: *Peano's Rekenkunde*

Deze theorie is geformuleerd in een taal van de eerste orde predikatenlogica die behalve individuele constanten ook zogenaamde functiesymbolen bevat. Functiesymbolen kunnen net als predikaten eenplaatsig, tweeplaatsig, etc. zijn. Maar waar een n-plaatsig predikaat gecombineerd met n termen die naar objecten verwijzen een atomaire formule vormt, vormt een n plaatsig functiesymbool gecombineerd met n van die termen een nieuwe, meer complexe term. Als voorbeeld van een eenplaatsig functiesymbool uit de natuurlijke taal moge de uitdrukking 'de vader van' gelden. Gecombineerd met de naam 'Jan' levert dat functiesymbool de complexe naam 'de vader van Jan' op, en gecombineerd met deze laatste term de nog complexere naam 'de vader van de vader van Jan'.

De taal van de rekenkunde heeft als constanten:
- De individuele constante 0.
- Het één-plaatsige functiesymbool S. (Lees 'Sx' als 'de opvolger van x').
- De twee-plaatsige functiesymbolen $+$ en $\bullet$. (We schrijven '$(x + y)$' en '$(x \bullet y)$' in plaats van "$+xy$" en "$\bullet xy)$".)

Peano's rekenkunde is gegeven met de volgende zinnen, die ook wel de axioma's van Peano worden genoemd:

$\forall x(Sx \neq 0)$
$\forall x \forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$
$\forall x(x + 0 = x)$
$\forall x \forall y((x + Sy) = S(x + y))$
$\forall x(x \bullet 0 = 0)$
$\forall x \forall y((x \bullet Sy) = (x \bullet y) + x)$

En verder alle zinnen van de vorm:

$$([0/x]\varphi \wedge \forall x(\varphi \rightarrow [Sx/x]\varphi)) \rightarrow \forall x \varphi$$

Deze formule drukt het principe van de volledige inductie uit.

Ik neem aan dat u bij het doorlezen van deze formules steeds intuïtief 'ja, dat klopt' gezegd heeft, 'ja inderdaad, deze beweringen gaat op voor de mij bekende natuurlijke getallen, en de optelling daarvan, en de vermenigvuldiging daarvan'.

Alleen het principe van volledige inductie verdient enige toelichting. Dit principe stelt dat wanneer je wilt bewijzen dat alle natuurlijke getallen een bepaalde eigenschap hebben, het voldoende is om te laten zien (a) dat 0 die eigenschap heeft en (b) dat voor alle getallen x geldt: *als* x de eigenschap in kwestie heeft, dan heeft de opvolger Sx van x die eigenschap ook.

Een eenvoudig voorbeeld krijg je als je voor φ de formule $\neg Sx = x$ invult

$$(\neg S0 = 0 \wedge \forall x(\neg Sx = x \rightarrow \neg SSx = Sx)) \rightarrow \forall x \neg Sx = x$$

Onder gebruikmaking van het eerste en het tweede axioma valt hieruit zonder al te veel omslag $\forall x \neg Sx = x$ af te leiden.

Van dit soort oefeningen in formele deductie vindt men er vele in Russell & Whitehead's *Principia Mathematica*. Dit werk suggereerde dat alle bekende rekenkundige stellingen uit deze axioma's afleidbaar waren, zodat het vermoeden rees dat Peano de rekenkunde adekwaat had geformaliseerd.

Helaas, Peano's rekenkunde is niet compleet. Sterker, Kurt Gödel bewees in 1931 in wat ongetwijfeld de beroemdste wiskunde stelling van de vorige eeuw genoemd mag worden, dat er geen axiomatische theorie bestaat die precies alle rekenkundige waarheden produceert. Wat je ook voor axioma's aan de bovenstaande toevoegt, zolang je dat op een consistente manier doet zullen er altijd rekenkundige zinnen te vinden zijn die waar zijn, maar niet bewijsbaar.

In zekere zin betekent Gödels onvolledigheidsstelling het einde van een ideaal dat sinds Aristoteles de wetenschap heeft beheerst. Het gaat hier om de gedachte dat elke wetenschappelijk theorie idealiter zou moeten zijn opgebouwd uit een overzichtelijk stel axioma's waarvan de waarheid 'evident' is, en die samengenomen zo sterk zijn dat alle andere minder evidente waarheden er met puur logische middelen uit af te leiden zijn. Het heeft eeuwen geduurd voordat de logica zover ontwikkeld was dat men kon gaan onderzoeken of dat ideaal in alle gevallen haalbaar was. En het antwoord blijkt 'nee' te zijn. Voor sommige theorieën kan het [3], maar voor de meeste niet. Zodra de theorie in kwestie Peano's rekenkunde omvat zal hij altijd onvolledig zijn; de volledige waarheid is niet in een axiomatisch systeem te vangen.[4]

3. Ook voor sommige niet triviale theorieën, de elementaire meetkunde bijvoorbeeld.
4. Wilt u meer lezen over de onderwerpen die in dit hoofdstuk aan de orde zijn gesteld, lees dan bijvoorbeeld het boekje *Logik* van G. Dowek, of het boek *Gödel, Escher, Bach* van D. Hofstadter. Bijzonderheden vindt u in de bibliografie.

Hoofdstuk 4

Appendix

4.1 Extra opgaven

Opgave 1 Gegeven is de volgende vertaalsleutel: Gx: x is gelukkig; Hxy: x houdt van y. Neem als domein de verzameling van mensen. Vertaal de volgende formules in Nederlandse zinnen:

a. $\forall x(Hxx \rightarrow Gx)$
b. $\forall x(\exists yHyx \rightarrow Gx)$
c. $\forall x\forall y(Gy \rightarrow Hxy)$
d. $\forall x(\exists y\exists z((Hxy \wedge Hxz \wedge y \neq z) \rightarrow \neg Gx)$
e. $\forall x\forall y\forall z((Hxy \wedge Hxz \wedge y \neq z) \rightarrow \neg(Gx \wedge Gy \wedge Gz))$

Opgave 2 Gegeven is de volgende vertaalsleutel: Tx: x komt te laat; Wxy: x wacht op y; Rx: x x heeft een rothumeur. Neem als domein de verzameling van mensen. Vertaal de volgende formules in Nederlandse zinnen:

a. $\forall x(Tx \rightarrow \neg\exists yWyx)$
b. $\forall x\forall y((Wxy \wedge Ty) \rightarrow Rx)$
c. $\forall x(\exists y(Wxy \wedge Ty) \rightarrow Rx)$
d. $\exists y\forall x((Tx \wedge \neg Rx) \rightarrow Wyx)$
e. $\forall x(\exists y\exists z(Wyx \wedge Wzx \wedge Ry \wedge Rz \wedge y \neq z) \rightarrow Tx)$

Opgave 3 Beschouw het volgende model voor een predikatenlogische taal met een 1-plaatsige predikaatletter A en een 2-plaatsige predikaatletter R:

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$I(A) = \{1, 2, 5\}$$
$$I(R) = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 5, 3\rangle, \langle 5, 5\rangle\}$$

a. Teken het model door de elementen uit het domein op te vatten als punten in een diagram, het predikaat Ax te interpreteren als 'x is omcirkeld', en de relatie Rxy als 'er loopt een pijl van x naar y'.

b. Ga van de volgende formules na wat ze betekenen in dit model. Bepaal of ze waar of onwaar zijn, en motiveer uw antwoord.
   (i) $\forall x Rxx$
   (ii) $\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \forall w (Aw \leftrightarrow (w = x \vee w = y \vee w = z)))$
   (iii) $\forall x \forall y (Rxy \vee Ryx \vee x = y)$
   (iv) $\forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$
   (v) $\forall x \forall y (Rxy) \leftrightarrow \neg Ryx)$
   (vi) $\forall x (Ax \rightarrow \exists y (Ay \wedge Rxy))$

Opgave 4 Beschouw het volgende model voor een predikatenlogische taal met een 1-plaatsige predikaatletter A en een 2-plaatsige predikaatletter R:

$$D = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$I(A) = \{1, 4\}$$
$$I(R) = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$$

a. Teken het model door de elementen uit het domein op te vatten als punten in een diagram, het predikaat Ax te interpreteren als 'x is omcirkeld', en de relatie Rxy als 'er loopt een pijl van x naar y'.

b. Ga van de volgende formules na wat ze betekenen in dit model. Bepaal of ze waar of onwaar zijn, en motiveer uw antwoord.
   (i) $\forall x (Ax \leftrightarrow \forall y Rxy)$
   (ii) $\forall x \forall y (Rxy \rightarrow Ryx)$
   (iii) $\exists x \exists y (Rxy \wedge Ryx)$
   (iv) $\exists x \forall y (Ryy \leftrightarrow x \neq y)$
   (v) $\exists x \forall y (Rxy \leftrightarrow x = y)$
   (vi) $\forall x (Ax \rightarrow \exists y \exists z (y \neq z \wedge Ryx \wedge Rzx))$

Opgave 5 Beschouw het volgende model voor een predikatenlogische taal met een 2-plaatsige predikaatletter R:

$$D = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$I(R) = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 4, 3\rangle\}$$

a. Teken het model door de elementen uit het domein op te vatten als punten in een diagram, en de relatie Rxy te interpreteren als 'er loopt een pijl van x naar y'.

b. Onderzoek tegen welke van de volgende redeneerschema's het model een tegenmodel is:

(i) $\forall x \exists y Rxy, \forall x \neg Rxx \,/\, \forall x \forall y (Rxy \to \exists z (Rxz \wedge Rzy))$
(ii) $\forall x \forall y (x = y \vee Rxy \vee Ryx) \,/\, \forall x \forall y \forall z ((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz)$

Opgave 6 Minstens een van de volgende afleidingen is incorrect. Geef precies aan waar de fout(en) zitten, en leg uit waarom de betreffende stap(pen) incorrect zijn.

1.	$p \to (q \wedge \neg r)$	prem.
2.	$\neg r \to s$	prem.
3.	$\neg q$	prem.
4.	p	ass.
5.	$q \wedge \neg r$	$E_{\to}$, 1, 4
6.	q	$E_{\wedge}$, 5
7.	$\bot$	$E_{\neg}$, 3, 6
8.	$\neg p$	$I_{\neg}$
9.	$\neg r$	$E_{\wedge}$, 5
10.	s	$E_{\to}$, 2, 9
11.	$\neg p \wedge s$	$I_{\wedge}$, 8, 10

1.	$\neg \bot \to \bot$	prem.
2.	$\bot$	ass.
3.	$\bot$	Rep, 2
4.	$\neg \bot$	$I_{\neg}$
5.	$\bot$	$E_{\to}$, 1, 4
6.	$\bot \wedge \neg \bot$	$I_{\wedge}$, 4, 5

Opgave 7 Twee van de volgende drie afleidingen zijn incorrect. Geef precies aan waar de fouten zitten, en leg in informele termen uit waarom de betreffende stappen incorrect zijn.

1.	$\exists z \neg Rzz$	prem.
2.	Raa	ass.
3.	$\exists z Rzz$	$I_{\exists}$, 2
4.	$\bot$	$E_{\neg}$, 1, 3
5.	$\neg Raa$	$I_{\neg}$
6.	$\forall x \neg Rxx$	$I_{\forall}$, 5

1.	$\exists x \neg \exists y Rxy$	prem.
2.	$\neg \exists y Ray$	ass.
3.	Raa	ass.
4.	$\exists y Ray$	$I_\exists$ 3
5.	$\bot$	$E_\neg$ 2, 4
6.	$\neg Raa$	$I_\neg$
7.	$\exists x \neg Rxx$	$I_\exists$ 6
8.	$\neg \exists y Ray \to \exists x \neg Rxx$	$I_\to$
9.	$\exists x \neg Rxx$	$E_\exists$ 1, 8

1.	$\forall x \exists y Rxy$	prem.
2.	$\forall x \exists y \neg Rxy$	prem.
3.	$\exists y Ray$	$E_\forall$ 1
4.	Rab	ass.
5.	$\exists y \neg Rby$	$E_\forall$ 2
6.	$\neg Rba$	ass.
7.	$Rab \wedge \neg Rba$	$I_\wedge$ 4, 6
8.	$\exists y(Ray \wedge \neg Rya)$	$I_\exists$ 7
9.	$\exists x \exists y(Rxy \wedge \neg Ryx)$	$I_\exists$ 8
10.	$\neg Rba \to \exists x \exists y(Rxy \wedge \neg Ryx)$	$I_\to$
11.	$\exists x \exists y(Rxy \wedge \neg Ryx)$	$E_\exists$ 5, 10
12.	$Rab \to \exists x \exists y(Rxy \wedge \neg Ryx)$	$I_\to$
13.	$\exists x \exists y(Rxy \wedge \neg Ryx)$	$E_\exists$ 3, 12

4.2 Proeftentamen voor toets 1

Opgave 1 Vertaal de volgende zinnen in de taal van de propositielogica. Geef zoveel mogelijk de logische structuur weer en vermeld de vertaalsleutel.

(i) De voornemens van de minister van onderwijs zijn niet alleen voorbarig, maar ook slecht onderbouwd.

(ii) Als de Tweede noch de Eerste Kamer bezwaar aantekent, dan krijgt de minister zijn zin.

(iii) In tegenstelling tot D'66, leggen zowel de VVD als de PvdA zich bij het regeringsbeleid neer.

(iv) Het CDA zal bij de volgende verkiezingen een flink aantal zetels verliezen of de Hoop Scheffer nu lijsttrekker wordt of van Rij.

Opgave 2 Bepaal met behulp van waarheidstafels voor elk van de onderstaande vier formules of het een tautologie, een contradictie, of een contingentie is.

(i) $(p \to q) \to p$

(ii) $\neg p \wedge \neg(p \rightarrow q)$
(iii) $(\neg q \rightarrow \neg p) \vee (q \rightarrow p)$
(iv) $(\neg q \vee \neg p) \rightarrow (q \vee p)$

Opgave 3 Onderzoek in een waarheidstafel de volgende redeneerschema's op hun geldigheid. Specificeer in geval van ongeldigheid een tegenvoorbeeld.
(i) $\neg(\neg p \wedge q)/\neg p \rightarrow q$
(ii) $\neg q \rightarrow (p \vee r), \neg r \wedge \neg q/p$

Opgave 4 De volgende beweringen zijn beide onjuist. Geef voorbeelden waaruit dat blijkt.
(a) als φ en ψ contingenties zijn, dan is $\varphi \rightarrow \psi$ ook een contingentie
(b) Als $\varphi \rightarrow \psi$ een contingentie is, dan zijn φ en ψ ook contingenties.

Opgave 5 Laat $*$ een tweeplaatsig voegwoord zijn met de volgende eigenschappen.
(i) $p * q$ is logisch equivalent met $q * p$;
(ii) $p * p$ is logisch equivalent met p.
Beredeneer dat van de zestien mogelijke tweeplaatsige voegwoorden alleen de conjunctie $\wedge$ en de disjunctie $\vee$ aan (i) en (ii) voldoen.

4.3 Proeftentamen voor toets 3

Opgave 1 Vertaal de volgende zinnen in de taal van de predikatenlogica, waar nodig gebruikmakend van het identiteitsteken. Domein: de verzameling televisieprogramma's. Vertaalsleutel:a: het Journaal; b: Studio Sport; Px: x is een praatprogramma; Hxy: x heeft hogere kijkcijfers dan y; Exy: x is even goed als y.

a. Er is geen programma met hogere kijkcijfers dan Studio Sport.
b. Alleen Studio Sport heeft hogere kijkcijfers dan het Journaal.
c. Er zijn minstens twee programma's met hogere kijkcijfers dan welk praatprogramma dan ook.
d. Ook al hebben sommige praatprogramma's hogere kijkcijfers dan andere, toch zijn ze allemaal even goed.

Opgave 2 Beschouw het volgende model voor een predikaatlogische taal met een 1-plaatsige predikaatletter A en een 2-plaatsige predikaatletter R:

$$D = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$I(A) = \{1, 4\}$$
$$I(R) = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$$

a. Teken het model
b. Bepaal van de volgende formules de betekenis in dit model, en ga na of ze waar of onwaar zijn. Licht uw antwoord kort toe.
   i. $\forall x(Ax \vee Rxx)$
   ii. $\exists x \forall y(y \neq x \rightarrow Rxy)$
   iii. $\forall x((Rxx \vee \neg Ax) \rightarrow \neg \exists y(y \neq x \wedge Rxy))$
c. Definieer interpretaties $I(a)$ en $I(b)$ voor de individuele constanten a en b zodanig dat de volgende formule waar wordt in het model:
$\forall x \forall y((Ax \wedge Ay \wedge Rxy) \leftrightarrow (x = a \wedge y = b))$

Opgave 3 Laat door middel van een tegenmodel zien dat de volgende redeneerschema's ongeldig zijn:
a. $\neg\forall x(Ax \rightarrow Bx), \neg\forall x(Bx \rightarrow Ax), \neg\forall x(Ax \rightarrow \neg Bx)$ / $\forall x(\neg Ax \rightarrow Bx)$
b. $\forall x \exists y(Rxy \wedge \forall z Ryz)$ / $\forall x \forall y(Rxy \rightarrow Ryx)$
c. $\forall x \exists y \exists z(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge Rxy \wedge Rxz)$ / $\forall x \forall y(x \neq y \rightarrow (Rxy \vee Ryx))$

Opgave 4 Onderzoek de volgende relaties op de eigenschappen van reflexiviteit en irreflexiviteit; symmetrie, asymmetrie, en anti-symmetrie; transitiviteit; en samenhang:
i. De relatie *x heeft hogere kijkcijfers dan y* op de verzameling televisieprogramma's.
ii. De relatie *de tijd waarop x wordt uitgezonden overlapt de tijd waarop y wordt uitgezonden geheel of gedeeltelijk* op de verzameling televisieprogramma's.

Opgave 5 In deze opgave beschouwen we als domein de verzameling van alle schakers, en gaan we uit van de volgende vertaalsleutel:
a: Jan
b: Piet
Rxy: x is vader of moeder van y
(i) Hoe kan je in een formule van de predikatenlogica uitdrukken dat Jan grootouder is van Piet zonder daarbij gebruik te maken van andere predikaten dan het gegeven predikaat R?
(ii) Hoe kan je in een formule van de predikatenlogica uitdrukken dat Jan een halfbroer of halfzus van Piet is zonder daarbij gebruik te maken van andere predikaten dan het gegeven predikaat R en (eventueel) identiteit?

Bibliografie

[Benacerraf and Putnam 1983] Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds.): 1983, *Philosophy of mathematics. Selected readings*, Cambridge University Press, second edition

[van Dalen et al.1975] van Dalen, D., Doets, H., and de Swart, H.: 1975, *Verzamelingen. Naïef, axiomatisch en toegepast*, Oosthoek, Scheltema & Holkema, Utrecht

[Dowek 1995] Dowek, G.: 1995, *Logik. Ausführungen zum besseren Verständnis Anregungen zum Nachdenken*, BLT, Bergisch Gladbach

[Haack 1978] Haack, S.: 1978, *Philosophy of Logics*, Cambridge University Press, Cambridge

[Heijenoort 1967] Heijenoort, J. (ed.): 1967, *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge

[Hempel 1952] Hempel, C.: 1952, *Fundamentals of Concept Formation in Empirical Science*, The University of Chicago Press, Chicago

[Hofstadter 1980] Hofstadter, D.: 1980, *Gödel, Escher, Bach. An Eternal Golden Braid*, Penguin, Harmondsworth

[Kneale 1962] Kneale, W. C., and M. Kneale: 1962, *The Development of Logic*, Oxford University Press

[Read 1995] Read, S.: 1995, *Thinking about Logic. An Introduction to the Philosophy of Logic*, Oxford University Press

[P.C. and Zinnes 1963] Suppes P.C., and Zinnes, J. (eds.): 1963, *Basic Measurement Theory*, Handbook of Mathematical Psychology, Wiley, New York