Intuicionismo

Dick de Jongh
Institute for Logic, Language and Computation
Universiteit van Amsterdam

El intuicionismo es una de las principales corrientes en la filosofía de las matemáticas, y suele presentarse en oposición tanto al *formalismo* como al *platonismo*. El intuicionismo puede entenderse como un modo particular de incorporar la idea del *constructivismo* en matemáticas, un enfoque que debemos al matemático holandés Brouwer y a su discípulo Heyting. El constructivismo pretende que los objetos matemáticos existen en la medida en que han sido construidos y que la validez de las demostraciones emana de su construcción: en particular, pretende las afirmaciones existenciales deberían apoyarse en la construcción *efectiva* de sus objetos. Las verdades matemáticas se crean, no se descubren. El intuicionismo se enmarca en la filosofía *idealista*: los objetos matemáticos construidos se consideran objetos idealizados creados por un matemático ideal (MI), que a veces toma el nombre de *creador* o de *sujeto creador*. Con frecuencia, atendiendo a su enfoque, el intuicionismo se mueve en las fronteras del *solipsismo*, donde el matemático idealizado y el partidario del intuicionismo se encuentran.

El intuicionismo, mucho más de lo que puedan serlo el formalismo o el platonismo, es en principio normativo. El formalismo y el platonismo proponen un fundamento para las matemáticas ya existentes, bien una reducción a la lógica (o a la teoría de conjuntos) en el caso del platonismo, bien una demostración de consistencia en el caso del formalismo. El intuicionismo, en su variante más rígida, conduce a una reconstrucción de las matemáticas: las matemáticas tal y como las conocemos resultan en gran medida inaceptables desde un punto de vista intuicionista y debería acometerse la tarea de reconstruirlas de acuerdo con principios que sean constructivamente aceptables. No resulta aceptable demostrar $\exists x\, \varphi(x)$ (para algúna x, $\varphi(x)$ se verifica) llegando a una contradicción desde la premisa $\forall x \neg \varphi(x)$ (para toda x, $\varphi(x)$ no se verifica): *razonamiento por reducción al absurdo*. Una demostración así no crea el objeto que se supone que existe.

De hecho, en la práctica el enfoque intuicionista no ha supuesto una reconstrucción permanente y a gran escala de las matemáticas. En realidad, se desarrolla incluso menos investigación de estas características ahora que en el pasado. Para lo que se ha logrado en este campo véase p.ej. [1]. Por otro lado, podría decirse que el intuicionismo describe una parte de las matemáticas muy concreta, la constructiva, y que se ha descrito adecuadamente lo que esa parte constructiva supone. Todo ello está íntimamente relacionado con el hecho incontestable de que el intuicionismo ha sido muy fructífero en el campo de la *metamatemática*, la construcción y el estudio de sistemas en los que se formalizan partes de la matemática. Tras Heyting esta línea de investigación fue retomada por Kleene, Kreisel y Troelstra (para un tratamiento amplio de lo aquí expuesto , véase [13]). El artículo de Heyting [7] es una introducción legible, pero nada superficial, a los postulados intuicionistas. En informática teórica muchos de los sistemas formales que son de una fundamental importancia se formulan desde la lógica intuicionista.

L.E.J. Brouwer expuso por primera vez sus ideas constructivistas en su tesis doctoral de 1907 ([4]). Tuvo antecesores que mantuvieron posturas constructivistas. A matemáticos como Kronecker, Poincaré, Borel. A Kronecker y a Borel les empujó a ello el carácter cada ver más abstracto los conceptos y demostraciones de la matemática de finales del siglo XIX que tomaban; en el caso de Poincaré, éste además no podía aceptar las ideas formalistas o Platónicas propuestas por Frege, Russell y Hilbert. En concreto, Poincaré mantuvo frente a las tesis formalistas y platónicas que la inducción matemática (sobre los números naturales) no puede reducirse a un concepto primitivo. Sin embargo, desde el principio Brouwer fue más radical, consistente e integrador que sus predecesores. Las características más propias del intuicionismo son:

1. El empleo de una lógica distintiva: *la lógica intuicionista*. (La lógica ordinaria es entonces denominada lógica *clásica*.)

2. Su construcción del *continuo*, la totalidad de los números reales, por medio de *sucesiones de elección*.

La lógica intuicionista la introdujo y la axiomatizó A. Heyting, el principal continuador de Brouwer. El uso de la lógica intuicionista ha sido aceptado en general por otros partidarios de los métodos constructivistas, mientras que la construcción del continuo no ha gozado del mismo predicamento. La construcción del continuo mediante las sucesiones de elección implica principios que contradicen la matemática clásica. Constructivistas de otro pelaje como los de la escuela de Bishop con frecuencia sacian sus ansias constructivistas tratando de demostrar teoremas que ya han sido demostrados siguiendo procedimientos clásicos, pero sin dar el último paso, porque esto contradecira la matemática ordinaria.

En este artículo discutiremos primero la lógica intuicionista, después pasaremos algún tiempo con la teoría intuicionista de números y con el análisis intuicionista. Pasaremos entonces a tratar el concepto de realizabilidad para, acto seguido, volver a la lógica intuicionista en relación con algunas teorías formalizadas en ella. Cerraremos con la descripción de un juego que ha sido desarrollado para la lógica intuicionista proposicional. [9].

Lógica intuicionista.Denotaremos el sistema formal de la lógica intuicionista proposicional mediante **IPC** y la lógica intuicionista de predicados mediante **IQC**; los sistemas clásicos correspondiente se llamarán **CPC** y **CQC**. Formalmente la mejor manera de caracterizar la lógica intuicionista es mediante un *sistema de deducción natural* à la Gentzen. (Para un tratamiento exhaustivo de la deducción natural y los sistemas de secuentes, véase [14].) De hecho si cabe, la deducción natural es más natural para la lógica intuicionista de lo que lo es para la lógica clásica. Un sistema de deducción natural goza de leyes *introductorias* y *eliminatorias* para los conectivos lógicos $\wedge$ (y), $\vee$ (o) y $\rightarrow$ (si ..., entonces) y *cuantificadores* $\forall$ (para todo) y $\exists$ (para al menos un). Las reglas para $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$ son:

- $I\wedge$: De φ y ψ se concluye $\varphi\wedge\psi$,
- $E\wedge$: De $\varphi\wedge\psi$ se concluye φ y ψ,
- $E\rightarrow$: De φ y $\varphi\rightarrow\psi$ se concluye ψ,
- $I\rightarrow$: Si hay una derivación de ψ a partir de la asunción φ, entonces puede concluirse $\varphi\rightarrow\psi$ (eliminando al mismo tiempo la premisa φ),
- $I\vee$: De φ se concluye $\varphi\vee\psi$, y de ψ se concluye $\varphi\vee\psi$,
- $E\vee$: Si hay una derivación de χ a partir de la asunción φ y una derivación de χ a partir de la asunción ψ, entonces puede concluirse χ a partir de la premisa $\varphi\vee\psi$ (eliminando al mismo tiempo tanto φ como ψ),
- $I\forall$: Si hay una derivación de $\varphi(x)$ donde x no está libre en ninguna asunción aún eliminada, podemos concluir $\forall x\varphi(x)$,
- $E\forall$: Si hay una derivación de $\forall x\varphi(x)$, podemos concluir $\varphi(t)$ para cualquier término t,
- $I\exists$: De $\varphi(t)$, para cualquier término t, podemos concluir $\exists x\varphi(x)$,
- $E\exists$: Si hay una derivación de ψ a partir de la asunción$\varphi(x)$ donde x no está libre en ψ ni en cualquier otra premisa que no sea $\varphi(x)$, podemos concluir ψ a partir de la premisa $\exists x\varphi(x)$, eliminando al mismotiempo la asunción $\varphi(x)$.

Frecuentemente se toma la negación $\neg$ (no) de una fórmula φ como φ implicando una contradicción ($\perp$). Entonces se añade la regla *ex falso sequitur quodlibet*, por la cual

- cualquier cosa se sigue de $\perp$.

Si se desea obtener la lógica proposicional clásica de predicados, hay que añadir la regla

- si $\perp$ se deriva de $\neg\varphi$, podemos concluir φ, eliminando al mismo tiempo la premisa $\neg\varphi$.

Obsérvese que esta última no se trata de una simple regla de introducción o eliminación como las demás.

Las reglas de deducción natural están íntimamente relacionadas con la interpretación BHK (así llamada en honor a Brouwer, Heyting y Kolmogorov) de los conectores y cuantificadores. Esta interpretación ofrece un fundamento claro para los principios intuicionistas y hace de la lógica intuicionista una de las pocas lógicas no clásicas en las que el razonamiento es claro, unívoco e inclusivo pero, con todo, muy diferente del razonamiento en la lógica clásica.

En la lógica clásica el significado de los enunciados compuestos que incluyen conectivas se construye a partir de las *condiciones de verdad* para enunciados compuestos en las cuales participa el significado informal de las conectivas. Por ejemplo:

- $\varphi \wedge \psi$ es verdadera si y sólo si φ es verdadera *y* ψ es verdadera,
- $\varphi \vee \psi$ es verdadera si y sólo si φ es verdadera *o* ψ es verdadera,
- $\neg\varphi$ es verdadera iff φ *no* es verdadera

La interpretación BHK de la lógica intuicionista se basa en la noción de *demostración* y no en la de verdad. (N.B! *No* una demostración formal, o derivación, como sería lo esperado en sistemas de deducción natural o en sistemas axiomáticos tipo Hilbert, sino una demostración intuitiva e informal, i.e. un argumento matemático convincente.) El significado de los conectivos y cuantificadores puede entenderse como en lógica clásica mediante el significado informal de sus homólogos intuitivos:

- Una demostración de $\varphi \wedge \psi$ consta de una demostración de φ *y* una de ψ más la conclusión $\varphi \wedge \psi$,
- Una demostración de $\varphi \vee \psi$ consta de una demostración de φ *o* una de ψ más la conclusión $\varphi \vee \psi$,
- Una demostración de $\varphi \rightarrow \psi$ consta de un *método de conversión* de cualquier demostración de φ en una demostración de ψ,
- *Ninguna* demostración de $\perp$ existe,
- Una demostración de $\exists x\, \varphi(x)$ consta de un nombre d de *un* objecto construido en el dominio de discurso pretendido más una demostración de $\varphi(d)$ y la conclusión $\exists x\, \varphi(x)$,
- Una demostración de $\forall x\, \varphi(x)$ consta de un método tal que *para cualquier* objecto d construido en el pretendido de discurso dominio produzca una demostración $\varphi(d)$.

En el caso de las negaciones esto implica que una demostración de $\neg\varphi$ es un método que nos permite convertir cualquier supuesta demostración de φ en una demostración de una contradicción. El hecho de que $\perp \rightarrow \varphi$ pueda demostrarse para cualquier φ se basa en la contrapartida intuitiva del principio ex falso. Esto puede parecer algo menos natural que el resto de las ideas, y de hecho Kolmogorov no lo incluyó entre sus reglas.

Lo anterior, sumado al hecho de que los enunciados que contienen negaciones parecen menos satisfactorios constructivamente, indujo a Griss a considerar la posibilidad de prescindir de la negación. Sin embargo, como con frecuencia es posible demostrar tales enunciados negativos sin poder demostrar sus homólogos positivos, esta opción no resulta muy atractiva. Además, podemos prescindir de la definición formal de $\bot$ en sistemas matemáticos naturales, puesto que puede considerarse que un enunciado del tipo $1=0$ satisface las propiedades de $\bot$ sin necesidad de premisas de tipo ex falso. En concreto, no sólo los enunciados para los cuales resulta obvio, como $3=2$, sino que todos los enunciados en tales teorías intuicionistas pueden derivarse de $1=0$ sin recurrir a reglas que precisen de $\bot$. Con todo, si preferimos no hacer uso de la regla ex falso, podemos elegir una lógica que se construya sin necesidad de ella, la *lógica minimal*.

El significado intuicionista de una disyunción se parece al clásico tan sólo en la superficie. Para demostrar una disyunción hemos de ser capaces de demostrar uno de sus miembros. Así queda claro que la fórmula $\varphi \vee \neg \varphi$ no se sostiene de manera general, ya que no existe un modo de garantizar una demostración de φ o una de $\neg \varphi$. Sin embargo, muchas de las leyes de la lógica clásica siguen siendo válidas bajo la interpretación BHK. Conocemos varios *métodos de decisión* para **IPC**, pero con frecuencia es fácil decidir de un modo intuitivo:

- Una disyunción es difícil de demostrar: por ejemplo, de las cuatro direcciones de las dos *leyes de De Morgan* solamente $\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$ is inválida, más ejemplos de fórmulas inválidas son
  - $\varphi \vee \neg\varphi$ (la ley del *tercer excluido*)
  - $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg\varphi \vee \psi$
  - $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi)$
  - $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \vee \psi)$
- Una sentencia existencial es difícil de demostrar: por ejemplo, de las cuatro direcciones de las interacciones clásicamente válidas entre negaciones y cuantificadores solamente $\neg \forall x\, \varphi \rightarrow \exists x \neg \varphi$ is inválida,
- Sentencias que se apoyan directamente en la bivalencia de valores de verdad son inválidas, por ejemplo $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ o bien $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ (*ley de Peirce*), y *contraposición* en la forma de $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi \rightarrow \psi)$,
- Por otra parte, muchas leyes básicas siguen siendo verdaderas: la conmutativa y la asociativa de la conjunción y la disyunción, sendas leyes distributivas, y
  - $(\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi)$,
  - $(\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi))$,

- $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \to \chi$.
- $(\varphi \vee \psi) \wedge \neg\varphi \to \psi)$ (requiere *ex falso*!),
- $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$,
- $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$ (la forma *conversa* de contraposición),
- $\varphi \to \neg\neg\varphi$,
- $\neg\neg\neg\varphi \leftrightarrow \neg\varphi$ (no se necesitan triples negaciones).

Menos obvio resulta el hecho que el *deslizamiento de la doble negación* es válido para $\wedge$ y $\to$ pero no para $\forall$, al menos en una dirección. Son válidas:

- $\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi$,
- $\neg\neg(\varphi \to \psi) \leftrightarrow \neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$,
- $\neg\neg\forall x\varphi(x) \to \forall x\neg\neg\varphi(x)$ (pero no su conversa).

La interpretación BHK fue descubierta de modo independiente por Kolmogorov y Heyting, estando la formulación de Kolmogorov más centrada en la solución de problemas que en el desarrollo de demostraciones. Naturalmente ambos se inspiraron en el trabajo de Brouwer. En cualquier caso, queda claro que siempre que un esquema axiomático es (formalmente) demostrable en **IPC** (por deducción natural por ejemplo), cualquier instancia del esquema axiomático tendrá una demostración informal según la interpretación BHK.

Evidentemente, y en sentido estricto, la lógica intuicionista es más débil que la lógica clásica. Sin embargo, desde un punto de vista distinto puede entenderse que la inversa también es cierta. Por la *traducción negativa* de Gödel la lógica clásica puede traducirse a lógica intuicionista. Para traducir un enunciado en lógica clásica, añadimos $\neg\neg$ delante de toda fórmula atómica y reemplazamos cada subfórmula de la forma $\varphi \vee \psi$ por $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ y cada subfórmula de la forma $\exists x\,\varphi(x)$ por $\neg\forall x\neg\varphi(x)$ de modo recursivo. La fórmula obtenida es demostrable en lógica intuicionista siempre que la original sea demostrable en lógica clásica. Algunos ejemplos son:

- en la traducción $p \vee \neg p$ se convierte en $\neg(\neg\neg p \wedge \neg\neg\neg p)$,
- $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$ se convierte en $(\neg\neg\neg q \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to \neg\neg q)$,
- $\neg\forall x\,Ax \to \exists x\neg Ax$ se convierte en $\neg\forall x\neg\neg Ax \to \neg\forall x\neg\neg Ax$

Así, podríamos decir que la lógica intuicionista admite razonamientos de corte clásico, de un determinado tipo y que, por tanto, es expresivamente más rica.

Modelos de Kripke. Una semántica para lógica intuicionista parecida a los conocidos modelos de mundos posibles desarrollados por Kripke para la lógica modal ha resultado ser muy útil para obtener todo tipo de resultados en lógica intuicionista, a pesar de no ser fiel a la interpretación BHK. De hecho, estas semánticas fueron ampliamente desarrolladas por el propio Kripke, quien demostró la completitud tanto para **IPC** como para **IQC** con respecto a sus modelos, así como la propiedad de los modelos finitos y así la decidibilidad para **IPC** (véase [8]). Kripke utilizó además tableaux semánticos, puesto que las demostraciones de completitud de tipo Henkin para lógicas modales aparecerían más tarde.

Como es habitual contamos con un conjunto de mundos más una evaluación sobre ellos. Interpretemos uRv entre los mundos u y v de la siguiente manera: v representaría un estado de conocimiento posterior visto desde u. Resulta natural, pues, al contrario que en los modelos habituales para lógica modal, que una vez que una fórmula es verdadera lo siguira siendo; si φ es verdadera en u y uRv, entonces φ es verdadera en v (a esto se le denomina *persistencia*).

Las reglas para la *satisfacción* de fórmulas son:

1. $w \vDash \varphi \wedge \psi$ syss $w \vDash \varphi$ y $w \vDash \psi$,

2. $w \vDash \varphi \vee \psi$ syss $w \vDash \varphi$ o $w \vDash \psi$,

3. $w \vDash \varphi \rightarrow \psi$ syss, para todo w' tal que wRw', si $w' \vDash \varphi$, entonces $w' \vDash \psi$,

4. $w \nvDash \bot$.

Resulta útil recordar que $w \vDash \neg\neg\varphi$ syss, para cada w' tal que wRw', existe un w'' con $w'Rw''$ y $w'' \vDash \varphi$. Para modelos finitos tenemos que $w \vDash \neg\neg\varphi$ syss para todo nodo maximal w' sobre w, $w' \vDash \varphi$.

Habitualmente, los modelos de Kripke son también modelos *con raíz*, tienen un nodo minimal (generalmente w_0), una *raíz*. Para el cálculo de predicados cada nodo w de un modelo cuenta con un dominio D_w de modo que, si wRw', entonces $D_w \subseteq D_{w'}$. La persistencia en este caso se reduce al hecho que D_w es un submodelo de $D_{w'}$ en el sentido normal de la palabra. Las cláusulas para los cuantificadores son (añadiendo al lenguajenombres para los elementos del dominio al lenguaje):

1. $w \vDash \exists x\varphi(x)$ syss, para algún $d \in D_w$, $w \vDash \varphi(d)$.

2. $w \vDash \forall x\varphi(x)$ syss, para todo w' con wRw' y todo $d \in D_{w'}$, $w' \vDash \varphi(d)$.

Uno de los primeros teoremas demostrados sobre la lógica intuicionista es el teorema de Glivenko, que afirma que $\vdash_{\mathbf{CPC}} \varphi$ syss $\vdash_{\mathbf{IPC}} \neg\neg\varphi$. El lector atento podrá demostrarlo por sí mismo mediante los modelos finitos de Kripke, o también por inducción sobre la longitud de una demostración en deducción natural o en otro sistema de demostración. Este resultado implica, por ejemplo, que $\vdash_{\mathbf{IPC}} \neg\neg(p \vee \neg p)$. Esto no se hace extensivo al cálculo de predicados o a la aritmética. Como veremos, $\nvdash_{\mathbf{IPC}} \neg\neg\forall x(Ax \vee \neg Ax)$.

Los siguientes modelos invalidan respectivamente $p \vee \neg p$, $\neg\neg p \rightarrow p$ (ambos en la Figura 1a), $(\neg\neg p \rightarrow p) \rightarrow p \vee \neg p)$ (Figura 1d), $(p \rightarrow q \vee r) \rightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ (Figura 1b), $(\neg p \rightarrow q \vee r) \rightarrow (\neg p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)$ (Figura 1c), $\neg\neg\forall x(Ax \vee \neg Ax)$

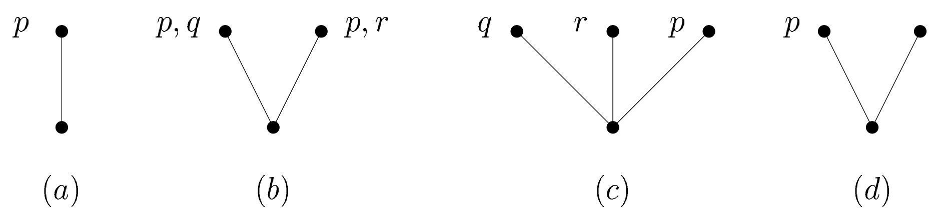

Figura 1: Contramodelos para las fórmulas proposicionales

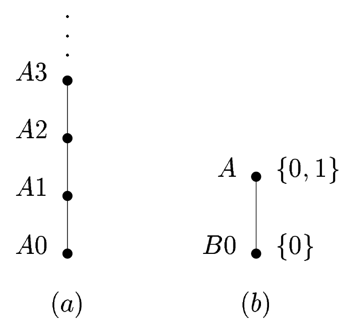

Figura 2: Contramodelos para las fórmulas de predicados

(Figura 2a, dominio constante $\mathbb{N}$), $\forall x(A \vee Bx) \rightarrow A \vee \forall x Bx$ (Figura 2b).

Aritmética. La aritmética clásica sobre números naturales se formaliza en **PA** mediante los llamados *axiomas de Peano* (cuya idea se remonta a Dedekind). Estos axiomas

- $x+1 \neq 0$,
- $x+1=y+1 \rightarrow x=y$,
- $x+0=x$,
- $x+(y+1)=(x+y)+1$,
- $x \,.\, 0=0$,
- $x \,.\, (y+1)=x \,.\, y+x$,

y el esquema de *inducción*

- Para todo $\varphi(x)$, $\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)) \rightarrow \forall x \varphi(x)$.

junto con el uso de lógica intuicionista en vez de lógica clásica, puede usarse para axiomatizar la versión intuicionista **HA** de la teoría de números naturales, *aritmética de Heyting*. Por supuesto, un intuicionista no se limita a aceptar ciegamente estos axiomas, sino que comprueba su demostrabilidad intuitiva partiendo de la idea fundamental de lo que supone un número natural (Brouwer en su discurso inaugural: "... Esta intuición dualidad-unidad, intuición fundacional de las matemáticas, crea no sólo los números uno y dos, sino también todo número ordinal finito, en la medida en que cada elemento del par pueda ser entendido como una nueva relación de dos a uno, proceso que puede ser repetido indefinidamente ...").

Merece la pena recordar que el esquema

- Para cada $\varphi(x)$, $\exists x\varphi(x) \to \exists x(\varphi(x) \wedge \forall y < x \neg\varphi(y))$

es clásica pero no intuicionísticamente equivalente al esquema de inducción. (Aquí $y < x$ se define como $\exists z(y + (z+1) = x)$.)

La traducción negativa de Gödel es aplicable a **HA/PA**. Desde luego que también el teorema de incompletitud de Gödel es válido para **HA**: existe una φ tal que ni $\vdash_{\mathbf{HA}} \varphi$, ni $\vdash_{\mathbf{HA}} \neg\varphi$, y esta φ puede ser de la forma $\forall x\psi(x)$ para algúna $\psi(x)$ tal que, para cada n, $\vdash_{\mathbf{HA}} \psi(\bar{n})$. (Aquí $\bar{n}$ denota $1 + \ldots + 1$ con n unos, un término con el valor n.)

Sucesiones de elección libre. El continuo supone un gran impedimento a la hora de diseñar versiones constructivas de las matemáticas. No resulta difícil pensar los números reales uno a uno en términos de *sucesiones de Cauchy*, pero así se pierde la intuición de la totalidad de los números reales, que sí parece una intuición primaria. Brouwer basó el continuo en las sucesiones de elección libre. Por ejemplo, una sucesión de elección libre α de números naturales puede entenderse como un proceso infinito inacabable de elección de números naturales $\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \cdots$ por parte de un matemático ideal MI. En cualquier estadio de la actividad del MI, solamente un número finito de valores ha sido determinado, junto con restricciones sobre elecciones posteriores. Esto conduce trivialmente a la idea de que una función f que da valores a toda sucesión de elección puede hacerlo exclusivamente asignando el valor $f(\alpha)$ para cualquier sucesión de elección α caracterizada por una cadena inicial finita $\alpha(0), \ldots, \alpha(m)$ de la sucesión de elección dada, en el sentido de que toda sucesión de elección β que tenga como cadena inicial finita $\alpha(0), \ldots, \alpha(m)$ debe tomar el mismo valor bajo la función: $f(\beta) = f(\alpha)$. Esta idea nos lleva hasta el teorema de Brouwer, que afirma que toda función real sobre un intervalo cerrado es uniformemente continua. Por supuesto, esto entra en contradicción con la matemática clásica.

Antes de entrar en el caso paradigmático de una distinción menos severa que existe entre la matemática intuicionista y la clásica, el *teorema del valor intermedio*, pasemos a discutir el hecho de que los contraejemplos que puedan citarse para teoremas clásicos de la lógica o las matemáticas pueden ser de dos tipos: *débiles* y *fuertes*. Un contraejemplo débil de un enunciado se limita a demostrar que éste no puede ser demostrado, un contraejemplo fuerte permite derivar una contradicción a partir de una aplicación general del enunciado. Por ejemplo, para dar un contraejemplo débil de $p \vee \neg p$ bastará con dar un enunciado φ que no haya sido ni demostrado ni refutado, especialmente un tipo de enunciado que sea reproducible en el caso de que el problema original sea resuelto. Un contraejemplo fuerte para $\varphi \vee \neg\varphi$ no puede consistir en demostrar $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ para un φ concreto, ya que $\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ es contradictorio incluso en la lógica intuicionista (es directamente equivalente a $\neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi$). Pero si epuede encontrarse un predicado $\varphi(x)$ en análisis intuicionista tal que $\neg\forall x\,(\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$ pueda demostrarse, lo cual puede considerarse a todas luces un contraejemplo fuerte.

Para contraejemplos débiles Brouwer recurría con frecuencia a la expansión decimal de π. Por ejemplo considere el número $a = 0, a_0 a_1 a_2 \ldots$ donde la expansión decimal[1] se define como sigue:

En la medida en que ninguna sucesión 1234567890 ha tenido lugar en la expansión decimal de π, a_n se define como 3. Si una sucesión 1234567890 se ha dado en la expansión decimal de π empezando en m con $m \leqslant n$, entonces, si el primer m que cumpla la condición es par entonces a_n es 0 para todo $n \geqslant m$, si es impar entonces $a_m = 4$ y $a_n = 0$ para todo $n > m$. Mientras el problema de si existe o no tal sucesión no se resuelva, no sabemos si $a < \frac{1}{3}$ ó $a = \frac{1}{3}$ ó $a > \frac{1}{3}$. Que esto depende del tiempo lo demuestra el hecho de que si este problema ha sido resuelto, m existe y es par, con lo que $a \leq \frac{1}{3}$ [2]. Pero eso no importa, tales problemas abundan y (aunque no nos molestemos en cambiar el ejemplo) esto demuestra que es inútil intentar demostrar que, para cualquier a, $a < \frac{1}{3} \vee a = \frac{1}{3} \vee a > \frac{1}{3}$. Nótese que tampoco puede demostrarse que a sea racional, porque para hacerlo necesitamos una p y una q tales que $a = \frac{p}{q}$, cosa que evidentemente no puede hacerse sin antes resolver el problema. Por otra parte, resulta obvio que si $\neg\neg(a < \frac{1}{3} \vee a = \frac{1}{3} \vee a > \frac{1}{3})$ se verifica, a no es no racional. En cualquier caso, los contraejemplos débiles no son teoremas matemáticos, pero sí nos indican qué enunciados deberíamos intentar demostrar y cuáles no. Más adelante, Brouwer empleó problemas sin resolver como contraejemplos débiles y fuertes en un sentido más fuerte, haciendo que la expansión decimal de a dependiese de la intuición del sujeto, sobre el hecho de si había resuelto el problema en el momento de la construcción del decimal en cuestión. Intentos de formalización de estos denominados *argumentos del sujeto creador* han sido muy polémicos y han tenido consecuencias paradójicas. Para una reconstrucción más próxima a las ideas de Brouwer que evite estas consecuencias indeseables, véase [10].

Pasemos ahora a usar un contraejemplo débil para demostrar que no podemos aspirar a demostrar el denominado *teorema del valor medio*. Una función continua f con valor -1 en el 0 y valor 1 en 1 toma el valor 0 para algún valor entre 0 y 1 según la matemática clásica. Esto no se sostiene en el caso constructivo: una función f que sea lineal entre el valor -1 en el 0 al valor $a - \frac{1}{3}$ en $\frac{1}{3}$, permanece en el valor $a - \frac{1}{3}$ hasta $\frac{2}{3}$ y después sigue siendo lineal hasta el valor 1 no alcanza el valor 0 en un lugar determinado si no sabemos si $a > \frac{1}{3}$, $a = \frac{1}{3}$ o $a < \frac{1}{3}$. Ya que no existe un método para determinar este problema en general,

[1] Con el objeto de plantear argumentos que sean fáciles de seguir, discutimos estos problemas relativos a números reales con argumentos que dependen de sus expansiones decimales. Esta no era la costumbre de Brouwer, quien llegó a mostrar con un contraejemplo débil que no todos los reales tienen expansión decimal ('cómo iniciar la expansión decimal de a si no sabemos siquiera si es mayor, igual o menor que 0?).

no podemos determinar un valor de x para $f(x)=0$. (Véase 3.)

Los constructivistas de la escuela rusa no aceptaban la construcción intuicionista del continuo, pero tampoco les asustaba contradecir abiertamente la matemática clásica. Sin embargo, llegaban a tales resultados de modo diferente, asumiendo que las construcciones efectivas son construcciones *recursivas* y, en particular, cuando uno restringe las funciones a las funciones efectivas, que toda función es una función recursiva. Así, en marcada posición con la matemática clásica, el aceptar la denominada *tesis Church-Turing*, por la cual toda función efectiva es recursiva, influye en la validez de los resultados matemáticos de modo directo.

Subrayemos finalmente que, independientemente del punto de vista escogido, el análisis intuicionista que resulta se relaciona con el análisis clásico de una manera más compleja a como se relacionan **HA** y **PA**. Y la traducción negativa ya no es aplicable.

Realizabilidad. Kleene usó las funciones recursivas de una manera diferente que los constructivistas rusos. Desde 1940 intentó dar una interpretación fiel de la lógica intuicionista y de la matemática (formalizada) mediaen funciones recursivas. Para comprender esto es preciso recordar dos cosas. La primera, que existe un modo recursivo de codificar parejas de números naturales mediante uno solo, j es una biyección de $\mathbb{N}^2$ en $\mathbb{N}$: $j(m,n)$ codifica el par (m,n) como un número natural único. La decodificación se hace a partir de las funciones $(\,)_0$ y $(\,)_1$: si $j(m,n)=p$, entonces $(p)_0=m$ y $(p)_1=n$. La segunda intuición consiste en que toda función recursiva, o mejor, toda máquina de Turing que las calcula puede ser codificada también mediante un número natural. Si e codifica a una máquina de Turing, entonces $\{e\}$ es la función calculada por ella, p.ej. para cada número natural n, $\{e\}(n)$ tiene un valor determinado si al dar n como valor de entrada, la máquina de Turing codificada por e nos devuelve ese valor. Ahora Kleene define cómo un número natural realiza un enunciado aritmético (en el lenguaje de **HA**):

- Un $n\in\mathbb{N}$ realiza una sentencia atómica syss el enunciado es verdadero,
- n realiza $\varphi\wedge\psi$ syss $(n)_0$ realiza φ y $(n)_1$ realiza ψ,
- n realiza $\varphi\vee\psi$ syss $(n)_0=0$ y $(n)_1$ realiza φ, o $(n)_0=1$ y $(n)_1$ realiza ψ,
- n realiza $\varphi\rightarrow\psi$ syss, para todo $m\in\mathbb{N}$ que realiza φ, $\{n\}(m)$ tiene un valor que realiza ψ,
- n realiza $\forall x\varphi(x)$ syss, para todo $m\in\mathbb{N}$, $\{n\}(m)$ tiene un valor que realiza $\varphi(\overline{m})$,
- n realiza $\exists x\varphi(x)$ syss, $(n)_1$ realiza $\varphi(\overline{(n)_0})$.

No podemos afirmar que la realizabilidad sea una interpretación fiel del intuicionismo, como Kleene bien constató más tarde. Por ejemplo, resulta que, al menos desde un punto de vista clásico, existen en **IPC** fórmulas

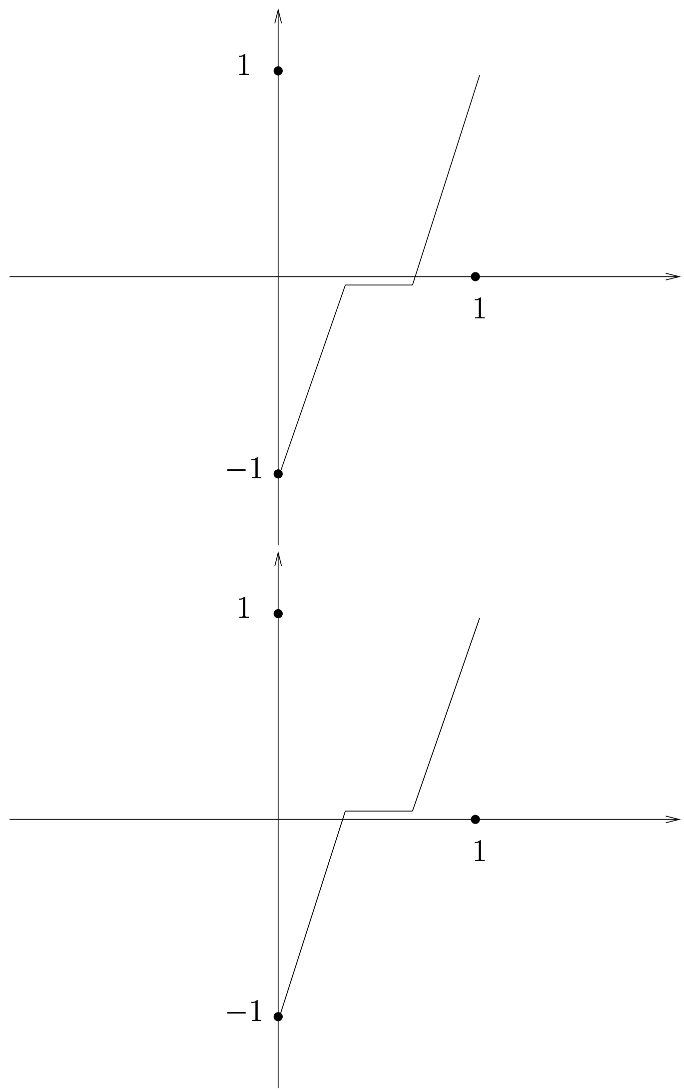

Figura 3: Contraejemplo al teorema del valor intermedio

indemostrables cuyas contrapartidas aritméticas son todas realizables. Sin embargo, la realizabilidad ha sido un concepto con enorme éxito que ha conocido innumerables variantes. A través de la realizabilidad, Kleene fue capaz de demostrar que si desde **HA** se prueba un enunciado de la forma $\forall x \exists y \varphi(x, y)$, entonces φ es satisfacible mediante una función recursiva $\{e\}$, y que incluso para cada $n \in \mathbb{N}$, **HA** demuestra $\varphi(\overline{n}, \overline{\{e\}(n)})$.

La lógica intuicionista en sistemas formales intuicionistas. La lógica intuicionista, ya sea proposicional o de predicados, satisface la denominada *propiedad de la disyunción*: si $\varphi \vee \psi$ es derivable, entonces o φ o ψ es derivable. Esto es muy característico de la lógica intuicionista: para la lógica clásica $p \vee \neg p$ es un contraejemplo evidente. Esta propiedad puede trasladarse a los sistemas formales usuales de la aritmética y el análisis. Evidentemente, en consonancia con la filosofía intuicionista. Si $\varphi \vee \psi$ es demostrable formalmente, entonces, si las cosas van bien, es demostrable informalmente también. Pero entonces, de acuerdo con la interpretación BHK, φ o ψ deberían ser demostrables informalmente también. Sería maravilloso si el sistema formal fuese lo suficientemente completo como para aportar semejante demostración formal, y habitualmente es el caso. Para enunciados existenciales se verifica algo parecido, una *propiedad existencial*: si $\exists x\, \varphi(x)$ es derivable en la aritmética de Heyting, entonces $\varphi(\bar{n})$ es derivable para algúna $\bar{n}$. Enunciados de la forma $\forall y \exists x\, \varphi(y, x)$ expresan la existencia de las funciones y, por ejemplo, para la aritmética de Heyting la propiedad de existencia se transforma en: si tal enunciado es derivable, entonces alguna instancia suya (bajo la forma de función recursiva) también lo es, como mencionamos anteriormente. En la aritmética clásica de Peano tales propiedades sólo se verifican para casos sencillos, en los que φ carece de cuantificadores. De hecho, en lo que se refiere a las últimas afirmaciones, la aritmética intuicionista y clásica presentan la misma fuerza.

Algunos sistemas formales pueden ser decidibles (p.ej. algunas teorías del orden) y contaremos con una lógica clásica en la mayor parte de los casos. Sin embargo, en la aritmética de Heyting tenemos el *teorema de completitud de la aritmética de De Jongh*, que afirma que su lógica es precisamente la intuicionista: si una fórmula no es derivable en la lógica intuicionista, entonces podrá hallarse una instancia aritmética de sustitución que no sea derivable en la aritmética de Heyting (véase p.ej. [6], [11]). En el caso particular de $p \vee \neg p$ es fácil de ver, pues se sigue del teorema de incompletitud de Gödel y de la propiedad de la disyunción: por Gödel sabremos que existe un enunciado φ que **HA** no puede ni demostrar ni refutar, por la propiedad de la disyunción **HA** tampoco podrá probar $\varphi \vee \neg\varphi$.

El juego de Mezhirov para IPC. Nos gustaría finalizar con algo que ha sid desarrollado recientemente: un juego que es consistente y completo con respecto a la lógica intuicionista proposicional, anunciado en [9]. En esta última sección daremos además los detalles de las demostraciones matemáticas.

Los juegos son *φ-juegos* donde φ es una fórmula del cálculo proposicional. El juego tiene dos jugadores P (*proponente*) y O (*oponente*). El campo de juego es el conjunto de las subfórmulas de φ. Un *movimiento* consiste en *marcar* una fórmula que no haya sido marcada antes. Sólo O tiene derecho a marcar átomos. El primer movimiento lo hace P, y consiste en marcar φ. Los jugadores no mueven por turnos; a quién le toca cada vez depende del *estado del juego*. Aquel jugador que se ve obligado a mover y no puede, *pierde*. El estado del juego viene determinado por las marcas y por una evaluación clásica Val que se desarrolla de modo paralelo. Las reglas para tal evaluación son, en cada estado:

- para átomos que $Val(p) = 1$ syss p está marcado,
- para fórmulas complejas $\psi \circ \chi$ que, si $\psi \circ \chi$ está sin marcar, $Val(\psi \circ \chi) = 0$, y si $\psi \circ \chi$ está marcado, $Val(\psi \circ \chi) = Val(\psi) \circ_B Val(\chi)$ donde $\circ_B$ es la función Booleana asociada con $\circ$.

Si un jugador ha marcado una fórmula que es evaluada con 0, entonces se considera que es un *fallo* de ese jugador. Si P tiene un fallo y O no, entonces mueve P; en todos los demás casos (es decir, si O tiene un fallo y P lo tiene o no, o si ningún jugador ha fallado) O mueve. El teorema de completitud se formula como sigue.

Teorema 1. $\vdash_{\mathbf{IPC}} \varphi$ *syss* P *tiene una estrategia ganadora en el* φ*-juego.*

Primero demostraremos

Teorema 2. *Si* $\nvdash_{\mathbf{IPC}} \varphi$*, entonces* O *tiene una estrategia ganadora en el* φ*-juego.*

Demostración. Denotaremos las sucesiones de fórmulas marcadas por O y P respectivamente como $\mathbf{O}$ y $\mathbf{P}$. O piensa en un contramodelo *minimal* para φ, p.ej., en la raíz w_0, φ no se satisface, pero en todos los nodos restantes sí. La estrategia de O es la siguiente. Siempre que P no escoja fórmulas falsas en nodos superiores del modelo, O se limita a escoger fórmulas que sean verdaderas en w_0. En cuanto P escoja una fórmula ψ que se falsifique en nodos superiores del modelo, O piensa en el submodelo generado por un nodo maximal w que falsifica ψ. O repite la misma táctica respecto del nodo al que se ha llegado durante el juego. Basta con demostrar lo siguiente:

Proposición. Si no quedan fórmulas para que escoja O tras aplicar su estrategia, p.ej. todas las fórmulas que son verdaderas en el w que está en la mente de O ya han sido marcadas, entonces le toca a P.

Esto es suficiente porque significa que que en tal situación P solamente puede moverse hacia delante en el modelo, o en el caso de que w es un nodo maximal, P pierde.

Demostración Proposición. Escribimos $|\theta|_w$ para el valor de verdad de θ en w. Como veremos, basta con demostrar que, si se ha llegado al estado del juego enunciado en la proposición, entonces $|\theta|_w = Val(\theta)$ para toda θ. Demostraremos por inducción sobre θ, que $|\theta|_w = 1 \iff Val(\theta) = 1$.

- Si θ es atómica, entonces O ha marcado todos y sólo los átomos que son forzados en w, así que aquéllos y no otros se hacen verdaderos.
- Paso inductivo $\Rightarrow$: Asume $|\theta \circ \psi|_w = 1$. Entonces $\theta \circ \psi$ está marcada porque de otro modo O podría hacerlo, contrariamente a la suposición. Tenemos $|\theta|_w \circ_B |\psi|_w = 1$. Por la HI, $Val(\theta) \circ_B Val(\psi) = 1$, luego $Val(\theta \circ \psi) = 1$.
- Paso inductivo $\Leftarrow$:
- $Val(\theta \wedge \psi) = 1 \Rightarrow Val(\theta) = 1$ y $Val(\psi) = 1 \Rightarrow_{IH}$ $|\theta|_w = 1$ y $|\psi|_w = 1 \Rightarrow |\theta \wedge \psi|_w = 1$.
- $\vee$ es lo mismo que en $\wedge$.
- $Val(\theta \to \psi) = 1 \Rightarrow Val(\theta) = 0$ o $Val(\psi) = 1$, y así por la HI, $|\theta|_w = 0$ o $|\psi|_w = 1$. Luego, $\theta \to \psi$ está marcada, por tanto en $\mathbf{O}$ o en $\mathbf{P}$. En el primer caso $|\theta \to \psi|_w = 1$ inmediatamente, en el segundo, $|\theta \to \psi|_s = 1$ para todo $s > w$ (P no ha marcado fórmulas falsas más arriba, de otro modo O hubiera movido su atención hacia otro nodo) y así $|\theta|_s = 0$ or $|\psi|_s = 1$ para todo $s > w$. Es más, $|\theta \to \psi|_w = 1$.

Nos enfrentamos ahora con el hecho que O sólo ha escogido fórmulas que son verdaderas en la mente de O, y ellas siguen siendo verdaderas en el modelo. Así pues, $Val(\theta) = 1$ para toda $\theta \in \mathbf{O}$. Por otro lado, P cuenta al menos con un fallo en su haber, la fórmula ξ escogida por P que hizo que el juego se parase en w: $Val(\xi) = 0$. En efecto, le toca a P. □

Volvamos a la otra mitad:

Teorema 3. *Si* $\vdash_{\mathbf{IPC}} \varphi$, *entonces* P *tiene una estrategia ganadora en el* φ-*juego.*
Demostración. La estrategia de P consiste en elegir solamente fórmulas que son demostrables en $\mathbf{O}$. Notemos que el primer movimiento forzado φ de P se corresponde con esta estrategia. Para este caso basta con probar la proposición siguiente.

Proposición Si todas las fórmulas demostrables a partir de $\mathbf{O}$ están marcadas, entonces le toca mover a O.

Esto es suficiente porque implica que en tal situación O sólo puede marcar una fórmula completamente nueva, y pierde cuando no quedan tales fórmulas.

Demostración de la proposición. Creemos un modelo de la manera siguiente. Asumamos que $\chi_1, \ldots, \chi_k$ son las fórmulas que no se pueden probar desde $\mathbf{O}$ y así las que están sin marcar. Por la completitud de **IPC** existen k modelos que hacen $\mathbf{O}$ verdadera y falsean $\chi_1, \ldots, \chi_k$ en sus respectivas raíces. Añadamos a estos modelos una nueva raíz r que verifica exactamente los $\mathbf{O}$-átomos (lo cual se sigue de la persistencia). Como en la otra dirección, probaremos: $|\theta|_r = Val(\theta)$ para toda θ, o equivalentemente, $|\theta|_r = 1 \iff Val(\theta) = 1$.

- Los átomos son forzados en r syss están marcadas por O y entonces Val 1, de otro modo 0.
- Paso inductivo $\Rightarrow$: Asume $|\theta \circ \psi|_r = 1$. Entonces $\theta \circ \psi$ está marcada porque de no estarlo sería uno de los χ_i, contradiciendo persistencia. Podemos seguir razonando como en la otra dirección
- Paso inductivo $\Leftarrow$:
- $\vee$ y $\wedge$ como en la otra dirección.
- $Val(\theta \to \psi) = 1 \Rightarrow Val(\theta) = 0$ or $Val(\psi) = 1$, y así por la HI, $|\theta|_r = 0$ o $|\psi|_r = 1$. Luego, $\theta \to \psi$ está marcada, así que está en **O** o **P**, por lo tanto $|\theta \to \psi|_s = 1$ y así $|\theta|_s = 0$ o $|\psi|_s = 1$ para todo $s > r$. De hecho, $|\theta \to \psi|_r = 1$.

Nos enfrentamos ahora con el hecho de que P solamente ha marcado fórmulas demostrables desde **O** y que seguirán siendo demostrables desde **O**. Así es que, $Val(\theta) = 1$ para toda $\theta \in \mathbf{P}$. Luego P no comete faltas. Por las reglas del juego, le toca mover a O. □

Referencias

[1] E. Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1967.

[2] Jonathan M. Borwein, Brouwer-Heyting sequences converge, *The Mathematical Intelligencer*, 20:14-15, 1998.

[3] L.E.J. Brouwer, Consciousness, Philosphy and Mathematics, in: [5].

[4] L.E.J. Brouwer, Over de Grondslagen van de Wiskunde, Dissertation, 1907, in: [5].

[5] L.E.J. Brouwer, *Collected Worls, Vol. 1*, ed. A. Heyting, North-Holland, Amsterdam 1975.

[6] D.H.J. de Jongh, Formulas of one variable in Intuitionistic Arithmetic, in: Troelstra and van Dalen, eds., *The L.E.J. Brouwer Centenary Symposium*, North-Holland, Amsterdam 1982.

[7] A. Heyting, *Intuitionism, an Introduction*, 3rd rev. ed. (1971), North-Holland, Amsterdam 1956.

[8] S.A. Kripke, Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I, in: J.N. Crossley and M.A.E. Dummett, eds., *Formal Systems and Recursive Functions*, North-Holland, Amsterdam 1965.

[9] Ilya Mezhirov, A game semantics for intuitionistic propositional logic (abstract), International Conference on Computer science applications of modal logic, Moscow, September 5-9, 2005.

[10] Joop Niekus, Brouwer's incomplete objects, PP-2005-27, ILLC, Universiteit van Amsterdam, 2005.

[11] C.A. Smoryński, Applications of Kripke models, in: [12], 324–391, 1973.

[12] A.S. Troelstra, *Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis*, Springer lecture Notes 344, Berlin, 1973.

[13] A.S. Troelstra and D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics, an Introduction*, two volumes, North-Holland, Amsterdam 1988.

[14] A.S. Troelstra and H. Schwichtenberg, *Basic Proof Theory*, Cambridge University Press, Cambridge U.K. 1996, Second, revised edition 2000.