Take-home Tentamen Modeltheorie

Benno van den Berg

18 december 2012

Uiterste inleverdatum: maandag 7 januari om 13:00.

Opgave 1. We noemen een formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *positief*, als er geen negatie $\neg$ of implicatie $\to$ in voorkomt; dat wil zeggen, als die kan worden opgebouwd uit atomaire formules door alleen $\wedge, \vee, \exists$ en $\forall$ te gebruiken. Verder noemen we een homomorfisme $f : M \to N$ tussen $\mathcal{L}$-structuren *positief*, als

$$M \models \varphi(m_1, \ldots, m_n) \Rightarrow N \models \varphi(f(m_1), \ldots, f(m_n))$$

geldt voor alle positieve formules $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ and alle $m_1, \ldots, m_n \in M$.

(a) [6 punten] Zij T een consistente $\mathcal{L}$-theorie en

$$T_0 = \{\psi : \psi \text{ is een positieve zin en } T \models \psi\}.$$

Bewijs dat er voor elk model A van T_0 een diagram van $\mathcal{L}$-structuren

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "l"] \\ A \arrow[r, "k"'] & C \end{tikzcd}$$

bestaat, zodat (1) B een model van T is, (2) k een elementaire inbedding is, (3) l positief is en (4) het beeld van k bevat is in het beeld van l.

(b) [8 punten] Zij $f : B \to A$ een positief homomorfisme tussen $\mathcal{L}$-structuren. Bewijs dat er een commuterend diagram van $\mathcal{L}$-structuren

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"'] & D \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "l"'] & C \end{tikzcd}$$

bestaat, waarbij de horizontale afbeeldingen k en l elementaire inbeddingen zijn, de verticale afbeeldingen f en g positieve homomorfismen zijn en het beeld van l bevat is in het beeld van g.

(c) [6 punten] Zij T een consistente $\mathcal{L}$-theorie waarvan de modellen gesloten gesloten zijn onder surjectieve beelden: dat wil zeggen, als $f : M \to N$ een surjectief homomorfisme is en M is een model van T, dan is N dat ook. Gebruik onderdelen (a) en (b) om te laten zien dat T kan worden geaxiomatiseerd door positieve zinnen.

Uitwerkingen opgave 1.

(a) Zij A een model van T_0. We construeren eerst B. Bekijk daartoe

$$T_1 = T \cup \{\neg\psi \in L_A \,:\, \psi \text{ positief en } A \models \neg\psi\}.$$

Ik beweer: de theorie T_1 in de taal L_A is consistent. Want als deze verzameling niet consistent is, dan er is vanwege de compactheidsstelling een positieve zin $\psi(x_1, \ldots, x_n) \in L$ en elementen $a_1, \ldots, a_n \in A$ zodat (1) $A \models \neg\psi(a_1, \ldots, a_n)$ en (2) $T \cup \{\neg\psi(a_1, \ldots, a_n)\}$ inconsistent is. Maar uit (2) volgt dat $T \models \forall x_1, \ldots, x_n \psi(x_1, \ldots, x_n)$ en dus $\forall x_1, \ldots, x_n \psi(x_1, \ldots, x_n) \in T_0$. Maar dat is in tegenspraak met (1) en het feit dat A een model van T_0 is.

Zij B een model van T_1. Merk op dat B interpretaties bevat voor alle constanten in L_A, dus ook die constanten $a \in A$ die we aan L hebben toegevoegd. We kunnen daarom L_A als een deeltaal van L_B opvatten. Nu beweer ik dat de L_B-theorie

$$T_2 = \mathrm{ElDiag}(A) \cup \{\psi \in L_B \,:\, \psi \text{ positief en } B \models \psi\}$$

consistent is. Want als deze theorie niet consistent is, dan is er vanwege de compactheidsstelling een positieve L_A-formule $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ en constanten $b_1, \ldots, b_n \in L_B \setminus L_A$ zodat (1) $B \models \psi(b_1, \ldots, b_n)$ en (2) $\mathrm{ElDiag}(A) \cup \{\psi(b_1, \ldots, b_n)\}$ is inconsistent. Uit het laatste volgt

$$A \models \neg\exists x_1, \ldots, x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

en $\neg\exists x_1, \ldots, x_n \, \psi(x_1, \ldots, x_n) \in T_1$. Dit is in tegenspraak met (1) en de het feit dat B een model van T_1 is.

Dus zij C een model van T_2. Omdat C een model is van het elementaire diagram van A is er een elementaire afbeelding $k : A \to C$ en omdat C ook een model is van $\{\psi \in L_B \,:\, \psi \text{ positief en } B \models \psi\}$ is er ook een positieve afbeelding $l : B \to C$. Verder is het beeld van de eerste afbeelding bevat in het beeld van de tweede afbeelding, omdat B interpretaties bevat van alle constanten uit L_A en deze door l naar die elementen in C gestuurd worden die in het beeld van k liggen.

(b) We passen (a) toe op $T = \mathrm{ElDiag}(B)$ in de taal L_B en het model A. Dit is mogelijk, want A is a model van de theorie $T_0 = \{\psi \in L_B : \psi \text{ positief en } T \models \psi\}$: er bestaat immers een positieve afbeelding $f : B \to A$. We vinden dus een model D van T, een positieve afbeelding $g : D \to C$ en een elementaire inbedding $l : A \to C$ met het beeld van l bevat in dat van g. Omdat T een model van $T = \mathrm{ElDiag}(B)$ is, is er bovendien een elementaire inbedding $k : B \to D$. Tenslotte hebben we dat $gk = lf$ omdat alle afbeeldingen L_B-homomorfismen zijn en dus de interpretaties van de constanten $b \in B$ behouden.

(c) Zij T een consistente theorie waarvan de modellen behouden zijn onder surjectieve homomorfismen. Ik beweer dat $T_0 = \{\psi \,:\, \psi \text{ positief en } T \models \psi\}$ de theorie T axiomatiseert. Het is duidelijk dat $T \models T_0$ en daarom is het voldoende om te bewijzen dat $T_0 \models T$. Zij A_0 daarom een model van T_0.

Door (a) toe te passen vinden we een model B_1 van T en een positieve afbeelding $B_1 \to A_1$ en een elementaire inbedding $A_0 \to A_1$. Door herhaald toepassen van (b) verkrijgen we nu een commuterend diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} & & B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A_0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

waarin de horizontale afbeeldingen elementaire inbeddingen zijn en de verticale afbeeldingen positief. Bovendien is het beeld van A_i in A_{i+1} altijd bevat in dat van B_{i+1}. Daarom is de geïnduceerde afbeelding van B_∞, de colimiet van de B_i, naar A_∞, de colimiet van de A_i, een surjectief homomorfisme. Bovendien zijn B_1 en B_∞ aan de ene kant en A_0 en A_∞ aan de andere kant elementair equivalent vanwege het "elementary diagram lemma". Daarom is B_∞ net als B_1 een model van T. Verder is vanwege de aanname uit de opgave ook A_∞ een model van T; en daarmee is A_0 dat ook.

We concluderen dat $T_0 \models T$, zoals de bedoeling was.

Opgave 2. [10 punten] Zij $n \in \mathbb{N}$, κ een oneindig kardinaalgetal en T een $\mathcal{L}$-theorie. Bewijs dat als de typenruimte $S_n(T)$ hoogstens κ veel punten heeft, dat er dan, op bewijsbare equivalentie in T na, hoogstens κ veel $\mathcal{L}$-formules zijn met vrije variabelen $x_1, \ldots, x_n$.

Uitwerkingen opgave 2. Kies voor ieder tweetal punten $p, q \in S_n(T)$ met $p \neq q$ een formule $\varphi_{p,q}$ in de variabelen $x_1, \ldots, x_n$ met $\varphi_{p,q} \in p$ en $\varphi_{p,q} \notin q$ (en dus $\neg\varphi_{p,q} \in q$). Zij B de verzameling van Boolse combinaties van $\varphi_{p,q}$: dat wil zeggen formules in $x_1, \ldots, x_n$ die zich laten opbouwen uit de $\varphi_{p,q}$ met behulp van $\neg, \wedge, \vee$. Ik beweer dat elke formule in de variabelen $x_1, \ldots, x_n$ modulo T equivalent is aan een $\beta \in B$. Omdat $|S_n(T)| \leq \kappa$ en κ een oneindig kardinaalgetal is, geldt $|B| \leq \kappa$; dus zodra deze bewering bewezen is, is de opgave opgelost.

Zij φ dus een willekeurige formule in de variabelen $x_1, \ldots, x_n$ en zij $G = \{\beta \in B : T \cup \{\varphi\} \models \beta\}$. Vanwege de compactheidsstelling is het nu voldoende om te laten zien dat $G \cup T \models \varphi$. Want dan zijn er $\beta_1, \ldots, \beta_n \in G$ zodat $T \cup \{\beta_1, \ldots, \beta\} \models \varphi$ en daarom $T \models \bigwedge_i \beta_i \leftrightarrow \varphi$.

Dus stel $G \cup T \not\models \varphi$. Dan is er een $p \in S_n(T)$ met $G \cup \{\neg\varphi\} \subseteq p$ en voor elke $q \in S_n(T)$ met $\varphi \in q$ geldt dat $\neg\varphi_{p,q} \in q$. Daarom is er geen enkel n-type in $S_n(T)$ dat

$$T \cup \{\psi\} \cup \{\varphi_{p,q} : \psi \in q\}$$

uitbreidt en daarmee is deze theorie dus inconsistent. Dus zijn er vanwege de compactheidsstelling types $q_0, \ldots, q_n$ met $\psi \in q_i$ zodat

$$T \cup \{\psi\} \models \neg\varphi_{p,q_0} \vee \ldots \vee \neg\varphi_{p,q_n}.$$

Maar dan $\neg\varphi_{p,q_0} \vee \ldots \vee \neg\varphi_{p,q_n} \in G$, vanwege de definitie van G, en dus is deze formule een element van p. Dit is in tegenspraak met het feit dat $\varphi_{p,q_i} \in p$ voor alle q_i.

Opgave 3. Zij $\mathcal{L} = (S, <)$ de signatuur bestaand uit een 1-plaatsig functiesymbool S ("de opvolger") en een 2-plaatsig relatiesymbool $<$ ("de ordening"). Bekijk nu de theorie T die zegt dat $<$ een lineaire ordening zonder eindpunten is en dat Sx het kleinste element is dat groter is dan x; in formules:

$$\begin{gathered}\forall x\, \neg(x < x)\\ \forall x, y, z\, \big(\, x < y \wedge y < z \to x < z\, \big)\\ \forall x, y\, \big(\, x = y \vee x < y \vee y < x\, \big)\\ \forall x\, \exists y, z\, \big(\, y < x \wedge x < z\, \big)\\ \forall x\, \big(\, x < Sx \wedge \neg \exists y\, (x < y \wedge y < Sx)\, \big)\\ \forall x\, \exists y\, (\, Sy = x\,)\end{gathered}$$

(a) [5 punten] Zij λ een oneindig kardinaalgetal. Bewijs dat T niet λ-categorisch is.

(b) [5 punten] Beschrijf de typenruimtes van T.

(c) [5 punten] Bewijs dat T kwantoreneliminatie heeft.

(d) [5 punten] Bewijs dat T volledig is.

Uitwerkingen opgave 3.

(a) De theorie T is niet ω-categorisch, omdat $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ (twee kopieën van $\mathbb{Z}$ waarbij alle elementen in de eerste kopie kleiner zijn dan alle elementen in de tweede kopie) twee aftelbare, niet-isomorfe modellen van T zijn.

Voor overaftelbare λ zijn $\lambda \times \mathbb{Z}$ en $\lambda^{op} \times \mathbb{Z}$ twee niet-isomorfe modellen van T met cardinaliteit λ.

(b) Als M een model van T is en $m \in M$, dan vormen de elementen $x \in M$ met $S^n x = m$ samen met de elementen $S^n m$ een isomorfe kopie van $\mathbb{Z}$. Noem deze elementen een $\mathbb{Z}$-*cluster*. Als m, m' tot hetzelfde $\mathbb{Z}$-cluster behoren, dan hebben we een *afstand*: dan is er een n met $S^n m = m'$ of $S^n m' = m$.

Verder kunnen we de clusters ordenen: als we de elementen uit twee verschillende $\mathbb{Z}$-clusters met elkaar vergelijken, dan zijn alle elementen uit het ene cluster altijd kleiner of altijd groter dan de elementen uit het andere cluster. Dit induceert een ordening op de clusters.

Daarom zegt een n-type in de variabelen $x_1, \ldots, x_n$:

  (a) Of x_i en x_j tot hetzelfde cluster behoren of niet.

  (b) Indien x_i en x_j tot hetzelfde cluster behoren, wat hun onderlinge afstand is.

  (c) Hoe de x_i geordend zijn en daarmee ook de clusters waartoe ze behoren.

(c) We passen Theorem 1.5 uit de handout toe. Zij M en N modellen van T waarbij N bovendien ω-verzadigd is. Zij bovendien $f : \{m_1, \ldots, m_k\} \to N$ een locaal isomorfisme en $m \in M$. Er zijn twee mogelijkheden.

De eerste mogelijkheid is dat m tot hetzelfde cluster behoort als één van de m_i. Dan is $m = S^l m_i$ of $m_i = S^l m$ en we breiden f uit door m naar $S^l f(m_i)$ of de unieke n met $f(m_i) = S^l n$ te sturen.

De andere mogelijkheid is dat geen der m_i tot hetzelfde cluster als m behoort. Zij $I = \{i \leq n : M \models m_i < m\}$. Gebruik nu de ω-verzadigdheid van N om een element $n \in N$ te vinden dat groter is dan alle $f(m_i)$ met $i \in I$ en kleiner is dan alle $f(m_i)$ met $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus I$ en tot alle een "oneindige afstand" heeft. We breiden in dit geval f uit door m naar deze n te sturen.

(d) Omdat $\mathbb{Z}$ in te bedden is in ieder model van T volgt uit Theorem 1.2 van de handout en opgave (c) dat T volledig is. (Omdat $\top$ and $\perp$ de enige kwantorvrije zinnen zijn volgt volledigheid ook onmiddelijk uit kwantoreneliminatie.)

Opgave 4. [10 punten] Zij K een reëel afgesloten geordend lichaam en neem aan dat I een priemideaal is in $K[x_1, \ldots, x_n]$ waarvoor geldt dat $p_1, \ldots, p_m \in I$ zodra $\sum_{i=1}^m p_i^2 \in I$. Bewijs dat de polynomen $p \in I$ een gemeenschappelijk nulpunt hebben.

Uitwerkingen opgave 4. Bewijs uit het ongerijmde: stel dat de polynomen $p \in I$ geen gemeenschappelijk nulpunt hebben. Omdat elk polynoom hoogst eindig veel nulpunten heeft, zijn er $f_1, \ldots, f_k \in I$ die al geen gemeenschappelijk nulpunt hebben.

Bekijk nu $K[x_1, \ldots, x_n]/I$: omdat I priem is, is dit een domein; en daarom is de quotiëntenring L van $K[x_1, \ldots, x_n]/I$ een lichaam. Ik beweer dat L zich laat ordenen: daartoe is het voldoende (vanwege Proposition 6.4 uit de handout) om te laten zien dat we in L het element -1 niet als een som van kwadraten kunnen schrijven. Want als

$$\sum_i \frac{g_i^2(x)}{h_i^2(x)} = -1$$

in L met $h_i(x) \notin I$, dan

$$\sum_i \prod_{j \neq i} g_i^2 h_j^2(x) + \prod_j h_j^2(x) \in I$$

en dus $\prod_j h_j^2(x) \in I$ en $h_j(x) \in I$ voor een j. Tegenspraak! De ordening op L moet die op K uitbreiden, want K is reëel afgesloten en daarmee laat elk positief element zich schrijven als een kwadraat. En deze elementen blijven positief in L.

Bovendien geldt

$$\exists x_1, \ldots, x_n\, f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \wedge \ldots \wedge f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

in L en daarmee ook in M, de reële afsluiting van L. En omdat RCOF kwantoreneliminatie heeft and $K \subseteq M$ een inbedding is van reëel afgesloten, geordende lichamen, geldt deze uitspraak ook in K. Tegenspraak!

Opgave 5. Zij $\mathcal{L}$ de signatuur die bestaat uit n 1-plaatsige relatiesymbolen $P_1, \ldots, P_n$. Zij T de $\mathcal{L}$-theorie die zegt dat in ieder model M van T de verzamelingen $P_1, \ldots, P_n$ oneindig zijn en een partitie vormen van de onderliggende verzameling van M.

(a) [10 punten] Bewijs dat T kwantoreneliminatie heeft.

(b) [10 punten] Bewijs dat in ieder model van T de formule $x = x$ Morleyrang 1 en Morleygraad n heeft.

Uitwerkingen opgave 5.

(a) We passen weer Theorem 1.5 uit de handout toe. Zijn M en N modellen van T een $f : \{m_1, \ldots, m_k\} \to N$ een locaal isomorfisme en $m \in M$. Als $m = m_i$ voor een i, dan breiden we f naar m naar $f(m_i)$ te sturen. Als $m \notin \{m_1, \ldots, m_k\}$ en $M \models P_i m$, dan sturen we m naar een element $n \in N$ zodat $N \models P_i n$ en $n \neq f(m_i)$ voor alle i (dit kan omdat alle equivalentieklassen in N oneindig zijn).

(b) Merk op dat de theorie T fijn en ω-categorisch is: dus zijn alle modellen van T ω-verzadigd (vanwege de stelling van Ryll-Nardzewski).

We laten zien dat de formules $P_i(x)$ Morleyrang 1 en Morleygraad 1 hebben. Omdat $x = x \leftrightarrow \bigvee_i P_i(x)$ en $\neg(P_i(x) \wedge P_j(x))$ voor $i \neq j$ volgt het gevraagde onmiddelijk uit de eigenschappen van Morleyrang en Morleygraad (zie slides 117 en 121).

Het is duidelijk dat $P_i(x)$ minstens Morleyrang 1 heeft, omdat er in ieder model M van T oneindig veel $m \in M$ bestaan zodat $M \models P_i(m)$. Nu is het voldoende om te laten zien dat er geen $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ bestaan zodat $T \models \neg(\varphi(x) \wedge \psi(x))$ en $T \models \varphi(x) \vee \psi(x) \to P_i(x)$ waarbij $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ minstens Morleyrang 1 hebben. Omdat T kwantoreneliminatie heeft, mogen we aannemen dat $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ disjuncties van conjuncties van literalen zijn. Ook kunnen we $\neg P_j(x)$ vervangen door $\bigvee_{k \neq j} P_k(x)$, dus mogen we aannemen dat $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ geen deelformules van de vorm $\neg P_i(x)$ bevatten; verder mogen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat de disjuncties uit een enkele disjunct bestaan: dus $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ zijn conjuncties van gelijkheden, ongelijkheden en atomen van de vorm $P_j(x)$. Maar gelijkheden zijn uitgesloten (anders hebben $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ Morleyrang 0) en verder kunnen ze alleen het literaal $P_i(x)$ bevatten; dit moet zelfs het geval zijn, omdat uit zowel $\varphi(x)$ als $\psi(x)$ de formule $P_i(x)$ moet volgen. Dus zowel $\varphi(x)$ als $\psi(x)$ zijn van de vorm:

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &\equiv P_i(x) \wedge x \neq m_1 \wedge x \neq m_2 \wedge \ldots \wedge x \neq m_k, \\
\psi(x) &\equiv P_i(x) \wedge x \neq m_{k+1} \wedge x \neq m_{k+2} \wedge \ldots \wedge x \neq m_{k+l}.
\end{aligned}
$$

Maar dan zijn $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ niet tegenstrijdig, want in ieder model van T is de klasse P_i oneindig en dus moeten er een $m \in M$ bestaan die in P_i ligt en verschilt van alle m_j voor $j \leq k + l$.

Opgave 6. Zij X een compacte Hausdorff ruimte. Voor iedere deelverzameling A van X definiëren we:

$$\Gamma(A) = \{x \in A : x \text{ is een verdichtingspunt van } A\}.$$

Dus $\Gamma(A)$ elimineert de geïsoleerde punten uit A. Verder definiëren we voor ieder ordinaalgetal α:

$$\begin{aligned}
\Gamma^0(X) &= X, \\
\Gamma^{\alpha+1}(X) &= \Gamma(\Gamma^\alpha(X)), \\
\Gamma^\lambda(X) &= \bigcap_{\alpha<\lambda} \Gamma^\alpha(X), \quad \text{wanneer } \lambda \text{ een limietordinaal is.}
\end{aligned}$$

De keten $\Gamma^\alpha(X)$ is monotoon dalend en dus moet er, omdat X een verzameling is, een ordinaalgetal δ bestaan zodanig dat $\Gamma^\alpha(X) = \Gamma^\delta(X)$ voor alle $\alpha > \delta$. We schrijven $\Gamma^\infty(X)$ voor $\Gamma^\delta(X)$.

(a) [5 punten] Bewijs dat $\Gamma^\infty(X)$ een gesloten deelverzameling van X is zonder geïsoleerde punten.

(b) [5 punten] Bewijs dat als X een aftelbare basis heeft, er een aftelbare α moet bestaan zodat $\Gamma^\alpha(X) = \Gamma^\infty(X)$.

(c) [5 punten] Bewijs dat als X een aftelbare basis heeft, $\Gamma^\infty(X) = \emptyset$ of $|\Gamma^\infty(X)| = 2^{\aleph_0}$.

(d) [5 punten] In deze opgave nemen we aan dat T een ω-stabiele theorie is en dat M een ω-verzadigd model van T is. We schrijven $S_n(M)$ voor $S_n(\mathrm{ElDiag}(M))$ en we bekijken de operatie Γ daarop. Dan zeggen we dat een type $p \in S_n(M)$ *Cantor-Bendixsonrang* α heeft, als $p \in \Gamma^\alpha(S_n(M)) \setminus \Gamma^{\alpha+1}(S_n(M))$. Bewijs dat elk type een Cantor-Bendixsonrang heeft en dat die samenvalt met de Morleyrang van dat type in M.

Uitwerkingen opgave 6.

(a) Voor $\Gamma^\infty(X)$ hebben we $\Gamma(\Gamma(^\infty(X)) = \Gamma^\infty(X)$. Dus ieder element van $\Gamma^\infty(X)$ is een verdichtingspunt van $\Gamma^\infty(X)$ (dat wil zeggen: $\Gamma^\infty(X)$ heeft geen geïsoleerde punten) en ieder verdichtingspunt van $\Gamma^\infty(X)$ ligt in $\Gamma^\infty(X)$ (dat wil zeggen: $\Gamma^\infty(X)$ is gesloten).

(b) Als $\Gamma^\infty(X) \neq \Gamma^\alpha(X)$ voor iedere aftelbare α, dan is er voor iedere aftelbare α een punt dat geïsoleerd ligt in $\Gamma^\alpha(X)$. Maar dan is er dus een basisopen dat $\Gamma^\alpha(X)$ snijdt, maar $\Gamma^{\alpha+1}(X)$ niet; kies zo'n basisopen B_α. Omdat B_α verschilt van B_β voor $\alpha \neq \beta$ is dit in strijd met het feit dat X een aftelbare basis heeft.

(c) Schrijf Y voor $\Gamma^\infty(X)$. Uit (a) volgt dat Y zelf een compacte Hausdorff-ruimte is zonder geïsoleerde punten. En als X een aftelbare basis heeft, dan heeft Y dat ook.

Uit dat laatste volgt dat $|Y| \leq 2^{\aleph_0}$, want zodra $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ een aftelbare basis is voor Y, wordt ieder punt $y \in Y$ vanwege het feit dat Y Hausdorff is volledig vastgelegd door de verzameling $\{n \in \mathbb{N} : y \in B_n\}$.

Neem nu aan dat $Y \neq \emptyset$: om te bewijzen dat $|Y| \geq 2^{\aleph_0}$ hebben we een lemma nodig.

Lemma: Zij Y een compacte Hausdorff ruimte en $y_0 \neq y_1 \in Y$. Dan zijn er open omgevingen B_0 en B_1 met $y_i \in B_i$ zodat de afsluitingen van B_0 en B_1 elkaar niet snijden. **Bewijs:** Omdat Y Hausdorff is zijn er disjuncte open omgevingen C_i van de y_i. Als de afsluitingen van de C_i elkaar snijden, kan dat alleen in de randen van de C_i: dat wil zeggen $\partial C_0 \cap \partial C_1$ is niet leeg. Kies dan voor elke $z \in \partial C_0 \cap \partial C_1$ open omgevingen $D_z \subseteq C_0$ van y_0, E_z van z en $F_z \subseteq C_1$ van y_1 die elkaar niet snijden. Omdat $\partial C_0 \cap \partial C_1$ gesloten en daarom compact is, wordt deze verzameling door slechts eindig veel E_z overdekt: zeg door $E_{z_1}, \dots, E_{z_n}$. Dan zijn $B_0 = \bigcap_{k \leq n} D_{z_i}$ en $B_1 = \bigcap_{k \leq n} F_{z_i}$ zoals gevraagd. $\square$

We construeren nu met inductie naar de lengte van $\sigma \in \{0,1\}^*$ een rij gesloten deelverzamelingen C_σ van Y zodat het inwendige van B_σ niet leeg is en $C_{\sigma * <0>}$ en $C_{\sigma * <1>}$ disjunct zijn en bevat zijn in B_σ. Begin met $C_{<>} = Y$. Als C_σ is geconstrueerd, dan heeft deze een niet-leeg inwendige. Deze bevat daarom minstens twee punten y_0, y_1: zou het namelijk slechts één punt bevatten, dan was dat punt geïsoleerd. Gebruik nu het lemma om open omgevingen B_0, B_1 van y_0, y_1 te kiezen waarvan de afsluitingen bevat zijn in B_σ en disjunct zijn. Definieer nu $C_{\sigma * <i>}$ als de afsluiting van B_i.

Per constructie heeft voor iedere $\alpha : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ de verzameling de $\{C_{<\alpha(0),\dots,\alpha(n)>} : n \in \mathbb{N}\}$ de "finite intersection property" en daarmee is $C_\alpha = \bigcap \{C_{<\alpha(0),\dots,\alpha(n)>} : n \in \mathbb{N}\}$ niet leeg, vanwege de compactheid van Y. Omdat C_α en C_β voor $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ disjunct zijn zodra $\alpha \neq \beta$ is deze opgave hiermee opgelost.

(d) We schrijven $\mathrm{RCB}(p)$ voor de Cantor-Bendixsonrang van p. Omdat T ω-stabiel is heeft iedere formule een Morleyrang en dus is het voldoende om te bewijzen dat

$$\mathrm{RCB}(p) \geq \alpha \Leftrightarrow \mathrm{RM}(p) \geq \alpha$$

voor alle α; merk op dat het eerste equivalent is met $p \in \Gamma^\alpha(S_n(M))$. We bewijzen deze equivalentie met inductie naar α.

De uitspraken $\mathrm{RCB}(p) \geq 0$ en $\mathrm{RM}(p) \geq 0$ gelden altijd, dus is de uitspraak waar voor $\alpha = 0$. Als α een limietordinaal is, dan geldt:

$$\begin{aligned} \mathrm{RCB}(p) \geq \alpha \Leftrightarrow p \in \Gamma^\alpha(S_n(M)) &\Leftrightarrow p \in \textstyle\bigcap_{\beta < \alpha} \Gamma^\beta(S_n(M)) \\ &\Leftrightarrow_{\mathrm{IH}} (\forall \beta < \alpha)\, \mathrm{RM}(p) \geq \beta \Leftrightarrow \mathrm{RM}(p) \geq \alpha. \end{aligned}$$

Het interessante geval is dus die waarin we naar een opvolgerordinaalgetal $\alpha + 1$ kijken.

$\Rightarrow$: Stel p is een type met $\mathrm{RCB}(p) \geq \alpha + 1$ en $\mathrm{RM}(p) \leq \alpha$. Dan $\mathrm{RM}(p) = \alpha$ (vanwege IH) en p wordt bepaald door een formule φ_p met Morleyrang α en Morleygraad 1 (zoals in slide 122). Omdat $\mathrm{RCB}(p) \geq \alpha + 1$ is er in de omgeving $[\varphi_p]$ van p een type q met $\mathrm{RCB}(q) \geq \alpha$ en $q \neq p$. Weer vanwege de IH geldt $\mathrm{RM}(q) \geq \alpha$; verder geldt $\varphi_p \in q$ en dus wordt q volledig bepaald door φ_p (zoals in slide 122). Dus $p = q$. Tegenspraak!

$\Leftarrow$: Stel $\mathrm{RM}(p) \geq \alpha + 1$: doel is te laten zien dat p een verdichtingspunt is van $\Gamma^\alpha(S_n(M))$. We bekijken dus een open omgeving U van p en zoeken een element uit $\Gamma^\alpha(S_n(M))$ in U; zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat U een basisopen $[\varphi]$ is. Omdat $\varphi \in p$ geldt $\mathrm{RM}(\varphi) \geq \alpha + 1$ en dus is er een ψ met $\mathrm{RM}(\psi) = \alpha$ and $M \models \psi(x) \to \varphi(x)$ (zie slide 117). Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat $\mathrm{dM}(\psi) = 1$. Nu brengt ψ een type q voort (zie lemma onder). Dan $q \in [\varphi]$ en $q \neq p$, want $\mathrm{RM}(q) = \mathrm{RM}(\psi) = \alpha$. Hiermee is het bewijs geleverd.

Lemma: Neem aan dat elke consistente formule een rang heeft en dat we Morleyrang en -graad berekenen met betrekking tot een vast gekozen ω-verzadigd model M. Zij $\varphi(x)$ een consistente formule met Morleygraad 1. Dan brengt $\varphi(x)$ een type $p(x)$ voort door:

$$p(x) \quad = \quad \{\psi(x) : \mathrm{RM}(\varphi(x) \wedge \psi(x)) = \mathrm{RM}(\varphi(x))\}.$$

Bewijs: Het is voldoende om te bewijzen dat:

1. Elke $\psi(x) \in p(x)$ realiseerbaar is in M.
2. Als $\psi_0(x) \in p(x)$ en $M \models \psi_0(x) \to \psi_1(x)$, dan $\psi_1(x) \in p(x)$.
3. Als $\psi_0(x) \vee \psi_1(x) \in p(x)$, dan $\psi_0(x) \in p(x)$ of $\psi_1(x) \in p(x)$.
4. Voor elke formule $\psi(x)$ geldt: of $\psi(x) \in p(x)$ of $\neg\psi(x) \in p(x)$ (maar niet beide).

Merk op dat $\mathrm{RM}(\varphi(x) \wedge \psi(x)) = \mathrm{RM}(\varphi(x))$ equivalent is met $\mathrm{RM}(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \geq \mathrm{RM}(\varphi(x))$.

Ad 1: Als $\psi(x) \in p(x)$, dan $\mathrm{RM}(\psi(x)) \geq \mathrm{RM}(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \geq \mathrm{RM}(\varphi(x)) \geq 0$, dus $\psi(x)$ is realiseerbaar in M.

Ad 2: dit volgt onmiddelijk uit slide 117.

Ad 3: Als $\psi_0(x) \vee \psi_1(x) \in p(x)$, dan

$$\begin{aligned}
\mathrm{RM}(\varphi(x)) &= \mathrm{RM}(\varphi(x) \wedge (\psi_0(x) \vee \psi_1(x))) \\
&= \mathrm{RM}((\varphi(x) \wedge \psi_0(x)) \vee (\varphi(x) \wedge \psi_1(x))) \\
&= \max(\mathrm{RM}(\varphi(x) \wedge \psi_0(x)), \mathrm{RM}(\varphi(x) \wedge \psi_1(x))).
\end{aligned}$$

Dus $\psi_0(x) \in p(x)$ of $\psi_1(x) \in p(x)$.

Ad 4: Alle tautologieën, zoals $\psi(x) \vee \neg\psi(x)$, behoren zeker tot $p(x)$. Dus met 3 volgt dat $\psi(x) \in p(x)$ of $\neg\psi(x) \in p(x)$. Anderzijds kunnen ze niet beiden tot $p(x)$ behoren: want dat weerspreekt het feit dat $\varphi(x)$ Morleygraad 1 heeft en niet in twee formules met dezelfde Morleyrang kan worden opgesplitst. $\square$