

Topologische orde en symmetriebreking

Bachelorproject van:

Maarten Soudijn

27 maart 2009

Samenvatting

Topologische systemen in twee dimensies zijn interessant omdat ze een toepassing hebben in het fractionele quantum Hall-effect. In deze systemen kunnen, met behulp van quantumgroepen en veldentheorie, anyonen worden geïntroduceerd. Dit zijn topologische deeltjes met fractionele spin. Een specifieke tak van deze anyonische systemen is die van de $SU(2)_k$ quantumgroepen, hiervan zijn $SU(2)_4$ en $SU(2)_8$ twee bijzondere gevallen. Deze quantumgroepen bevatten beiden een boson waardoor spontane symmetriebreking door middel van bosecondensatie onderzocht kan worden. Bij dit proces speelt ook confinement een belangrijke rol. Gebleken is dat de gebroken en confined fasen beschreven kunnen worden door andere quantumgroepen, er is dus effectief een inbedding te maken van de ene quantumgroep in de andere.

De maverick-coset $SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$ is een speciale cosetconstructie van twee quantumgroepen. Gebleken is dat de methode van symmetriebreking, welke werkt voor simpele gevallen, tevens bruikbaar is voor complexere gevallen zoals deze. Voor de maverick-coset is tevens een inbedding te maken.

Begeleider

Sander Bais

Instituut voor Theoretische Fysica Amsterdam

Inhoudsopgave

1	Inleiding	4
2	Topologische orde	4
2.1	Anyonen	5
2.2	Eigenschappen van Anyonen	5
2.2.1	Fusie en braiding	6
2.2.2	Spin, monodromie en quantumdimensies	6
3	Groepen en representaties	7
3.1	Algebra en quantumgroep	8
3.2	Centrale lading, spin, quantumdimensies en representaties	9
3.3	Relatie tussen groep en quantumgroep	9
4	Symmetriebreking	11
4.1	Breking	11
4.2	Symmetriebreking door middel van bosecondensatie	12
4.2.1	Bosonen	12
4.2.2	Brekingmethode	12
4.3	Confinement	14
4.3.1	Breking en confinement van $SU(2)_8$	17
5	Maverick	17
5.1	Maverickconstructie	18
5.1.1	$SU(3)_2$	18
5.1.2	$SU(2)_8$	18
5.2	$SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$	19
5.3	$SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$ breking	19
5.4	$SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$ confinement	22
6	Conclusie	23

Lijst van figuren

1	De <i>ribbon equation</i>	7
2	Van groep naar quantumgroep.	8
3	Gewichtsroosters.	10
4	Confinement van anyonen.	15
5	Schets van een sample met twee verschillende fasen en een grensvlak.	16

Lijst van tabellen

1	De quantumgroep $SU(2)_4$ weergegeven met fusie regels.	11
2	De groep $SU(2)_4$ weergegeven met fusieregels.	13
3	De fusieregels weergegeven voor het geval dat sector 4 naar het vacuüm gaat.	13
4	De gebroken groep $SU(2)_4$ weergegeven met uiteindelijke fusieregels.	14
5	De quantumgroep $SU(2)_4$ na confinement weergegeven met uiteindelijke fusieregels.	16
6	De quantumgroep $SU(3)_1$ met fusieregels.	16
7	De tabellen van de quantumgroep $SU(2)_8$ gewoon en gebroken.	17
8	$SU(2)_8$ confined weergegeven met fusieregels.	17
9	De fusieregels van de quantumgroep $SU(3)_2$	18
10	De tabellen van de quantumgroepen $SU(3)_2$ en $SU(2)_8$	18
11	Alle velden van de maverick $SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$ met quantumdimensie en spin.	19
12	Breking en identificatie van het eerste deel van $SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$	22
13	Breking van $SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$	23
14	$SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$ gebroken.	23
15	$SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$ confined weergegeven met fusieregels.	24

1 Inleiding

Dit project gaat over een gebied in de fysica waar topologische quantumveldentheorie[1], conforme veldentheorie[2] en quantumgroepen[3] samen komen. Het betreft een heel bijzondere klasse van deeltjes *anyonen*[2] genaamd. Wat volgt is een kleine introductie in de wereld van de anyonen, systemen met topologische orde[4], braidrelaties[2], fusierelaties en een manier om deze systemen te beschrijven, ermee te rekenen en faseovergangen uit te voeren. De onderwerpen die hierbij komen kijken zijn quantumgroepen, symmetriebreking, condensatie van bosonen en, als gevolg daarvan, confinement.

De genoemde velden van theoretisch onderzoek zoeken naar goede beschrijvingen van fysische systemen en effecten. Eén van de belangrijkste systemen in deze onderzoeksvelden is het zogenaamde quantum Hall-effect[5] en met name het fractionele quantum Hall-effect[6]. Men claimt dat in deze systemen excitaties voorkomen die overeenkomen met anyonen. Laten we daarom eerst even stilstaan bij wat dit quantum Hall-effect ongeveer inhoudt.

Fractionele quantum Hall-effect

Een fractionele quantum Hall-toestand wordt gevormd wanneer elektronen, die zich bevinden op het scheidingsvlak van een halfgeleider en een isolator, worden afgekoeld tot zeer lage temperaturen (~ 10 mK) en worden blootgesteld aan een sterk magnetisch veld (~ 20 T). Onder deze omstandigheden doet er zich een Hall-effect voor dat opzienbarend verschilt van het klassieke Hall-effect[7]. De Hall-weerstand neemt niet lineair toe met het toegepaste magnetische veld zoals bij het klassieke Hall-effect, hij vertoont daarentegen plateaus. Bij deze niveaus neemt de geleidbaarheid heeltallige of fractionele veelvoud van de fundamentele eenheid $\frac{e^2}{h}$ aan.

Bij de niveaus met fractionele geleidbaarheid treed er nu een effect op waarbij het systeem gaten laat vallen in de verdeling van de elektronen. Deze gaten werken effectief als excitaties, maar dan excitaties die een fractie van de spin dragen van de daaromheen aanwezige elektronen. Men claimt nu dat deze excitaties zich gedragen als anyonen.

De processen die zich bij het quantum Hall-effect voordoen zijn processen die nog niet voldoende begrepen zijn en waar dus ook nog geen volledig juiste beschrijvingen voor zijn. Men is hard bezig om goed werkende theorieën te vinden en deze scriptie beschrijft een klein onderdeel van deze zoektocht. Ik zal beginnen met de wereld van de anyonen te beschrijven en de spelregels hiervan uit te leggen. Daarvoor zal ik in eerste instantie wat spelregels die volgen uit de topologische quantumveldentheorie gebruiken. Vervolgens zal ik ingaan op de regels die we voor mijn verhaal nodig hebben uit groepentheorie en de daaruit volgende quantumgroepen. Met behulp van deze quantumgroepen zal ik de anyonische systemen uit het eerste gedeelte gaan beschrijven.

Met deze gereedschappen in handen komen we uiteindelijk aan bij het gedeelte wat ik zelf onderzocht heb, namelijk het kijken naar spontane symmetriebreking in anyonische systemen. Dit gaan we doen door te kijken naar de condensatie van bosonen in de quantumgroepen waarmee je deze anyonische systemen kan beschrijven.

Als einddoel zullen we naar één speciaal geval gaan kijken wat in wezen een combinatie is van twee van deze quantumgroepen: een zogenaamde maverick-coset. Ik zal de representaties van deze maverick uitwerken en de fusieregels bepalen. Aan de hand van deze gegevens zal ik, door middel van bose-condensatie, de symmetriebreking en de bijbehorende confinement uitwerken.

2 Topologische orde

Systemen met topologische orde zijn systemen waarvan de lange drachts-interacties enkel van topologische aard zijn[8]. Om erachter te komen wat we hier precies mee bedoelen gaan we eerst kijken naar de betekenis van gewone orde in de natuurkunde.

Het woord orde komt uit de fysica van de gecondenseerde materie, waar de orde van een materiaal een formele term is voor de rangschikking van de atomen in dit materiaal. Als bijvoorbeeld een materiaal van een bepaalde orde overgaat naar een toestand met een andere orde dan spreken we van een faseovergang. Hierbij verstaan we onder verschillende fasen onder andere: vast, vloeibaar, gasvormig, supergeleidend of supervloeibaar. Een beschrijving van de verschillende mogelijke ordes en faseovergangen van materialen wordt gegeven door de theorie van Landau symmetriebreking[9]. Lang werd gedacht dat deze theorie alle mogelijke ordes en faseovergangen beschreef. In een poging om hoge temperatuur supergeleiding te verklaren werden chirale spintoestanden[10] geïntroduceerd

waarbij in eerste instantie vast werd gehouden aan Landau symmetriebreking. De chirale spintoestanden zouden wel de tijd- en pariteitsymmetrie maar niet de spinrotatiesymmetrie breken[11]. In veel gevallen bleek echter dat verschillende chirale spintoestanden precies dezelfde symmetriën hadden. Symmetrie alleen was dus niet voldoende om deze toestanden mee te beschrijven. Dit wees erop dat de chirale spintoestanden een nieuw soort orde bevatten welke niet te beschrijven was met Landau symmetriebreking. Deze nieuwe orde werd topologische orde genoemd[4]. Uit experimenten bleek echter dat topologische orde niet geschikt was om hoge temperatuur supergeleiding te beschrijven. Topologische orde werd daarmee eigenlijk alleen wiskundig interessant. Nu blijkt echter dat beschrijvingen met behulp van topologische orde de meest veelbelovende kandidaten zijn om het quantum Hall-effect mee te beschrijven. Theorieën met topologische orde zijn veldentheorieën waarbij de velden corresponderen met deeltjes genaamd *anyonen*. In de rest van deze scriptie spelen deze deeltjes een centrale rol. Daarom zal ik in dit hoofdstuk een beschrijving geven van anyonen en hun eigenschappen.

2.1 Anyonen

Zoals hierboven al genoemd zijn anyonen de deeltjes die voorkomen in systemen met topologische orde. Anyonen komen alleen voor in het platte vlak, oftewel systemen met twee ruimtelijke en één tijdsdimensie. Dit noteren we als $2 + 1$ dimensies of, als het om drie ruimtelijke dimensies gaat, $3 + 1$ dimensies. Anyonen komen dus niet voor in $3 + 1$ dimensies zoals de deeltjes in de natuur, maar wel op scheidingsvlakken (hoofdstuk 1).

Gewone materie wordt bij elkaar gehouden door en is opgebouwd uit bosonen en fermionen. Anyonen onderscheiden zich van bosonen en fermionen door hun spinwaarden. Waar bosonen en fermionen enkel heel- en halfvallige spin kunnen hebben, kunnen anyonen in principe iedere willekeurige reële spinwaarde hebben. Anyonen kunnen dus naast een heel scala aan verschillende soorten deeltjes ook bosonen of fermionen zijn. Daarmee is anyon eigenlijk een algemene naam voor een deeltje met een willekeurige reële spinwaarde.

Bij bosonen en fermionen, in $3 + 1$ dimensies, is het zo dat wanneer je er twee omwisselt, je het systeem niet fundamenteel beïnvloedt. De toestand is precies hetzelfde als voor het uitvoeren van deze handeling, met in het geval van fermionen enkel het verschijnen van een minteken in de golf functie. Bij anyonen, voor het geval dat het niet om bosonen of fermionen gaat, ligt dit anders. Bij deze deeltjes is het namelijk niet zo dat je het systeem ongemoeid laat als je twee deeltjes verwisselt. Verwisselingen van deeltjes werkt in $3 + 1$ dimensies sowieso anders dan in $2 + 1$ dimensies. Dit is het makkelijkst te begrijpen als we vergelijken wat er gebeurt met twee deeltjes die we verwisselen in $3 + 1$ dimensies en in $2 + 1$ dimensies. De verwisseling van de deeltjes houdt in dat we ze in een vlak rechts dan wel links om elkaar heen laten draaien.

In het geval van de bosonen en fermionen in $3 + 1$ dimensies is het linksom draaien, in feite precies hetzelfde als rechtsom draaien. De verwisseling van de deeltjes, links- dan wel rechtsom, gebeurt in het platte vlak, het draaivlak. Maar bij $3 + 1$ dimensies kun je dit draaivlak steeds een triviaal klein beetje door de derde dimensie roteren zonder dat er echt iets verandert. Dit kun je net zo lang doen totdat het draaivlak uiteindelijk 180° geroteerd is. Vanuit het oude perspectief draaien de deeltjes, die bijvoorbeeld eerst linksom elkaar draaiden, nu rechtsom elkaar. In $2 + 1$ dimensies kan dit niet. In dit geval heb je namelijk niet de derde dimensie om het draaivlak continu in te roteren. Daardoor is in $2 + 1$ dimensies linksom draaien fundamenteel verschillend van rechtsom draaien.

Het feit dat het verwisselen van anyonen niet een triviale bewerking is, zoals bij deeltjes in $3 + 1$ dimensies, vormt de basis voor het feit dat deze deeltjes erg interessant zijn en dat er veel onderzoek naar hun eigenschappen wordt gedaan. In de volgende paragraaf zullen we wat gedetailleerder gaan kijken naar de verschillende eigenschappen van anyonen en op wat voor manier we die kunnen beschrijven.

2.2 Eigenschappen van Anyonen

In deze paragraaf volg ik grotendeels de lijn van [12]. De aldaar geïntroduceerde regels en eigenschappen zijn van belang voor het vervolg van deze scriptie.

We gaan nu kijken naar de werktuigen die we nodig hebben uit de $2 + 1$ -dimensionale topologische quantumveldentheorie[1]. Om te beginnen nemen we aan dat de theorie een eindig aantal velden heeft die we labelen met een eindig aantal labels. We zullen deze velden deeltjes of sectoren noemen en in een enkel geval hebben we het over excitaties.

2.2.1 Fusie en braiding

De basisinteracties tussen topologische sectoren in $2+1$ dimensies zijn fusie en braiding. Kortgezegd is fusie het bij elkaar voegen van twee aparte deeltjes waarbij het een nieuw deeltje vormt. Braiding heeft daarentegen meer te maken met de verschillende deeltjes los van elkaar houden om ze vervolgens om elkaar heen te laten draaien. De term braiding, vlechten, komt van de vlechtwerkjes die je kunt maken van de wereldlijnen van deeltjes die om elkaar heen draaien in het platte vlak. Fusie en braiding zijn echter nauw met elkaar verbonden via de ribbon-equation, zie de volgende sectie en figuur 1. Daarmee zijn braidrelaties tevens uit te drukken in termen van fusierelaties. Ik zal daarom een gedetailleerde beschrijving van braiding achterwege laten, voor meer hierover zie [2]. Fusie kan worden samengevat door gebruik te maken van de fusieregels van de vorm:

$$a \times b = \sum_c N_c^{ab} c. \quad (1)$$

Hier zijn a en b de twee sectoren die met elkaar fuseren, de sectoren c zijn de mogelijke producten als resultaat van de fusie en de coëfficiënten N_c^{ab} geven het aantal onafhankelijke koppelingen van a en b weer die samen c geven, N is dus positief geheel of nul. Concreet wil dit zeggen dat bij een coëfficiënt van 0, a en b niet naar c kunnen fuseren. Een coëfficiënt van ongelijk 0 wil zeggen dat ze dat wel kunnen. Voor systemen met goedgedefinieerde braidinteracties, oftewel alle tweedimensionele systemen met point-like excitaties, hebben we symmetrie van fusieinteracties. Het fusieproduct is dus commutatief:

$$a \times b = b \times a \quad (2)$$

Verder is een fysische eis aan fusieregels dat ze associatief moeten zijn, dat wil zeggen:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \quad (3)$$

Ook is vereist dat er een unieke vacuümsector is met het label 0 of 1, afhankelijk van de definitie, welke de volgende eigenschap moet hebben:

$$1 \times a = a \times 1 = a \quad (4)$$

voor iedere a . Ten slotte is nog vereist dat iedere a een ladingsgeconjugeerde sector heeft, in dit geval aangegeven met \bar{a} , met welke deze op een unieke manier kan fuseren naar het vacuüm:

$$a \times \bar{a} = 1 + \sum_{c \neq 1} N_c^{a\bar{a}} c \quad (5)$$

$$\bar{a} \times a = 1 + \sum_{c \neq 1} N_c^{\bar{a}a} c \quad (6)$$

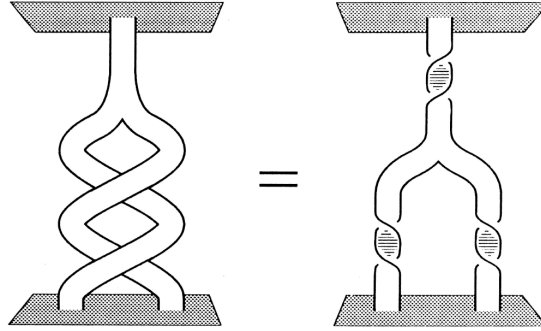
2.2.2 Spin, monodromie en quantumdimensies

Met iedere topologische lading a wordt een spinfactor θ_a geassocieerd. Dit is een fasefactor die de golffunctie of het anyonische systeem oppikt als het anyon wordt geroteerd over een hoek van 2π . We kunnen het deeltje zien als zijnde in een eigentoestand van tweedimensionale spin en de spinfactor is het effect van een 2π -rotatie op die eigentoestand. We zullen ook de spin h_a van het deeltje gebruiken. Deze is gerelateerd met de spin factor als:

$$\theta_a = e^{2\pi i h_a} \quad (7)$$

Het adiabatisch, zonder draaiing, verwisselen van de deeltjes heeft ook een effect op de golffunctie van het systeem. Dit is zoals eerder al genoemd hetzelfde als een statistische interactie van bosonen en fermionen. Bij bosonen zegt het feit dat het verwisseling van twee dezelfde bosonen geen effect heeft op de golffunctie een hoop over hun collectieve gedrag. In twee dimensies worden deze interacties beschreven door de braidgroep in plaats van door de permutatiegroep. Dit betekent vooral het verschil dat rechts-over-links verwisselingen anders zijn dan links-over-rechts verwisselingen (§2.1). Het product van twee rechts-over-links verwisselingen wordt over het algemeen de monodromie genoemd. Deze bewerking brengt deeltjes terug op hun oude positie alsof er niks is gebeurd, maar kan toch een niet-triviaal effect hebben op de toestand van het systeem. Dit effect, wat eigenlijk een braidinteractie is, kun je tevens beschrijven in termen van fusie en draaiing, gebruikmakend van de ribbon equation (figuur 1). Het braidproces is topologisch hetzelfde als een volle draaiing van de regio die beide ladingen bevat, een draaiing van het fusieproduct, plus een volle draaiing

van beide ladingen appart in de tegenovergestelde richting. Gegeven twee sectoren a en b wordt, door een monodromie op de fusie kanalen met lading c uit te voeren, een fase factor geïntroduceerd: $\theta_c(\theta_a\theta_b)^{-1} \equiv e^{2\pi i(h_c-h_a-h_b)}$.



Figuur 1: De *ribbon equation* geeft de relatie weer tussen fusie en monodromie, waarbij de topologische spin een belangrijke rol speelt. [12]

Voor de beschrijving van anyonen hebben we nog meer nodig dan de fusieregels en de spinfactoren. Een belangrijke eigenschap van anyonen is hun quantumdimensie. Net als de monodromie kunnen we die bepalen met behulp van de fusieregels en de spinfactoren. De quantumdimensies blijven behouden onder fusie en wel volgens de volgende vergelijking:

$$d_a \cdot d_b = \sum_c N_c^{ab} d_c \quad (8)$$

Hier is d_a de quantumdimensie van het anyon met label a . De totale quantumdimensie D wordt gedefinieerd door:

$$D = \sqrt{\sum_i d_i^2} \quad (9)$$

Hierbij loopt i over alle mogelijke sectoren. D^2 is de quantumdimensie van de onderliggende quantumgroep.

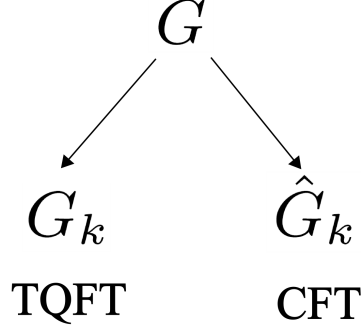
Om makkelijk met anyonen te kunnen rekenen en aan systemen met anyonen te kunnen werken is het handig om iets meer over deze onderliggende quantumgroep te weten. Dit is waar het volgende hoofdstuk aan gewijd zal zijn.

3 Groepen en representaties

In dit hoofdstuk zal ik kort ingaan op de rol die groepen en groepentheorie spelen in de beschrijvingen van systemen met topologische orde. Hierbij zal ik de link tussen groep en quantumgroep leggen. Uiteindelijk zal ik aan de hand van een voorbeeld naar een bepaalde representatie van quantumgroepen toewerken welke ik in de rest van deze scriptie zal gebruiken om mee te rekenen.

Groepentheorie is de basis waarvandaan quantumgroepen zijn afgeleid. In deze scriptie gaat het eigenlijk alleen om Lie-groepen[13]. Als je een Lie-groep G met irreducibele representaties (irreps)[13] Λ hebt, kun je daar, via de Hopf-algebra[3] van deze Lie-groep, een quantumgroep G_k , met irreps Λ van maken. Ook kun je uit de Lie-groep (via de Lie-algebra) een affine Lie-algebra[13] \hat{G}_k met irreps Λ construeren (figuur 2). Bij de affine Lie-algebra komen de irreps overeen met de primaire velden in conforme veldentheoriën (CFT=Conformal Field Theory)[2]. Deze theoriën zijn een manier om systemen met topologische orde te beschrijven. CFT's vallen echter buiten mijn scriptie, maar ze zijn wel nauw verbonden met dit onderwerp. Kijken we nu naar de quantumgroepen dan zien we dat deze leiden naar topologische quantumveldentheoriën (TQFT=Topological Quantum Field Theory)[1]. De volle beschrijving van een TQFT valt ook buiten deze scriptie, maar wel gebruiken we hier een aantal tools van. Bij TQFT's is gebleken dat anyonsystemen op een makkelijke manier te bechrijven zijn middels quantumgroepen. Ondanks de eenvoud van deze beschrijving zijn er toch

bijzonder nuttige berekeningen mee te maken. Deze laatste beschrijving is waar het ons om gaat. Daarom hier nu iets meer informatie over deze quantumgroepen.



Figuur 2: Van groep naar quantumgroep of affine Lie-algebra, gerelateerd aan TQFT respectievelijk CFT.

3.1 Algebra en quantumgroep

Hieronder is de Hopf-algebra van de groep $SU(2)$ te vinden. Dit is de speciale unitaire groep ($SU(n)$) met $n = 2$. De generatoren van deze algebra zijn de elementen 1 , H , L^+ en L^- .

$$\begin{aligned}
 [H, L^\pm] &= \pm 2L^\pm \\
 [L^+, L^-] &= H
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta(H) &= 1 \otimes H + H \otimes 1 \\
 \Delta(L^\pm) &= 1 \otimes L^\pm + L^\pm \otimes 1 \\
 \Delta(1) &= 1 \otimes 1 \\
 \epsilon(1) &= 1, \quad \epsilon(H) = 0, \quad \epsilon(L^\pm) = 0 \\
 S(1) &= 1, \quad S(H) = -H, \quad S(L^\pm) = -L^\pm
 \end{aligned}$$

Hier is $\Delta(H)$ de comultiplicatie, $\epsilon(H)$ de counit en $S(H)$ de antipode van element H [3]. Deze Hopf-algebra is noodzakelijk voor het construeren van de quantumgroep $SU(2)_k$, waar k ieder positief geheel getal kan zijn. Als we nu kijken naar vergelijking (10) en we vergelijken dit met de quantumgroep hieronder $SU(2)_k = U_q(SU(2))$ [3], waarbij q de $(k+2)^{de}$ root of unity is, $q = \sqrt[k+2]{1} = e^{2\pi i/(k+2)}$:

$$\begin{aligned}
 [H, L^\pm] &= \pm 2L^\pm \\
 [L^+, L^-] &= \frac{q^{H/2} - q^{-H/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta(H) &= 1 \otimes H + H \otimes 1 \\
 \Delta(L^\pm) &= L^\pm \otimes q^{H/4} + q^{-H/4} \otimes L^\pm \\
 \Delta(1) &= 1 \otimes 1 \\
 \epsilon(1) &= 1, \quad \epsilon(H) = 0, \quad \epsilon(L^\pm) = 0 \\
 S(1) &= 1, \quad S(H) = -H, \quad S(L^\pm) = -q^{\mp 1/4} L^\pm
 \end{aligned}$$

dan zien we hier duidelijk dat er een grote invloed van de geïntroduceerde q terug te vinden is in de commutatierelaties en in de rest van de Hopf-algebra.[3]. De invloed van deze q is wat quantumgroepen bruikbaar maakt voor de beschrijving die wij willen gebruiken. In de volgende paragraaf volgen een aantal eigenschappen van quantumgroepen en de bijbehorende representaties Λ . Deze zullen uiteindelijk overeenkomen met de anyonen uit hoofdstuk 2.

3.2 Centrale lading, spin, quantumdimensies en representaties

De centrale lading van een quantumgroep wordt gegeven door de volgende formule:

$$c(G, k) = \frac{k \dim(G)}{k + g} \quad (12)$$

Hier is G de betreffende basisgroep en $\dim(G)$ de dimensie van deze groep¹. In het geval van $SU(2)_k$ is deze groep dus $SU(2)$. Verder is k het getal voor de quantumgroep G_k en g is het coxeter-getal² van de groep G . Het getal k hangt af van de quantumgroep waar je naar wilt kijken. De centrale lading is een belangrijke eigenschap van quantumgroepen welke volgt uit de CFT en de TQFT. Deze eigenschap heeft echter geen directe invloed op de bewerkingen die ik met deze groepen zal gaan uitvoeren.

De eerder genoemde irreducibele representaties vertegenwoordigen fysieke sectoren van een quantumgroep. Belangrijke eigenschappen van deze sectoren zijn de bijbehorende quantumdimensies en hun spin. Dit zijn belangrijke eigenschappen omdat dit de ingrediënten zijn om de interacties tussen de verschillende sectoren te bepalen.

De spin van een sector Λ wordt gegeven door h_Λ volgens:

$$h_\Lambda = \frac{l(\Lambda) \dim(G)}{2(k + g)N(\Lambda)} \quad (13)$$

waar k , g en $\dim(G)$ hetzelfde zijn als bij de centrale lading (12). Verder is $l(\Lambda)$ de index van de sector Λ en $N(\Lambda)$ is de dimensie van die sector. Deze waarden zijn tevens op te zoeken in [14].

De quantumdimensie d_Λ van een sector Λ kunnen we berekenen met:

$$d_\Lambda = [N(\Lambda)]_q = \frac{q^{N/2} - q^{-N/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} \quad (14)$$

waar $N(\Lambda)$ is als hierboven en q als in (11). De quantumdimensies van de sectoren van een quantumgroep zijn ook te achterhalen als we de volledige set fusieregels weten die bij de betreffende quantumgroep horen. Iets meer hierover volgt in de volgende paragraaf. Een uitgebreidere behandeling van quantumdimensies is te vinden in [3].

Een representatie kun je beschrijven als een weergave van een abstract object, een sector van een groep of, als we vanuit de natuurkunde kijken, een deeltje. Representaties gebruiken we dan ook om over bijvoorbeeld natuurkundige concepten beter te kunnen nadenken en waar mogelijk (beter) te kunnen rekenen aan de bijbehorende systemen. Als we nu willen kijken naar verschillende anyon-systemen, is het noodzakelijk om een goede representatie te kiezen. Hiermee kunnen we een goed overzicht krijgen van dit systeem en haar verschillende eigenschappen. In de volgende paragraaf kijken we naar hoe we op een makkelijke manier aan de representaties kunnen komen die we willen hebben. Hiervoor zal ik de irreps van de basisgroep gebruiken, in ons geval $SU(2)$.

3.3 Relatie tussen groep en quantumgroep

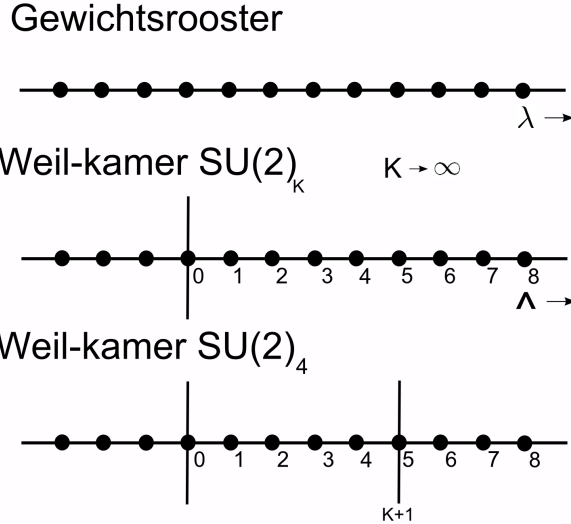
Met behulp van de irreps van de basisgroep kunnen we de quantumgroep construeren. Om vervolgens de fusieregels te bepalen gebruiken we de tensorproductregels van de onderliggende groep. Voor de duidelijkheid zal ik werken aan de hand van een voorbeeld: de quantumgroep $SU(2)_k$ met $k = 4$. De basisgroep van deze quantumgroep is dus $SU(2)$.

Als we kijken naar figuur 3 zien we eerst het gewichtsrooster[13] van $SU(2)$. De bolletjes in dit rooster komen overeen met de gewichten λ van de irreps van $SU(2)$. Het middelste onderdeel van de figuur geeft het gewichtsrooster van $SU(2)_k$, voor $k \rightarrow \infty$, weergegeven met behulp van een Weil-kamer die de hoogste gewichten Λ bevat [13]. Hier loopt Λ van 0 tot $k + 1$. Deze Weil-kamer heeft maar één wand, de andere wand ligt namelijk in het oneidige. We hebben nu eigenlijk gewoon te maken met $SU(2)$, de geïntroduceerde k heeft nog geen invloed. De dimensie behorende bij de Λ 's wordt daarom gegeven door:

$$d_\Lambda = \Lambda + 1 \quad (15)$$

¹De dimensie van de speciale unitaire groep $SU(n)$ is $\dim(SU(n)) = n^2 - 1$ [14].

²Voor de groep $SU(n)$ is het coxeter-getal $h = n$, deze waarden zijn ook in een tabellenboek voor groepen[14] op te zoeken.



Figuur 3: Gewichtsroosters: bovenaan het gewichtsrooster van $SU(2)$ met labels Λ ; daaronder het rooster van $SU(2)_k$ met een halve Weil-kamer en labels $0, 1, \dots$; onderaan het rooster van $SU(2)_4$ met volledige Weil-kamer. [15]

De volgende stap is dat we gaan kijken naar de quantumgroep $SU(2)_4$. Bij het introduceren van het level $k = 4$ zijn er verschillende eigenschappen die drastisch veranderen ten opzichte van $SU(2)$. Voor het gewichtsrooster is de verandering dat we een gesloten Weil-kamer krijgen. We krijgen een tweede muurtje bij $\Lambda = k + 1$, in ons geval $\Lambda = 5$. Het stuk binnen de Weil-kamer geeft nu de hoogste gewichten van de irreps van $SU(2)_4$. Deze Weil-kamer zullen we gebruiken om uit de tensorproductregels[13] van de groep $SU(2)$ de tensorproductregels, of fusieregels, van $SU(2)_4$ te krijgen. In de volgende vergelijkingen is te zien wat de Weil-kamer voor invloed heeft op deze regels:

$$\begin{aligned}
1 \times 1 &= 0 + 2 \\
2 \times 2 &= 0 + 2 + 4 \\
3 \times 3 &= 0 + 2 + 4 + 6 = 0 + 2 + 4 - 4 = 0 + 2 \\
4 \times 4 &= 0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 0 + 2 + 4 - 4 - 2 = 0 \\
1 \times 2 &= 1 + 3 \\
2 \times 3 &= 1 + 3 + 5 = 1 + 3 \\
3 \times 4 &= 1 + 3 + 5 + 7 = 1 + 3 - 3 = 1
\end{aligned} \tag{16}$$

Hier staan in eerste instantie de tensorproductregels van $SU(2)$ weergegeven, met een toevoeging als er door de Weil-kamer iets hierin verandert. Als uiteindelijke resultaat staan de fusieregels van $SU(2)_4$ weergegeven. Voor sommige regels is te zien dat er niets verandert. Wat er gebeurt is dat, als een product buiten de Weil-kamer valt, zoals in de derde regel gebeurt, dit product gespiegeld wordt in de scheidingslijn en geïdentificeerd met de inverse van het veld of deeltje dat daar staat. In de derde regel, bij 3×3 , gaat 6 dus naar -4 en haalt daarmee het veld 4 uit het resultaat. Hierdoor blijven alleen de velden 0 en 2 over. Voor sommige regels verandert er niets doordat de producten binnen de Weil-kamer blijven. Zo zijn alle fusieregels van deze quantumgroep te bepalen.

Belangrijk om op te merken is dat voor de tensorproducten van $SU(2)$ de dimensies behouden zijn. Het behoud van de dimensies in (16) controleren we met behulp van (15). Voor de eerste regel geldt voor de dimensies: $2 \cdot 2 = 1 + 3 = 4$, voor de tweede regel: $3 \cdot 3 = 1 + 3 + 5 = 9$ en zo verder.

De resulterende fusieregels van $SU(2)_4$ zijn te vinden in tabel 1. Hier zijn tevens de spinwaarden (13) en de quantumdimensies (14) van alle velden van deze quantumgroep weergegeven. Als we nu kijken naar deze fusieregels en de bijbehorende quantumdimensies, dan zien we dat deze ook behouden zijn, zoals vereist volgens (8). Voor de eerste twee fusieregels $1 \times 1 = 0 + 2$ en $1 \times 2 = 1 + 3$ zijn de bijbehorende dimensies als volgt: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 1 + 2 = 3$ en $\sqrt{3} \cdot 2 = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

$SU(2)_4$		
Λ	d_Λ	h_Λ
0	1	0
1	$\sqrt{3}$	1/8
2	2	1/3
3	$\sqrt{3}$	5/8
4	1	1

$1 \times 1 = 0 + 2$			
$1 \times 2 = 1 + 3$	$2 \times 2 = 0 + 2 + 4$		
$1 \times 3 = 2 + 4$	$2 \times 3 = 1 + 3$	$3 \times 3 = 0 + 2$	
$1 \times 4 = 3$	$2 \times 4 = 2$	$3 \times 4 = 1$	$4 \times 4 = 0$

Tabel 1: De quantumgroep $SU(2)_4$ weergegeven met fusieregels. Bovenaan staat de quantumgroep, daarna volgen drie kolommen met van links naar rechts de sectoren Λ , de quantumdimensies van deze sectoren d_Λ en de spinwaarden h_Λ . Onderaan staan de fusieregels.

4 Symmetriebreking

Veel informatie over de eigenschappen van een natuurkundig systeem is te halen uit de aanwezige symmetriën. Bij veranderingen binnen zulke systemen kan het zijn dat de symmetriën ook veranderen. Als er bij dergelijke veranderingen een overgang is van een toestand van het systeem met meer symmetrie naar een toestand met minder symmetrie noemen we dit symmetriebreking. Symmetriebreking is iets wat kan optreden als, bijvoorbeeld bij lage temperaturen, een systeem van de ene toestand spontaan overgaat naar een andere toestand, waarbij het aantal symmetriën in die laatste toestand is verminderd ten opzichte van de eerste. Het proces wat zich daarbij voordoet noemen we spontane symmetriebreking. Dit proces is interessant omdat aan de hand hiervan mogelijk meer van de eigenschappen van bepaalde systemen te bepalen zijn. We zouden door bijvoorbeeld de temperatuur te verlagen³ spontane symmetriebreking kunnen laten optreden. Door hierbij het brekingsproces en de resulterende toestand goed te bestuderen, kunnen we meer te weten komen over het systeem. Bij genoeg gegevens kan je het brekingsproces gaan voorspellen en uiteindelijk zou je aan de toestand van het systeem kunnen zien of je met de gebroken of juist met de ongebroken toestand te maken hebt en welke eigenschappen daarbij horen.

4.1 Breking

Het in het dagelijks leven meest bekende, en misschien wel meest voorkomende, voorbeeld van symmetriebreking is de faseovergang van water van vloeibare naar vaste toestand. De ongeordende toestand van vloeibaar water heeft hier een continue translatiesymmetrie. We gaan echter naar een toestand waarbij deze symmetrie niet meer bestaat. Vloeibaar water is homogeen en isotroop wat betekent dat het in alle richtingen en op alle plekken hetzelfde is. Het ene molecuul is in deze toestand niet van het andere molecuul te onderscheiden. Bij ijs is het echter zo dat de moleculen in een vast rooster terecht komen waardoor we opeens wel moleculen zouden kunnen onderscheiden; ijs is niet meer homogeen en isotroop. Door het rooster van de ijskristallen maakt het opeens wel uit in welke richting je kijkt. De oneindig symmetrische toestand gaat dus verloren, oftewel de symmetrie is gebroken. Dit is een simpele schets van een voorbeeld van symmetriebreking in het dagelijks leven. We gaan nu kijken naar een ander voorbeeld van symmetriebreking dat meer overeen komt met wat we in de rest van deze scriptie zullen gaan behandelen.

Het gaat in dit geval om de symmetriebreking die optreedt bij ferromagnetisme, een verschijnsel waarvan het resulterende effect veel in het dagelijks leven wordt gebruikt, maar de symmetriebreking zelf is niet zo zichtbaar als bij het bevriezen van water. Een ferromagneet kun je beschrijven met behulp van magnetische dipooltjes die de spins van de ongepaarde elektronen in het metaal representeren. In principe kunnen deze dipooltjes in iedere willekeurige richting wijzen en bij een voldoende hoge temperatuur doen ze dit ook. Het metaal is in dat geval niet gemagnetiseerd omdat alle dipooltjes in een andere richting wijzen, er is dus geen resulterend magnetisch veld. De symmetriën van de dipooltjes worden in dit geval beschreven door de symmetriegroep $SU(2)$.

³De manier van het bereiken van spontane symmetriebreking hangt af van het betreffende systeem.

Als het ferromagnetische materiaal echter afkoelt tot onder de *Curietemperatuur*⁴ vindt er spontane symmetriebreking plaats. De dipooltjes richten zich spontaan in dezelfde richting als hun burens en wijzen zo allemaal in dezelfde richting, er vindt spontane magnetisatie plaats in het materiaal, dit zorgt voor een resulterend magnetisch veld; we hebben nu een magneet. De uiteindelijke toestand van de dipooltjes in deze ferromagneet is te beschrijven met de symmetriegroep $U(1)$, onder deze groep van rotaties komt de richting waarin de spins wijzen. Deze groep heeft duidelijk minder symmetriën en is een ondergroep van $SU(2)$.

Bovenstaande vorm van spontane symmetriebreking vertoont veel overeenkomsten met het proces waar wij in geïnteresseerd zijn, alleen gaat het voor ons nu om quantumgroepen.

4.2 Symmetriebreking door middel van bosecondensatie

In het geval van quantumgroepen wordt de symmetriebreking bewerkstelligd door middel van de condensatie van een boson uit de te breken quantumgroep. Voordat we naar deze vorm van symmetriebreking gaan kijken daarom eerst, langs de lijn van [12], iets meer informatie over wat wij precies onder bosonen verstaan.

4.2.1 Bosonen

In 3+1 dimensies kunnen we bosonen beschrijven als deeltjes met heeltallige spin. Ook kunnen we zeggen dat deze deeltjes triviaal met elkaar kunnen verwisselen. Dit wil zeggen dat de golffunctie van een groot aantal dezelfde bosonen invariant is onder verwisseling van de bosonen. In 2+1 dimensies daarentegen zijn deze twee eigenschappen niet meer equivalent. Sterker nog, het kan zo zijn dat er bij de fusie van twee deeltjes meerdere mogelijke fusieproducten zijn en de verwisseling van de originele deeltjes kan triviaal maar ook niet-triviaal zijn afhankelijk van het fusiekanaal waar ze in zitten. Daarom is het niet direct uit de analogie met 3+1 dimensies te halen wat een boson in 2+1 dimensies is. Twee condities waaraan een boson in 2+1 dimensies moet voldoen zijn,

1. het boson moet triviale spin hebben (modulo gehele getallen)
2. het boson moet gedeeltelijke of volledige triviale eigen-monodromie hebben

Met gedeeltelijke eigen-monodromie bedoelen we dat het deeltje op z 'n minst één fusiekanaal in $a \times a$ moet hebben waarvoor de monodromie-factor gelijk is aan 1. In andere woorden, als $a \times a = \sum_c N_c^{aa} c$, dan moet er op z 'n minst één lading c in de som zijn zodat $\theta_c(\theta_a)^{-2} = 1$. Aangezien we al hadden gesteld dat $\theta_a = 1$, komt dit neer op de eis dat er een fusie kanaal c is met triviale spinfactor, $\theta_c = 1$. Beide condities zijn speciale gevallen van de meer algemene conditie:

Voor elk aantal N identieke deeltjes van type a moet er op zijn minst één toestand in de Hilbertruimte voor $a^{\times N}$ zijn, welke compleet invariant is onder monodromie.

Voor de groepen van deeltjes waar we naar zullen gaan kijken komt het erop neer dat voor een deeltje om een boson te kunnen zijn, de spin h_Λ van dit deeltje gelijk moet zijn aan een geheel getal. Als er een deeltje in de groep voorkomt dat aan deze eis voldoet dan kunnen we gaan kijken wat er zou gebeuren als we symmetriebreking toepassen op deze groep, waarover nu meer.

4.2.2 Brekingsmethode

We gaan nu kijken naar de methode die we kunnen gebruiken om de symmetrieën van topologische anyonsystemen te breken. Hierbij zullen we gebruik maken van de representaties van quantumgroepen zoals beschreven in hoofdstuk 3. We zullen weer gaan kijken naar de quantumgroep $SU(2)_4$ (langs de lijn van [12]).

Breking van $SU(2)_4$

Voor de symmetriebreking van $SU(2)_4$ hebben we de volgende gegevens nodig: de representaties van deze quantumgroep, de bijbehorende quantumdimensies, de fusieregels en de spins, zoals te vinden in tabel 2. Als we naar deze groep kijken zien we dat sector 4 een heeltallige spin heeft. Zoals volgt uit §4.2.1 hebben we hier dus te maken met een niet-triviaal boson. We willen dit boson laten condenseren, in termen van de quantumgroep betekent dit dat we 4 naar de grondtoestand willen laten gaan, oftewel we willen deze sector identificeren met het vacuüm: $4 \rightarrow 0$. Wat er nu gebeurt is weergegeven in tabel 3. Kijken we nu naar de fusieregels in deze tabel, dan zien we wat voor veranderingen de condensatie van 4 teweeg brengt. We kijken eerst naar de onderste regel fusieregels.

⁴De Curietemperatuur of het Curiepunt is de kritische temperatuur T_c waarboven een ferromagneet zijn ferromagnetische eigenschappen verliest.

$SU(2)_4$		
Λ	d_Λ	h_Λ
0	1	0
1	$\sqrt{3}$	1/8
2	2	1/3
3	$\sqrt{3}$	5/8
4	1	1

$1 \times 1 = 0 + 2$			
$1 \times 2 = 1 + 3$	$2 \times 2 = 0 + 2 + 4$		
$1 \times 3 = 2 + 4$	$2 \times 3 = 1 + 3$	$3 \times 3 = 0 + 2$	
$1 \times 4 = 3$	$2 \times 4 = 2$	$3 \times 4 = 1$	$4 \times 4 = 0$

Tabel 2: De groep $SU(2)_4$ weergegeven met fusieregels.

$SU(2)_4$ bosecondensatie			
$4 \rightarrow 0$			
$1 \times 1 = 0 + 2$			
$1 \times 2 = 1 + 3$	$2 \times 2 = 0 + 2 + 0$		
$1 \times 3 = 2 + 0$	$2 \times 3 = 1 + 3$	$3 \times 3 = 0 + 2$	
$1 \times 0 = 3$	$2 \times 0 = 2$	$3 \times 0 = 1$	$0 \times 0 = 0$

Tabel 3: De fusieregels weergegeven voor het geval dat sector 4 naar het vacuüm gaat.

Daar zien we vier keer een fusie met het vacuüm staan, waarbij de vierde keer het vacuüm met zichzelf fuseert. Bij fusie van een sector met het vacuüm is het per definitie (§2.2) zo dat er niets gebeurt met de originele sector (4). Voor sector 2 en voor het nieuwe vacuüm zien we, onderaan in tabel 3, dat de fusieregels met het nieuwe vacuüm zo correct zijn. Voor de sectoren 1 en 3 klopt het echter niet. Deze sectoren fuseren naar elkaar met het nieuwe vacuüm. Dit is de reden deze sectoren aan elkaar gekoppeld worden. We zeggen nu dat we deze sectoren met elkaar identificeren: $1 \leftrightarrow 3$. Kijken we nu naar de rest van de fusieregels, dan valt hier de fusie van 2 met zichzelf op, deze fusieregel heeft een bijzonder resultaat: $2 \times 2 = 0 + 2 + 0$. Het blijkt dat deze sector op twee manieren met zichzelf naar het vacuüm kan gaan en dit moet niet mogelijk zijn. Bij de condensatie zal dus een splitsing van sector 2 moeten plaatsvinden. Deze splitsing zal naar twee nieuwe sectoren zijn om de twee manieren van naar het vacuüm fuseren te verklaren: $2 \rightarrow 2_1 + 2_2$. Dit is genoeg omdat deze twee nieuwe sectoren dan ieder op hun eigen manier naar het vacuüm kunnen fuseren. Daarbij komt dat de dimensie van 2 ook niet groot genoeg is om naar meer sectoren te kunnen opsplitsen.⁵ Om nu vervolgens de juiste fusieregels van deze twee nieuwe sectoren te verkrijgen hebben we associativiteit (3) nodig. Dit laatste gedeelte van de symmetriebreking zal in het laatste deel van deze paragraaf aan bod komen.

We gaan nu kijken naar de fusieregels van sector 2 met zichzelf waarbij we ervan uitgaan dat deze opsplijst: $2 \rightarrow 2_1 + 2_2$. Als we dit invoegen in de fusieregel van 2 met zichzelf krijgen we:

$$\begin{aligned}
2 \times 2 &= (2_1 + 2_2) \times (2_1 + 2_2) \\
&= 2_1 \times 2_1 + 2_1 \times 2_2 + 2_2 \times 2_2 + 2_2 \times 2_1 \\
&= 0 + 2_1 + 2_2 + 0
\end{aligned} \tag{17}$$

Hieruit volgt dat er verschillende opties mogelijk zijn: het kan zijn dat de twee sectoren met elkaar, of dat ze met zichzelf anihileren. Dit zullen we nagaan door gebruik te maken van associativiteit,

⁵Er is hier sprake van de splitsing van sector 2 bij het breken van de quantumgroep. Deze splitsing is mogelijk omdat de dimensie van sector 2 precies groot genoeg is: $d_2 = 2$. De sector kan nu opsplitsen in twee sectoren met ieder een dimensie van $d_{2_1} = d_{2_2} = 1$. Sectoren of deeltjes met een dimensie kleiner dan één zijn geen reële deeltjes. Deze zouden een kleinere dimensie dan de vacuüm toestand hebben, het is makkelijk voor te stellen dat dit niet moet kunnen. Als gevolg hiervan kunnen deeltjes met een dimensie kleiner dan twee dus niet opsplitsen.

eerst uitgaande van het ene geval en dan van het ander geval.

Als de twee deeltjes met zichzelf anihileren $2_1 \times 2_1 = 2_2 \times 2_2 = 0$ dan moet gelden dat $2_1 \times 2_2 = 2_1$ en $2_2 \times 2_1 = 2_2$. Dit is echter in tegenspraak met zichzelf aangezien we weten dat het fusieproduct commutatief is (2). Deze optie valt dus af, de deeltjes zijn niet zelfanihilerend. Dan zal het zo zijn dat de deeltjes met elkaar anihileren. $2_1 \times 2_2 = 2_2 \times 2_1 = 0$

Om hier vervolgens de juiste fusieregels voor te achterhalen gaan we gebruik maken van associativiteit als volgt:

$$\begin{aligned}
2_1 \times (2_1 \times 2_2) &= (2_1 \times 2_1) \times 2_2 \\
&\Rightarrow 2_1 \times 0 = (2_1 \times 2_1) \times 2_2 \\
&\Rightarrow 2_1 = (2_1 \times 2_1) \times 2_2
\end{aligned} \tag{18}$$

waarin $2_1 \times 2_1 = 2_1 \vee 2_2$ (en $2_2 \times 2_2 = 2_2 \vee 2_1$). Als we dit uitwerken zien we dat we, voor $2_1 \times 2_1 = 2_1$, op een ongelijkheid uitkomen: $2_1 \times 2_2 = 0 \neq 2_1$ dus dan houden we maar één optie over die bij invullen consistent is: $2_1 \times 2_1 = 2_2 \wedge 2_2 \times 2_2 = 2_1$.

Als we al het voorgaande meenemen, dan komen we uiteindelijk uit op het overzicht in tabel 4 waar we zien dat alle deeltjes aan bepaalde restricties voldoen. Deze restricties kunnen identificaties met andere deeltjes of splitsingen zijn. Als we nu echter kijken naar de identificatie van sector 1 en 3,

$SU(2)_4$ gebroken		
Λ	d_Λ	h_Λ
$0 \rightarrow 0$	1	0
$1 \rightarrow 1$	$\sqrt{3}$	1/8
$2 \rightarrow 2_1 + 2_2$	$d_{2_1} = d_{2_2} = 1$	1/3
$3 \rightarrow 1$	$\sqrt{3}$	5/8
$4 \rightarrow 0$	0	0

$1 \times 1 = 0 + 2_1 + 2_2$		
$1 \times 2_1 = 1$	$2_1 \times 2_1 = 2_2$	
$1 \times 2_2 = 1$	$2_1 \times 2_2 = 0$	$2_2 \times 2_2 = 2_1$

Tabel 4: De gebroken groep $SU(2)_4$ weergegeven met uiteindelijke fusieregels.

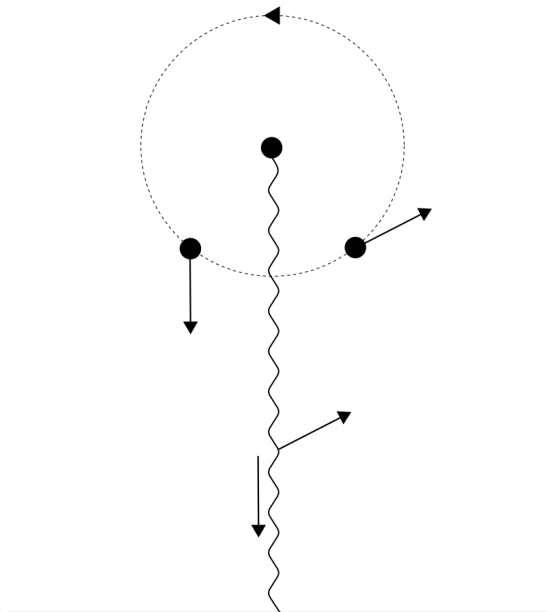
zien we dat bij de nieuwe sector 1, de spinwaarde h_1 eigenlijk niet goed bepaald is. Deze sector zou namelijk twee verschillende spinwaarden kunnen aannemen. Dit brengt ons bij de volgende en tevens laatste stap van de symmetriebreking.

4.3 Confinement

De volgende stap in het brekingsproces heeft voornamelijk te maken met de braidrelaties van de deeltjes. Hierbij speelt de spin van de verschillende deeltjes een grote rol. De verschillende gevonden excitaties in de gebroken fase zullen niet allemaal goed gedefinieerde spinwaarden hebben. Daarmee zijn niet alle deeltjes in de gebroken toestand goed of volledig gedefinieerd. Sommige deeltjes zullen als het ware een deel van de ongebroken toestand met zich mee willen brengen naar de gebroken toestand. We zeggen dan dat dit deeltje een staart heeft. Deze staart is dan nog verbonden met de ongebroken toestand. Wat er nu eigenlijk gebeurt is met behulp van figuur 4 beter te begrijpen. Hier zien we een niet goed gedefinieerd deeltje in de gebroken fase. Als we nu naar de monodromie van dit deeltje met het vacuüm kijken, dan zien we dat dit een scheiding in het condensaat met zich meebrengt, de staart. Deze staart kun je zien als een grens tussen verschillende domeinen zoals je die ook in een ongemagnetiseerde ferromagneet hebt. Hierbij zijn er verschillende gebieden waarvan de dipooltjes in dezelfde richting wijzen, bij een grens verspringt dan opeens de richting van de dipooltjes. Alle verschillende gebieden heffen elkaars magnetische veld op, waardoor de ferromagneet ongeladen is.

Het bestaan van een dergelijk deeltje met een staart kost energie omdat de energie van de staart evenredig is met zijn lengte. Iedere systeem streeft naar de energetisch meest voordelige toestand en dit deeltje wordt daarom dan ook uit de toestand gegooid. Door de vorming van het condensaat zal er confinement optreden, dit betekent dat de deeltjes die een staart hebben uit de gebroken fase worden gesloten.

Om niet confined te worden moet de monodromie van een deeltje in het condensaat triviaal zijn. Dit komt overeen met dat de braiding met het nieuwe vacuüm triviaal moet zijn. Als dit niet zo is,



Figuur 4: Confinement van anyonen: De monodromie van de vacuümsector, het deeltje zonder staart, met het deeltje met staart levert een grens op in de nieuwe toestand. De spinrichting aan beide kanten van deze grens is verschillend voor de vacuümsector, wat niet zou moeten kunnen. Voor het deeltje met staart treedt er dus confinement op.

dan is de nieuwe vacuümtoestand geen goed vacuüm. Verder verwachten we dat de deeltjes die niet uitgesloten worden goed gedefinieerde spin en fusieregels hebben, anders kunnen we niet spreken van een nieuwe fase. We verwachten dat we de spinfactoren van de deeltjes in de gebroken fase direct kunnen bepalen door deze deeltjes naar de ongebroken fase te liften⁶. Om niet confined te worden moet voor een deeltje de volgende regel gelden:

Als een deeltje a niet confined is, dan moeten alle lifts a^i gelijke spinfactoren hebben.

Excitatie die niet aan deze eis voldoen worden dus wel uitgesloten. Daarbij is het ook wel voor te stellen dat we geen spinfactor aan excitaties kunnen toewijzen die een staart maken. Als we deze zouden ronddraaien zou de staart in een zichtbare krul komen te liggen welke niet simpel met een andere spinfactor te beschrijven is. Verder willen we dat de verzameling van niet uitgesloten deeltjes een gesloten set is onder fusie en dat bij deze set ook het vacuüm is inbegrepen. Expliciet betekent dit dat alle lifts van de vacuümtoestand triviale spin hebben (modulo gehele getallen). Dit is in principe al het criterium wat we hadden gesteld bij het maken van het condensaat.

Toepassing van het confinement criterium in een voorbeeld.

Laten we nu kijken wat er gebeurt als we het confinementcriterium toepassen op ons voorbeeld, de gebroken toestand van de quantumgroep $SU(2)_4$. Hier zien we dat de deeltjes 0, 2_1 en 2_2 niet uitgesloten worden. Voor 2_1 en 2_2 is dit snel te zien aangezien deze velden één unieke lift hebben. Het vacuüm lift naar 0 of naar 4. Beide hebben een spin (factor) van 1, oftewel ook dit veld mag blijven. Dat is wel zo handig aangezien dit het vacuüm is, wat we ook nodig hebben om een gesloten set te krijgen. Het deeltje met label 1 wordt echter wel uitgesloten, aangezien deze lift naar 1 en 3, welke verschillende spin hebben. Het uiteindelijke resultaat staat weergegeven in tabel 5.

Wat bij nader onderzoek echter blijkt[12] is dat de eigenschappen van deze resulterende quantumgroep precies overeenkomen met de eigenschappen van een andere quantumgroep, namelijk $SU(3)_1$ weergegeven in tabel 6. Hier zien we dat de sectoren 2_1 en 2_2 precies hetzelfde zijn als 3 en $\bar{3}$, wat betreft quantumdimensies, spinfactoren en fusieregels. De vacuümtoestand wordt nu gegeven door

⁶Alle lifts van het deeltje a uit de gebroken groep zijn de deeltjes a^i in wiens restricties het deeltje voorkomt.

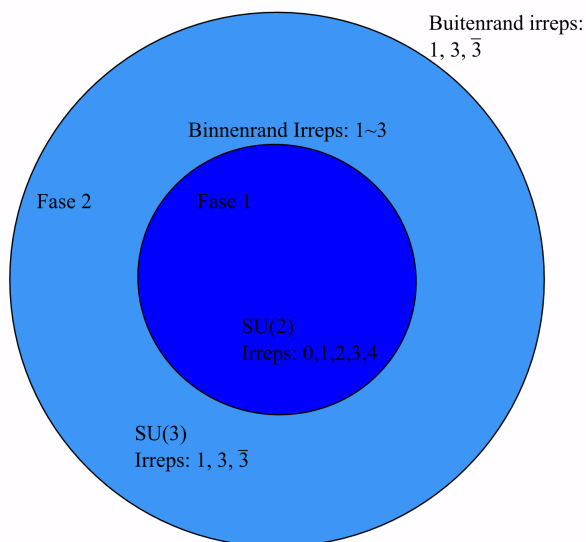
$SU(2)_4$ na confinement		
Λ	d_Λ	h_Λ
0	1	0
1	<i>confined</i>	–
2_1	1	$1/3$
2_2	1	$1/3$
$2_1 \times 2_1 = 2_2$		
$2_1 \times 2_2 = 0$		$2_2 \times 2_2 = 2_1$

Tabel 5: De quantumgroep $SU(2)_4$ na confinement weergegeven met uiteindelijke fusieregels.

een 1 in plaats van door een 0, maar dat is enkel een manier van schrijven. Het mooiste is misschien nog wel dat de bijbehorende centrale ladingen (12) van de quantumgroepen $SU(2)_4$ en $SU(3)_1$ hetzelfde zijn: $c = 2$. Waar we nu op uitkomen is dat, puur wiskundig gesproken, $SU(2)_4$ een inbedding is van $SU(3)_1$ zoals weergegeven in figuur 5 [12]. Nu kunnen we ook beter bedenken wat er gebeurt met de confined excitaties in de gebroken fase. Dit zijn de sectoren die op de rand tussen de twee toestanden voorkomen[16].

$SU(3)_1$		
Λ	d_Λ	h_Λ
1	1	0
3	1	$1/3$
$\bar{3}$	1	$1/3$
$3 \times 3 = \bar{3}$		
$3 \times \bar{3} = 0$		$\bar{3} \times \bar{3} = 3$

Tabel 6: De quantumgroep $SU(3)_1$ met fusieregels.



Figuur 5: Schets van een sample met twee verschillende fasen en een grensvlak. In het binnenste gebied hebben we $SU(2)_4$, met de sectoren gegeven in tabel 1. In het buitengebied is er de gecondenseerde $SU(3)_1$ fase, met de sectoren gegeven in tabel 6. Op de rand tussen fase 1 en fase 2 vinden we de excitaties gegeven in tabel 4. [12]

4.3.1 Breking en confinement van $SU(2)_8$

Een voorbeeld van een andere quantumgroep, met aanwezig boson, die volgens dezelfde regels als bij $SU(2)_4$ kan condenseren, is de quantumgroep $SU(2)_8$. Deze groep zal in hoofdstuk 5 een belangrijke rol spelen. Voor deze groep is in tabel 7 een overzicht gegeven van de aanwezige velden inclusief hun dimensies en spins. Hier is te zien dat het veld met label 8 een boson is⁷. Dit boson kunnen we laten condenseren en uit de fusieregels volgen dan de identificaties die in de rechter helft van tabel 7 staan weergegeven. Als vervolgens ook het confinementcriterium wordt toegepast, krijgen we het resultaat dat staat weergegeven in tabel 8. Deze resulterende algebra komt overeen met het directe product van twee Fibonacci theoriën: $SU(3)_2/Z_3 \otimes SU(3)_2/Z_3$. Voor een uitgebreidere behandeling van de breking en confinement van deze groep zie [12].

$SU(2)_8$			$SU(2)_8 \rightarrow$ gebroken		
Λ	d_Λ	h_Λ	Λ	d_Λ	h_Λ
0	1	0	$0 \rightarrow 0$	1	0
1	$\sqrt{(5+\sqrt{5})}/2$	$\frac{3}{40}$	$1 \rightarrow 1$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2}$	$\frac{3}{40}$
2	$(3+\sqrt{5})/2$	$\frac{1}{5}$	$2 \rightarrow 2$	$(3+\sqrt{5})/2$	$\frac{1}{5}$
3	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{2}{5}$	$3 \rightarrow 3$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{2}{5}$
4	$1+\sqrt{5}$	$\frac{3}{5}$	$4 \rightarrow 4_1 + 4_2$	$d_{4_1} = d_{4_2} = (1+\sqrt{5})/2$	$\frac{3}{5}$
5	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{7}{20}$	$5 \rightarrow 3$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{7}{20}$
6	$(3+\sqrt{5})/2$	$\frac{6}{5}$	$6 \rightarrow 2$	$(3+\sqrt{5})/2$	$\frac{6}{5}$
7	$\sqrt{(5+\sqrt{5})}/2$	$\frac{63}{40}$	$7 \rightarrow 1$	$\sqrt{(5+\sqrt{5})}/2$	$\frac{63}{40}$
8	1	2	$8 \rightarrow 0$	1	2

Tabel 7: De tabellen van de quantumgroep $SU(2)_8$ gewoon en gebroken.

$SU(2)_8$ confined		
$\Lambda \rightarrow \Lambda'$	d_Λ	h_Λ
$0 \rightarrow 0$	1	0
$1 \rightarrow$ <i>confined</i>	–	–
$2 \rightarrow 2$	$(3+\sqrt{5})/2$	$1/5$
$3 \rightarrow$ <i>confined</i>	–	–
$4 \rightarrow 4_1 + 4_2$	$d_{4_1} = d_{4_2} = (1+\sqrt{5})/2$	$3/5$
$2 \times 2 = 2 + 4_1 + 4_2$		
$2 \times 4_1 = 2 + 4_2 \quad 4_1 \times 4_1 = 0 + 4_1$		
$2 \times 4_2 = 2 + 4_1 \quad 4_1 \times 4_2 = 2 \quad 4_2 \times 4_2 = 0 + 4_2$		

Tabel 8: $SU(2)_8$ confined weergegeven met fusieregels.

5 Maverick

De maverick is een cosetconstructie[17] waarvan de gecondenseerde sector geen simpele stroom is. Dit wil zeggen dat de sector die condenseert niet enkel of geheel naar het vacuüm zal gaan. Bij de breking van $SU(2)_4$ (§4.2.2) zagen we dat het aanwezige boson direct naar de vacuümtoestand kon condenseren: $4 \rightarrow 0$. Een sector die op een dergelijke 'simpele' manier condenseert noemen we een simpele-stroom sector of een simpele-stroom boson. Indien een er geen sprake van een simpele-stroom boson is, zal de condensatie er wat ingewikkelder uit gaan zien:

$$a \rightarrow n_0^a a_0 + \sum_{i \neq 0} n_i^a a_i \quad (19)$$

⁷ $h_8 = 2$ is heeltallige spin wat erop wijst dat dit een boson is (§4.2.1)

Hier geldt $a_0 = 0$, oftewel a_0 is de vacuümtoestand. Verder geldt $n_0^a \geq 1$ en sommige van de n_i^a met $i \neq 0$ kunnen groter zijn dan nul. Alle sectoren a_i corresponderen met de sectoren uit de gebroken fase. Hier blijkt het boson dus niet alleen naar de vacuümtoestand te condenseren, tevens zullen er andere producten uit deze condensatie komen. Dit gebeurt voornamelijk als de dimensie van het boson groter is dan die van het vacuüm. Voor het gedeelte wat nu volgt is de voornaamste bron van informatie [12].

5.1 Maverickconstructie

We zullen nu gaan kijken naar hoe de maverick $SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$ is te construeren uit $SU(3)_2$ en $SU(2)_8$. Daarvoor zullen we eerst deze twee quantumgroepen opzetten, inclusief de details van de dimensies van de verschillende velden en de bijbehorende spins en fusieregels.

5.1.1 $SU(3)_2$

Ten eerste gaan we kijken naar de quantumgroep $SU(3)_2$ welke is afgeleid van de groep $SU(3)$. Voor $SU(2)$ hebben we gekeken hoe de fusieregels voor de $SU(2)_k$ quantumgroepen uit het gewichtsrooster en de tensorproductregels voor deze groep af te leiden zijn (§3.3). Voor $SU(3)_k$ gaat dit op een vergelijkbare manier, ditmaal echter met een gecompliceerder gewichtsrooster. Het rooster en de bijbehorende Weilkamer worden nu een tweedimensionaal rooster in plaats van een lijnrooster. De gegevens voor het bepalen van de fusieregels, de spins en de quantumdimensies (§2.2) zijn op te zoeken in [14]. De fusieregels staan weergegeven in tabel 9. De resulterende representatie van de quantumgroep $SU(3)_2$ staat in de linker helft van tabel 10.

$SU(3)_2$ fusieregels					
$3 \times 3 = \bar{3} + 6$					
$3 \times \bar{3} = 1 + 8$	$\bar{3} \times \bar{3} = 3 + \bar{6}$				
$3 \times 6 = 8$	$\bar{3} \times 6 = 3$	$6 \times 6 = \bar{6}$			
$3 \times \bar{6} = \bar{3}$	$\bar{3} \times \bar{6} = 8$	$6 \times \bar{6} = 1$	$\bar{6} \times \bar{6} = 6$		
$3 \times 8 = 3 + \bar{6}$	$\bar{3} \times 8 = \bar{3} + 6$	$6 \times 8 = \bar{3}$	$\bar{6} \times 8 = 3$	$8 \times 8 = 1 + 8$	

Tabel 9: De fusieregels van de quantumgroep $SU(3)_2$.

5.1.2 $SU(2)_8$

Ten tweede hebben we de gegevens van de quantumgroep $SU(2)_8$. Deze groep is op dezelfde manier als de quantumgroep $SU(2)_4$ te construeren (zie hoofdstuk 3), ook is deze groep op dezelfde manier te breken (§4.3). De representatie voor de quantumgroep die hieruit volgt is tevens te vinden in tabel 10. We hebben nu echter te maken met de quantumgroep $\overline{SU(2)_8}$. Deze groep werkt vrijwel hetzelfde als $SU(2)_8$ zelf, op een paar punten na, zie §5.2.

$SU(3)_2$			$SU(2)_8$		
Λ	d_Λ	h_Λ	Λ	d_Λ	h_Λ
1	1	0	0	1	0
3	$(1 + \sqrt{5})/2$	4/15	1	$\sqrt{(5 + \sqrt{5})}/2$	$\frac{3}{40}$
$\bar{3}$	$(1 + \sqrt{5})/2$	4/15	2	$(3 + \sqrt{5})/2$	$\frac{1}{5}$
6	1	2/3	3	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{3}{8}$
$\bar{6}$	1	2/3	4	$1 + \sqrt{5}$	$\frac{3}{5}$
8	$(1 + \sqrt{5})/2$	3/5	5	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{7}{8}$
			6	$(3 + \sqrt{5})/2$	$\frac{6}{5}$
			7	$\sqrt{(5 + \sqrt{5})}/2$	$\frac{63}{40}$
			8	1	2

Tabel 10: De tabellen van de quantumgroepen $SU(3)_2$ en $SU(2)_8$.

5.2 $SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$

Bij het opzetten van de cosetconstructie van deze twee quantumgroepen zijn er een aantal aspecten die we in beschouwing moeten nemen. Ten eerste zullen de verschillende velden van de coset nu twee labels krijgen in plaats van één. Een overzicht hiervan is te vinden in tabel 11. Ten tweede worden de dimensies van de oude velden met elkaar vermenigvuldigd om de dimensies van de nieuwe velden te verkrijgen. Verder is het zo dat de spins van de verschillende velden als het ware tegengesteld gericht zijn zodat die van $\overline{SU(2)_8}$ een minteken krijgen ten opzichte van die van $SU(2)_8$ om vervolgens opgeteld te worden bij die van $SU(3)_2$. Dit alles is ook terug te vinden in tabel 11.

$SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$					
Λ	d_Λ	h_Λ	Λ	d_Λ	h_Λ
(1, 0)	1	0	(6, 0), ($\overline{6}$, 0)	1	$\frac{2}{3}$
(1, 1)	$\sqrt{(5 + \sqrt{5})}/2$	$-\frac{3}{40}$	(6, 1), ($\overline{6}$, 1)	$\sqrt{(5 + \sqrt{5})}/2$	$\frac{2}{3} - \frac{3}{40} = \frac{71}{120}$
(1, 2)	$(3 + \sqrt{5})/2$	$-\frac{1}{5}$	(6, 2), ($\overline{6}$, 2)	$(3 + \sqrt{5})/2$	$\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$
(1, 3)	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	$-\frac{3}{80}$	(6, 3), ($\overline{6}$, 3)	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{2}{3} - \frac{3}{80} = \frac{7}{24}$
(1, 4)	$1 + \sqrt{5}$	$-\frac{3}{5}$	(6, 4), ($\overline{6}$, 4)	$1 + \sqrt{5}$	$\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{1}{15}$
(1, 5)	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	$-\frac{7}{80}$	(6, 5), ($\overline{6}$, 5)	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{2}{3} - \frac{7}{80} = -\frac{5}{24}$
(1, 6)	$(3 + \sqrt{5})/2$	$-\frac{6}{5}$	(6, 6), ($\overline{6}$, 6)	$(3 + \sqrt{5})/2$	$\frac{2}{3} - \frac{6}{5} = -\frac{8}{15}$
(1, 7)	$\sqrt{(5 + \sqrt{5})}/2$	$-\frac{63}{40}$	(6, 7), ($\overline{6}$, 7)	$\sqrt{(5 + \sqrt{5})}/2$	$\frac{2}{3} - \frac{63}{40} = -\frac{109}{120}$
(1, 8)	1	-2	(6, 8), ($\overline{6}$, 8)	1	$\frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$
(8, 0)	$(1 + \sqrt{5})/2$	$\frac{3}{5}$	(3, 0), ($\overline{3}$, 0)	$(1 + \sqrt{5})/2$	$\frac{4}{15}$
(8, 1)	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{3}{5} - \frac{3}{40} = \frac{21}{40}$	(3, 1), ($\overline{3}$, 1)	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{4}{15} - \frac{3}{40} = \frac{23}{120}$
(8, 2)	$2 + \sqrt{5}$	$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$	(3, 2), ($\overline{3}$, 2)	$2 + \sqrt{5}$	$\frac{4}{15} - \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$
(8, 3)	$\sqrt{(25 + 11\sqrt{5})}/2$	$\frac{3}{5} - \frac{3}{8} = \frac{9}{40}$	(3, 3), ($\overline{3}$, 3)	$\sqrt{(25 + 11\sqrt{5})}/2$	$\frac{4}{15} - \frac{3}{8} = -\frac{13}{120}$
(8, 4)	$3 + \sqrt{5}$	$\frac{3}{5} - \frac{3}{5} = 0$	(3, 4), ($\overline{3}$, 4)	$3 + \sqrt{5}$	$\frac{4}{15} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{3}$
(8, 5)	$\sqrt{(25 + 11\sqrt{5})}/2$	$\frac{3}{5} - \frac{7}{8} = -\frac{11}{40}$	(3, 5), ($\overline{3}$, 5)	$\sqrt{(25 + 11\sqrt{5})}/2$	$\frac{4}{15} - \frac{7}{8} = -\frac{73}{120}$
(8, 6)	$2 + \sqrt{5}$	$\frac{3}{5} - \frac{6}{5} = -\frac{3}{5}$	(3, 6), ($\overline{3}$, 6)	$2 + \sqrt{5}$	$\frac{4}{15} - \frac{6}{5} = -\frac{14}{15}$
(8, 7)	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{3}{5} - \frac{63}{40} = -\frac{39}{40}$	(3, 7), ($\overline{3}$, 7)	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{4}{15} - \frac{63}{40} = -\frac{157}{120}$
(8, 8)	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$\frac{3}{5} - 2 = -\frac{7}{5}$	(3, 8), ($\overline{3}$, 8)	$(1 + \sqrt{5})/2$	$\frac{4}{15} - 2 = -\frac{26}{15}$

Tabel 11: Alle velden van de maverick $SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$ met quantumdimensie en spin.

5.3 $SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$ breking

Het breken van $SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$ doen we door middel van het condenseren van de twee niet-triviale bosonen in deze groep: (1, 8) en (8, 4) (§4.2.1). Om dit te doen moeten we iedere sector uit de groep met (1, 8) en (8, 4) laten fuseren en zo achterhalen welke restricties voor de verschillende sectoren hieruit volgen. We zouden allereerst alle sectoren met het simpele-stroom boson (1, 8) kunnen laten fuseren. Deze bewerking laat de groeps-elementen van $SU(3)_2$ echter ongemoeid. Hierdoor komt dit eigenlijk overeen met het breken van $SU(2)_8$. De restricties die hieruit volgen zijn de restricties die we ook verkrijgen als we iedere sector uit de groep met het niet-simpele-stroom boson (8, 4) laten fuseren:

$$\begin{aligned}
(1, 0) \times (8, 4) &= (1, 8) \times (8, 4) = (8, 4) \\
(1, 1) \times (8, 4) &= (1, 7) \times (8, 4) = (8, 3) + (8, 5) \\
(1, 2) \times (8, 4) &= (1, 6) \times (8, 4) = (8, 2) + (8, 4) + (8, 6) \\
(1, 3) \times (8, 4) &= (1, 5) \times (8, 4) = (8, 1) + (8, 3) + (8, 5) + (8, 7) \\
(1, 4) \times (8, 4) &= (8, 0) + (8, 2) + (8, 4) + (8, 6) + (8, 8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(8, 0) \times (8, 4) &= (8, 8) \times (8, 4) = (1, 4) + (8, 4) \\
(8, 1) \times (8, 4) &= (8, 7) \times (8, 4) = (1, 3) + (1, 5) + (8, 3) + (8, 5) \\
(8, 2) \times (8, 4) &= (8, 6) \times (8, 4) = (1, 2) + (1, 4) + (1, 6) + (8, 2) + (8, 4) + (8, 6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(8, 3) \times (8, 4) &= (8, 5) \times (8, 4) = (1, 1) + (1, 3) + (1, 5) + (1, 7) + (8, 1) + (8, 3) + (8, 5) + (8, 7) \\
(8, 4) \times (8, 4) &= (1, 0) + (1, 2) + (1, 4) + (1, 6) + (1, 8) + (8, 0) + (8, 2) + (8, 4) + (8, 6) + (8, 8)
\end{aligned}$$

In andere woorden, uit deze fusieregels volgen de volgende restricties:

$$\begin{aligned}
(1, 0) &= (1, 8) & (8, 0) &= (8, 8) \\
(1, 1) &= (1, 7) & (8, 1) &= (8, 7) \\
(1, 2) &= (1, 6) & (8, 2) &= (8, 6) \\
(1, 3) &= (1, 5) & (8, 3) &= (8, 5) \\
(1, 4) &= (?, ?) & (8, 4) &= (?, ?)
\end{aligned} \tag{20}$$

We zien nu dat er voor de meeste van deze velden al een duidelijke restrictie geldt. Een deel van de velden wordt geïdentificeerd met een ander veld, analoog aan de breking van $SU(2)_8$. Alleen voor de velden $(1, 4)$ en $(8, 4)$ volgen niet direct duidelijke restricties na fusie met het nieuwe vacuümveld. Van $(8, 4)$ weten we dat het geen boson is dat volgens een eenvoudige stroom condenseert. Maar voor we daar meer over kunnen zeggen hebben we eerst meer gegevens nodig over de restricties van de andere velden. Laten we eerst het veld $(1, 4)$ nader onderzoeken. Als we kijken naar de fusie van dit veld met zichzelf: $(1, 4) \times (1, 4) = (1, 0) + (1, 2) + (1, 4) + (1, 6) + (1, 8) = (1, 0) + (1, 2) + (1, 4) + (1, 2) + (1, 0)$, zien we dat $(1, 4)$ op twee manieren met zichzelf naar het vacuüm van de gecondenseerde toestand kan fuseren. Dit moet niet mogelijk zijn (§4.2.2). Dit veld splitst op in twee nieuwe toestanden. De fusie van het veld is verder symmetrisch, de dimensie is groter dan 2 en het veld zal dan ook, net als we zagen bij de breking van $SU(2)_4$ voor het veld met label 2 (§4.2.2), in twee delen opsplitsen: $(1, 4) \rightarrow (1, 4)_1 + (1, 4)_2$, beide met gelijke dimensie: $d_{(1,4)_1} = d_{(1,4)_2} = \frac{d_{(1,4)}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Als we nu beter kijken naar de velden $(8, \lambda)$ dan zien we dat, bij de fusie van de velden met $2 \leq \lambda \leq 6$ met zichzelf, naast het originele vacuüm ook het veld $(8, 4)$ voorkomt. Dit betekent dat deze velden in de nieuwe toestand op twee manieren naar het vacuüm kunnen overgaan, net als hiervoor leidt dit tot opsplitsing van deze velden. Een direct gevolg van deze splitsingen is dat de velden $(3, \lambda)$ en $(\bar{3}, \lambda)$ met dezelfde waarden van λ ook moeten splitsen aangezien deze te krijgen zijn uit de simpele-stroom fusie van $(8, \lambda)$ met $(6, 0)$ en $(\bar{6}, 0)$, hierover later meer.

Als we enkel kijken naar de dimensies van de velden zien we dat er 18 velden sowieso niet kunnen splitsen daar $d_\lambda < 2$, waardoor deze velden nooit kunnen opsplitsen in twee (of meer) velden met ieder $d_{\lambda'} \geq 1$. Dit zijn de sectoren $(\lambda, 0 \vee 8)$ en $(1 \vee 6 \vee \bar{6}, 1 \vee 7)$.

Voor het veld $(1, 2)$ zien we dat dimensioneel gezien er een splitsing zou kunnen plaatsvinden. Maar we weten dat hiervoor de fusie van het veld met zichzelf twee keer de vacuümtoestand moet opleveren. Kijken we nu naar deze fusieregel: $(1, 2) \times (1, 2) = (1, 0) + (1, 2) + (1, 4) = (1, 0) + (1, 2)_1 + (1, 2)_2 + (1, 4)$ dan zien we dat hier in ieder geval eenmaal het vacuüm in voorkomt. Om te kunnen splitsen moet verder dus óf $(1, 4)$ óf één van de componenten van $(1, 2)$ naar de vacuümtoestand overgaan. Echter, beide velden hebben niet-triviale spin, daardoor is het voor $(1, 2)$ niet mogelijk om op te splitsen in de nieuwe toestand. Dit veld blijft dus zoals het is, wat belangrijke informatie is voor hetgeen nu volgt.

We weten dat de splitsing van $(8, 4)$ er ongeveer als volgt uit zou moeten zien (19):

$$\begin{aligned}
(8, 4) &\rightarrow (1, 0) + \sum_{\lambda, \lambda'} n_{\lambda\lambda'} (\lambda, \lambda') \\
\lambda &= 1, 3, \bar{3}, 6, \bar{6}, 8, \lambda' = 1, \dots, 8
\end{aligned} \tag{21}$$

waar we zien dat we in ieder geval het vacuüm $(1, 0)$ houden. Maar de dimensie van $(8, 4)$, $d_{(8,4)} = 3 + \sqrt{5}$, is veel groter dan één. We hebben duidelijk meer informatie nodig. Als we kijken naar de fusieregels van het gecondenseerde veld $(8, 4)$ met de velden $(1, \lambda)$, zien we dat voor een even waarde van λ geldt: $(8, 4) \in (1, \lambda) \times (8, 4)$. Hieruit volgt dat deze velden en daarmee de restricties van deze velden met elkaar verbonden zijn.

Aangezien $(8, 4)$ het triviale veld in zijn restrictie heeft, impliceert het bovenstaande dat $(8, 4)$, naast de restrictie van $(1, 0)$, tevens restricties van de duale velden van $(1, 2)$ en $(1, 4)$ heeft. Het duale veld van een veld is dat veld waarmee de fusie naar het vacuüm plaatsvindt. Aangezien deze velden met zichzelf naar het vacuüm fuseren, bevat $(8, 4)$ restricties van de velden $(1, 2)$ en $(1, 4)$ zelf. Nu is het belangrijk dat we weten dat het veld $(1, 2)$ niet opsplijt, want dit betekent dat $(8, 4)$ de volledige

restrictie van dit veld krijgt.

Kijken we nu naar de dimensie van $(8, 4)$ en de overgebleven dimensie na het aftrekken van de dimensies van $(1, 0)$ en $(1, 2)$, dan zien we dat van de originele dimensie van $(8, 4)$ nog $d_{(8,4)} - d_{(1,0)} - d_{(1,2)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ over is. Waarbij $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$, wat betekent dat we wat dimensie betreft enkel nog genoeg over hebben voor één veld, oftewel we weten nu dat $(8, 4)$ naar precies drie velden opsplits volgt:

$$(8, 4) \rightarrow (1, 0) + (1, 2) + (8, 4)_3 \quad (22)$$

Hierbij weten we dat de quantumdimensie van $(8, 4)_3$ gelijk is aan $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Op een dergelijke manier, door fusie van $(8, 4)$ met de velden $(8, \lambda)$, komen we erachter dat de velden $(8, 0)$ en $(8, 2)$ ook, op z'n minst een deel van, hun restricties gemeen hebben met $(8, 4)$. Hieruit blijkt dat er meer restricties moeten gelden dan je op het eerste gezicht zou zeggen en dat de overige $(8, \lambda)$ velden (waar $\lambda \neq 4$) ook zullen splitsen of identificaties krijgen met de $(1, \lambda')$ velden, waar λ' niet perse gelijk is aan λ .

Om nu ook het veld $(8, 4)_3$ te vinden, gaan we kijken naar de restricties die te maken hebben met het veld $(1, 4)$. Van dit veld hebben we al gezien dat het opsplitst naar twee gelijke velden: $(1, 4) \rightarrow (1, 4)_1 + (1, 4)_2$. Beide velden hebben de juiste dimensie. Dus we kunnen ervan uitgaan dat het één van deze twee velden gaat worden. We willen hier zekerheid in hebben, daarom gaan we eerst kijken naar de fusie van $(1, 4)$ met $(8, 0)$:

$$\begin{aligned} (1, 4) \times (8, 0) &= (8, 4) \equiv (1, 0) + (1, 2) + (8, 4)_3 & (23) \\ ((1, 4)_1 + (1, 4)_2) \times (8, 0) &= (1, 4)_1 \times (8, 0) + (1, 4)_2 \times (8, 0) \end{aligned}$$

Als we deze twee vergelijkingen met elkaar vergelijken, volgt uit de fusieregels voor deze velden dat we $(8, 0)$ kunnen identificeren met ofwel $(1, 4)_1$ ofwel $(1, 4)_2$. Dit komt doordat de quantumgroep $SU(2)_8$ invariant is onder verwisseling van deze twee velden. We kunnen nu dus gewoon een arbitraire keuze maken tussen de twee velden. Laten we daarom bij deze zeggen dat $(8, 0) \equiv (1, 4)_1$. Vullen we dit in, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} (1, 4) \times (8, 0) &\equiv (1, 4)_1 \times (1, 4)_1 + (1, 4)_2 \times (1, 4)_1 & (24) \\ &= (1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1 \end{aligned}$$

Hieruit volgt direct de identificatie waar we naar zochten: $(8, 4)_3 \rightarrow (1, 4)_1$, wat de volgende, dimensioneel en naar restrictie correcte, splitsing geeft voor het gecondenseerde veld:

$$(8, 4) \rightarrow (1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1 \quad (25)$$

Vullen we deze gegeven vervolgens in bij de fusieregels waar we mee begonnen, dan zien we het volgende:

$$\begin{aligned} (1, 0) \times [(1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1] &= (1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1 \\ (1, 1) \times [(1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1] &= (8, 3) + (8, 3) \\ (1, 2) \times [(1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1] &= (8, 2) + (1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1 + (8, 2) \\ (1, 3) \times [(1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1] &= (8, 1) + (8, 3) + (8, 3) + (8, 1) \\ [(1, 4)_1 + (1, 4)_2] \times [(1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1] &= (8, 0) + (8, 2) + (1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1 + (8, 2) + (8, 0) \\ (8, 0) \times [(1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1] &= (1, 4)_1 + (1, 4)_2 + (1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1 \\ (8, 1) \times [(1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1] &= (1, 3) + (1, 3) + (8, 3) + (8, 3) \\ (8, 2) \times [(1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1] &= (1, 2) + (1, 4)_1 + (1, 4)_2 + (1, 2) + (8, 2) + (1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1 + (8, 2) \\ (8, 3) \times [(1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1] &= (1, 1) + (1, 3) + (1, 3) + (1, 1) + (8, 1) + (8, 3) + (8, 3) + (8, 1) \\ (1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1 \times [(1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1] &= (1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1 + (1, 4)_2 + (1, 2) + (1, 0) + (8, 0) + (8, 2) + (1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1 + (8, 2) + (8, 0) \end{aligned}$$

Uit deze fusieregels, maar eigenlijk veel makkelijker en sneller uit de volgende paar vergelijkingen:

$$\begin{aligned} (8, 1) &= (8, 0) \times (1, 1) \equiv (1, 4)_1 \times (1, 1) = (1, 3) \\ (8, 2) &\equiv (1, 4)_1 \times (1, 2) = (1, 2) + (1, 4)_2 \\ (8, 3) &\equiv (1, 4)_1 \times (1, 3) = (1, 1) + (1, 3) \end{aligned}$$

verkrijgen we uiteindelijk de volgende identificaties en splitsingen:

$$(8, 0) \rightarrow (1, 4)_1$$

$$\begin{aligned}
(8, 1) &\rightarrow (1, 3) \\
(8, 2) &\rightarrow (1, 2) + (1, 4)_2 \\
(8, 3) &\rightarrow (1, 1) + (1, 3)
\end{aligned} \tag{26}$$

Dit geeft samen met de identificaties die we eerder al hadden gevonden als tussenresultaat tabel 12. Wat nu nog mist om de breking van de maverick compleet te maken zijn de restricties en identificaties

$SU(3)_2 \times \overline{SU(2)}_8 \rightarrow$ breking/identificatie	
$\Lambda \rightarrow \Lambda'$	$\Lambda \rightarrow \Lambda'$
$(1, 0), (1, 8) \rightarrow (1, 0) \equiv 1$	$(8, 0), (8, 8) \rightarrow (1, 4)_1$
$(1, 1), (1, 7) \rightarrow (1, 1)$	$(8, 1), (8, 7) \rightarrow (1, 3)$
$(1, 2), (1, 6) \rightarrow (1, 2)$	$(8, 2), (8, 6) \rightarrow (1, 2) + (1, 4)_2$
$(1, 3), (1, 5) \rightarrow (1, 3)$	$(8, 3), (8, 5) \rightarrow (1, 1) + (1, 3)$
$(1, 4) \rightarrow (1, 4)_1 + (1, 4)_2$	$(8, 4) \rightarrow (1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1$

Tabel 12: Breking en identificatie van het eerste deel van $SU(3)_2 \times \overline{SU(2)}_8$.

voor de volgende velden: $(3, 1\dots 8)$, $(\bar{3}, 1\dots 8)$, $(6, 1\dots 8)$ en $(\bar{6}, 1\dots 8)$.

Als we naar de fusie van deze velden met het gecondenseerd veld kijken, vinden we al snel de volgende identificaties:

$$\begin{aligned}
(6, 0) &= (6, 8), (\bar{6}, 0) = (\bar{6}, 8), (3, 0) = (3, 8) \text{ en } (\bar{3}, 0) = (\bar{3}, 8) \\
(6, 1) &= (6, 7), (\bar{6}, 1) = (\bar{6}, 7), (3, 1) = (3, 7) \text{ en } (\bar{3}, 1) = (\bar{3}, 7) \\
(6, 2) &= (6, 6), (\bar{6}, 2) = (\bar{6}, 6), (3, 2) = (3, 6) \text{ en } (\bar{3}, 2) = (\bar{3}, 6) \\
(6, 3) &= (6, 5), (\bar{6}, 3) = (\bar{6}, 5), (3, 3) = (3, 5) \text{ en } (\bar{3}, 3) = (\bar{3}, 5) \\
(6, 4) &= (?, ?), (\bar{6}, 4) = (?, ?), (3, 4) = (?, ?) \text{ en } (\bar{3}, 4) = (?, ?)
\end{aligned} \tag{27}$$

Hiermee hebben we echter nog niet alle informatie die nodig is om het gedrag van deze velden in de gebroken fase geheel te beschrijven. Uit de volgende vergelijkingsreeksen volgt al snel meer duidelijkheid: $(6, 0) \times (8, \lambda) = (\bar{3}, \lambda)$ en $(\bar{6}, 0) \times (8, \lambda) = (3, \lambda)$ in combinatie met de overgangen $(8, \lambda) \rightarrow \sum_i n_i(1, \lambda_i)$ geeft dat: $(\bar{3}, \lambda) \rightarrow \sum_i n_i(6, \lambda_i)$ en $(3, \lambda) \rightarrow \sum_i n_i(\bar{6}, \lambda_i)$.

Als we dit vertalen naar rechtoe rechtaan identificaties, geeft dit:

$$\begin{aligned}
(\bar{3}, 0) &\rightarrow (6, 4)_1 & (3, 0) &\rightarrow (\bar{6}, 4)_1 \\
(\bar{3}, 1) &\rightarrow (6, 3) & (3, 1) &\rightarrow (\bar{6}, 3) \\
(\bar{3}, 2) &\rightarrow (6, 2) + (6, 4)_2 & (3, 2) &\rightarrow (\bar{6}, 2) + (\bar{6}, 4)_2 \\
(\bar{3}, 3) &\rightarrow (6, 1) + (6, 3) & (3, 3) &\rightarrow (\bar{6}, 1) + (\bar{6}, 3) \\
(\bar{3}, 4) &\rightarrow (6, 0) + (6, 2) + (6, 4)_1 & (3, 4) &\rightarrow (\bar{6}, 0) + (\bar{6}, 2) + (\bar{6}, 4)_1
\end{aligned}$$

We zien dus dat de velden $(3, 2)$, $(\bar{3}, 2)$, $(3, 3)$, $(\bar{3}, 3)$, $(3, 4)$ en $(\bar{3}, 4)$ opsplitsen zoals eerder al werd geïmpliceerd. Hierbij hebben de velden $(6, \lambda)$ en $(\bar{6}, \lambda)$ eenzelfde rol als de velden $(1, \lambda)$ eerder ook hadden, ter vergelijking zie de rechter helft van tabel 12. Verder zien we dat de velden $(6, 4)$ en $(\bar{6}, 4)$ beiden opsplitsen.

$$(6, 4) = (6, 4)_1 + (6, 4)_2 \text{ en } (\bar{6}, 4) = (\bar{6}, 4)_1 + (\bar{6}, 4)_2 \tag{28}$$

Hiermee komt het geheel uiteindelijk neer op de set van identificaties en restricties die te vinden zijn in tabel 13. Met als eindresultaat, de gebroken quantumgroep, welke te vinden is in tabel 14.

5.4 $SU(3)_2 \times \overline{SU(2)}_8$ confinement

Nu dat we de gebroken fase van de maverickconstructie hebben gevonden kunnen we gaan kijken naar de laatste stap van het symmetriebrekingproces: confinement. Hiervoor gaan we te werk zoals in §4.3 beschreven staat. De sectoren $(1, 1)$ en $(1, 3)$ blijken bij de volgende lifts $(1, 1) \rightarrow (1, 1)$, $(1, 7)$ en $(1, 3) \rightarrow (1, 3)$, $(1, 5)$ geen goed gedefinieerde spin te hebben. De sectoren waarnaar gelift wordt moeten dezelfde spin hebben als de gelifte sector (modulo gehele getallen). Als dit niet het geval is dan treedt confinement op (§4.3). Voor de sectoren $(6, 1)$, $(6, 3)$, $(\bar{6}, 1)$ en $(\bar{6}, 3)$ treedt ook confinement op, dit blijkt uit de volgende lifts:

$$\begin{aligned}
(6, 1) &\rightarrow (6, 1), (6, 7) & (\bar{6}, 1) &\rightarrow (\bar{6}, 1), (\bar{6}, 7) \\
(6, 3) &\rightarrow (6, 3), (6, 5) & (\bar{6}, 3) &\rightarrow (\bar{6}, 3), (\bar{6}, 5)
\end{aligned}$$

$SU(3)_2 \times SU(2)_8 \rightarrow$ breking	
$\Lambda \rightarrow \Lambda'$	$\Lambda \rightarrow \Lambda'$
$(1, 0), (1, 8) \rightarrow (1, 0) \equiv 1$	$(8, 0), (8, 8) \rightarrow (1, 4)_2$
$(1, 1), (1, 7) \rightarrow (1, 1)$	$(8, 1), (8, 7) \rightarrow (1, 3)$
$(1, 2), (1, 6) \rightarrow (1, 2)$	$(8, 2), (8, 6) \rightarrow (1, 2) + (1, 4)_2$
$(1, 3), (1, 5) \rightarrow (1, 3)$	$(8, 3), (8, 5) \rightarrow (1, 1) + (1, 3)$
$(1, 4) \rightarrow (1, 4)_1 + (1, 4)_2$	$(8, 4) \rightarrow (1, 0) + (1, 2) + (1, 4)_1$
$(\bar{6}, 0), (\bar{6}, 8) \rightarrow (\bar{6}, 0)$	$(\bar{3}, 0), (\bar{3}, 8) \rightarrow (\bar{6}, 4)_2$
$(\bar{6}, 1), (\bar{6}, 7) \rightarrow (\bar{6}, 1)$	$(\bar{3}, 1), (\bar{3}, 7) \rightarrow (\bar{6}, 3)$
$(\bar{6}, 2), (\bar{6}, 6) \rightarrow (\bar{6}, 2)$	$(\bar{3}, 2), (\bar{3}, 6) \rightarrow (\bar{6}, 2) + (\bar{6}, 4)_2$
$(\bar{6}, 3), (\bar{6}, 5) \rightarrow (\bar{6}, 3)$	$(\bar{3}, 3), (\bar{3}, 5) \rightarrow (\bar{6}, 1) + (\bar{6}, 3)$
$(\bar{6}, 4) \rightarrow (\bar{6}, 4)_1 + (\bar{6}, 4)_2$	$(\bar{3}, 4) \rightarrow (\bar{6}, 0) + (\bar{6}, 2) + (\bar{6}, 4)_1$
$(\bar{\bar{6}}, 0), (\bar{\bar{6}}, 8) \rightarrow (\bar{\bar{6}}, 0)$	$(\bar{3}, 0), (\bar{3}, 8) \rightarrow (6, 4)_2$
$(\bar{\bar{6}}, 1), (\bar{\bar{6}}, 7) \rightarrow (\bar{\bar{6}}, 1)$	$(\bar{3}, 1), (\bar{3}, 7) \rightarrow (6, 3)$
$(\bar{\bar{6}}, 2), (\bar{\bar{6}}, 6) \rightarrow (\bar{\bar{6}}, 2)$	$(\bar{3}, 2), (\bar{3}, 6) \rightarrow (6, 2) + (6, 4)_2$
$(\bar{\bar{6}}, 3), (\bar{\bar{6}}, 5) \rightarrow (\bar{\bar{6}}, 3)$	$(\bar{3}, 3), (\bar{3}, 5) \rightarrow (6, 1) + (6, 3)$
$(\bar{\bar{6}}, 4) \rightarrow (\bar{\bar{6}}, 4)_1 + (\bar{\bar{6}}, 4)_2$	$(\bar{3}, 4) \rightarrow (6, 0) + (6, 2) + (6, 4)_1$

Tabel 13: Breking van $SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$.

$SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$ gebroken		
$\Lambda(\lambda, \lambda')$	d_Λ	h_Λ
$(1, 0)$	1	0
$(1, 1)$	$\sqrt{(5 + \sqrt{5})}/2$	37/40
$(1, 2)$	$(3 + \sqrt{5})/2$	4/5
$(1, 3)$	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	5/8
$(1, 4)_2$	$(1 + \sqrt{5})/2$	2/5
$(\bar{6}, 0), (\bar{\bar{6}}, 0)$	1	2/3
$(\bar{6}, 1), (\bar{\bar{6}}, 1)$	$\sqrt{(5 + \sqrt{5})}/2$	71/120
$(\bar{6}, 2), (\bar{\bar{6}}, 2)$	$(3 + \sqrt{5})/2$	7/15
$(\bar{6}, 3), (\bar{\bar{6}}, 3)$	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	7/24
$(\bar{6}, 4)_1, (\bar{\bar{6}}, 4)_1$	$(1 + \sqrt{5})/2$	1/15
$(\bar{6}, 4)_2, (\bar{\bar{6}}, 4)_2$	$(1 + \sqrt{5})/2$	1/15

Tabel 14: $SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$ gebroken.

Voor de sectoren $(1, 2)$, $(1, 4)_1$, $(6, 2)$, $(6, 4)_1$, $(\bar{6}, 2)$ en $(\bar{6}, 4)_1$ is het nagaan van het confinementcriterium lastiger omdat deze velden in veel splits- en of identificatieregels voorkomen. Maar als we de lifts van deze sectoren met elkaar vergelijken blijkt dat ook nu de bijbehorende spins niet goed gedefinieerd zijn in de nieuwe toestand en dat dus ook voor deze velden confinement optreedt. Daarmee blijven er maar 6 velden over waarvoor de spins wel goed gedefinieerd zijn, deze velden zijn terug te vinden in tabel 15. In deze tabel staan tevens de overgebleven fusieregels.

Deze fusiealgebra, welke de gebroken of lage energie fase van het systeem karakteriseert, komt overeen met andere algebra's. Want wat nu blijkt is dat de zes overgebleven velden precies dezelfde quantumdimensies, spinwaarden en fusieregels hebben als de velden van het *chiral three states Potts model* [12]. Daarmee blijkt ook voor een gecompliceerd systeem als de maverickconstructie $SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$ een onderliggende symmetrie te bestaan.

6 Conclusie

In deze scriptie hebben we anyonische systemen, oftewel systemen met topologische orde, bestudeerd. We hebben gekeken naar wat voor regels er gelden voor deze systemen (hoofdstuk 2), volgend uit de

$SU(3)_2 \times SU(2)_8$ confined		
$\Lambda(\lambda, \lambda')$	d_Λ	h_Λ
$(1, 0)$	1	0
$(\bar{6}, 0)$	1	2/3
$(\bar{6}, 0)$	1	2/3
$(1, 4)_2$	$(1 + \sqrt{5})/2$	2/5
$(\bar{6}, 4)_2$	$(1 + \sqrt{5})/2$	1/15
$(\bar{6}, 4)_2$	$(1 + \sqrt{5})/2$	1/15
$(\bar{6}, 0) \times (\bar{6}, 0) = (\bar{6}, 0)$		$(1, 4)_2 \times (1, 4)_2 = (1, 0) + (1, 4)_2$
$(\bar{6}, 0) \times (\bar{6}, 0) = (1, 0)$		$(1, 4)_2 \times (\bar{6}, 4)_2 = (\bar{6}, 0) + (\bar{6}, 4)_2$
$(\bar{6}, 0) \times (1, 4)_2 = (\bar{6}, 4)_2$		$(1, 4)_2 \times (\bar{6}, 4)_2 = (\bar{6}, 0) + (\bar{6}, 4)_2$
$(\bar{6}, 0) \times (\bar{6}, 4)_2 = (\bar{6}, 4)_2$		
$(\bar{6}, 0) \times (\bar{6}, 4)_2 = (1, 4)_2$		$(\bar{6}, 4)_2 \times (\bar{6}, 4)_2 = (\bar{6}, 0) + (\bar{6}, 4)_2$
		$(\bar{6}, 4)_2 \times (\bar{6}, 4)_2 = (1, 0) + (1, 4)_2$
$(\bar{6}, 0) \times (\bar{6}, 0) = (\bar{6}, 0)$		
$(\bar{6}, 0) \times (1, 4)_2 = (\bar{6}, 4)_2$		$(\bar{6}, 4)_2 \times (\bar{6}, 4)_2 = (\bar{6}, 0) + (\bar{6}, 4)_2$
$(\bar{6}, 0) \times (\bar{6}, 4)_2 = (1, 4)_2$		
$(\bar{6}, 0) \times (\bar{6}, 4)_2 = (\bar{6}, 4)_2$		

Tabel 15: $SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$ confined weergegeven met fusieregels.

topologische quantumveldentheorie. Om met behulp van deze regels ook bewerkingen uit te kunnen voeren op en te kunnen rekenen met deze systemen hadden we een geschikte representatie nodig. We hebben gekeken naar een geschikte basis voor anyonische systemen, anders gezegd hebben we gekeken naar een manier waarop we deze deeltjes konden representeren (hoofdstuk 3). Dit hebben we gedaan door gebruik te maken van een representatie gevormd op basis van quantumgroepen. Met deze gereedschappen in handen konden we uiteindelijk aan onze anyonen gaan rekenen.

In het hoofdstuk over symmetriebreking (hoofdstuk 4) hebben we spontane symmetriebreking voor onze anyonische systemen bestudeerd. Hierbij is gebleken dat symmetriebreking voor deze systemen een ingewikkelder proces is dan voor bijvoorbeeld de symmetriebreking die optreedt bij het maken van een ferromagneet. Na de breking treedt er namelijk nog een effect op, confinement genaamd. Dit effect heeft als gevolg dat niet alle sectoren uit de gebroken fase in de uiteindelijke fase kunnen overleven. Zonder dit effect is de resulterende fase dan ook geen goedgedefinieerde fase, uitgaande van de regels uit de topologische quantumveldentheorie waar we mee begonnen. Het proces van symmetriebreking hebben we bestudeerd aan de hand van de quantumgroep $SU(2)_4$.

Als we uiteindelijk keken naar de gebroken en confinded toestand, dan bleek deze ook te beschrijven door middel van een, op het eerste gezicht, geheel anders lijkende quantumgroep. Uit het onderzochte proces van symmetriebreking is gebleken dat er inbeddingen van quantumgroepen mogelijk zijn. Zo hebben we voor de quantumgroep $SU(2)_4$ een reductie naar de quantumgroep $SU(3)_1$ gevonden. We hebben tevens de quantumgroep $SU(2)_8$ bestudeerd en voor deze groep symmetriebreking uitgevoerd. De resulterende algebra na breking en confinement bleek overeen te komen met het product van twee Fibonacci theoriën.

Als laatste onderdeel en als stukje toepassing van deze methode hebben we de relatief ingewikkelde maverick-coset $SU(3)_2 \times \overline{SU(2)_8}$ onderzocht. We hebben gekeken of we voor deze cosetconstructie symmetriebreking konden uitvoeren op de manier die voor simpele quantumgroepen effectief bleek te zijn. Dit bleek inderdaad het geval en ook voor de maverick-coset was er na breking en confinement een alternatieve beschrijving voor het uiteindelijke resultaat. De resulterende fase correspondeert met het *chiral three states Potts model*.

Kort gezegd hebben we gekeken naar allemaal aspecten van een tot nog toe goed werkende en veelbelovende theorie van symmetriebreking voor topologisch geordende fasen. Een theorie die een beschrijving geeft van deeltjes in $2+1$ dimensies. Een aantal decennia geleden zou deze beschrijving enkel van puur theoretisch belang zijn. Het is echter gebleken dat dergelijke deeltjes ook daadwerkelijk zouden kunnen voorkomen en wel bij het fractionele quantum Hall-effect. Het bestaan van deze deeltjes is op zichzelf al een zeer interessant verschijnsel, maar een concretere toepassing van anyonen is dat je met behulp van deze deeltjes quantumcomputers[2] zou kunnen bouwen. Maar of dit ook daadwerkelijk een mogelijke toepassing voor deze deeltjes zal blijken te zijn, is een vraag die alleen de toekomst voor ons zal kunnen beantwoorden.

Referenties

- [1] E. Witten, *Topological quantum field theory*, Commun. Math. Phys. 117, 353-386 (1988)
- [2] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. D. Sarma, *Non-Abelian Anyons and Topological Quantum Computation*, arXiv:0707.1889v2 (28-03-2008)
- [3] J. K. Slingerland, *Hopf symmetry and its breaking*, 24-09-2002
- [4] Xiao-Gang Wen, *Topological Orders in Rigid States*, Int. J. Mod. Phys., B4, 239 (1990)
- [5] D. R. Yennie, *Integral quantum Hall effect for nonspecialists*, Rev. Mod. Phys. 59 (3): 781824 (1987)
- [6] M. Dolev, M. Heiblum, V. Umansky, A. Stern, and D. Mahalu, *Towards identification of a non-abelian state: observation of a quarter of electron charge at $\nu = 5 = 2$ quantum Hall state* (2008), arXiv:0802.0930.
- [7] E.H. Hall, *On a New Action of the Magnet on Electric Currents*, American Journal of Mathematics vol 2, 1879, p.287-292
- [8] J.R. Munkres, *Topology* (2nd ed.), Prentice Hall
- [9] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*; Pergamon Press, London, Vol. 5 (1958)
- [10] Xiao-Gang Wen, F. Wilczek and A. Zee, *Chiral Spin States and Superconductivity*, Phys. Rev., B39, 11413 (1989)
- [11] X. G. Wen, *Vacuum degeneracy of chiral spin states in compactified space*, Phys. Rev., B40, 7387 (1989)
- [12] F.A. Bais, J.K. Slingerland, *Condensate induced transition between topologically ordered phases*, (26-05-2008)
- [13] Brian C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*, Springer, (2003)
- [14] R. Slansky, *Group theory for unified model building*
- [15] F.A. Bais, *Topological quantum computing*, presentatie
- [16] F.A. Bais, J.K. Slingerland, S.M. Haaker, *A theory of topological edges ad domain walls*, arXiv:0812.4596v1 [cond-mat.mes-hall] (25-12-2008)
- [17] D. C. Dunbar, K. G. Joshi, *Maverick Examples Of Coset Conformal Field Theories*, arXiv:hep-th/9309093v1 (17-09-1993)