Vallende en stuiterende ballen

1. Inleiding

Iedereen weet het uit ervaring: de meeste voorwerpen die je op zekere hoogte loslaat bewegen verticaal naar beneden. Sommige van deze vallende voorwerpen komen al stuiterend tot stilstand op een ondergrond. Denk maar aan het stuiteren van een voetbal op een grasmat of aan het stuiteren van een tafeltennisballetje op een tafel. In deze lesmodule ga je de beweging van vallende en stuiterende ballen bestuderen aan de hand van experimentele gegevens. Met je kennis van wis- en natuurkunde zul je antwoorden proberen te vinden op vragen zoals

- Kun je de beweging van een vallende bal nauwkeurig beschrijven en voorspellen?
- Welke factoren spelen eigenlijk een rol bij de beweging van een vallende bal?
- Kun je de baan van een stuiterende bal nauwkeurig beschrijven en voorspellen?
- Aan het geluid van een stuiterende bal (bijvoorbeeld een tafeltennisbal) is te horen dat de perioden tussen twee botsingen met de ondergrond kleiner wordt in de loop van de tijd. Welke factoren zijn hierop van invloed?
- Kun je de tijd berekenen die nodig is voordat een stuiterende bal tot stilstand komt?
- Is de beweging te berekenen en te voorspellen van een stuiterende bal op een trillende ondergrond?

Je zult bij je studie gebruikmaken van de meet- en modelleeromgeving van Coach 6 om experimentele gegevens te verzamelen, te analyseren en met resultaten van modelberekeningen te vergelijken.

Opdracht 1. Schrijf een aantal onderzoeksvragen op voor een mogelijke studie van de beweging van een

a) vallende bal;
b) stuiterende bal.

Opdracht 2.
Stel dat een bevriende medeleerling je om advies vraagt wat betreft zijn of haar plan van aanpak om de beweging van een stuiterende tafeltennisbal te bestuderen. Welke deelproblemen die onderzocht zouden kunnen worden zou je dan suggereren?

2. Een vallende bal

Je gaat de beweging van een vallende bal proberen te beschrijven en te voorspellen. Belangrijke vragen zijn: “Hoe lang duurt het voordat een bal die op zekere hoogte verticaal naar beneden wordt afgeworpen de ondergrond bereikt?”, “Met welke snelheid komt de bal op de ondergrond terecht?” en “Welke factoren spelen bij de valbeweging een rol?”.

De afwerpsnelheid en de afwerphoogte waarop dit gebeurt spelen een rol. Daarnaast kunnen aërodynamische en geografische effecten de beweging beïnvloeden.

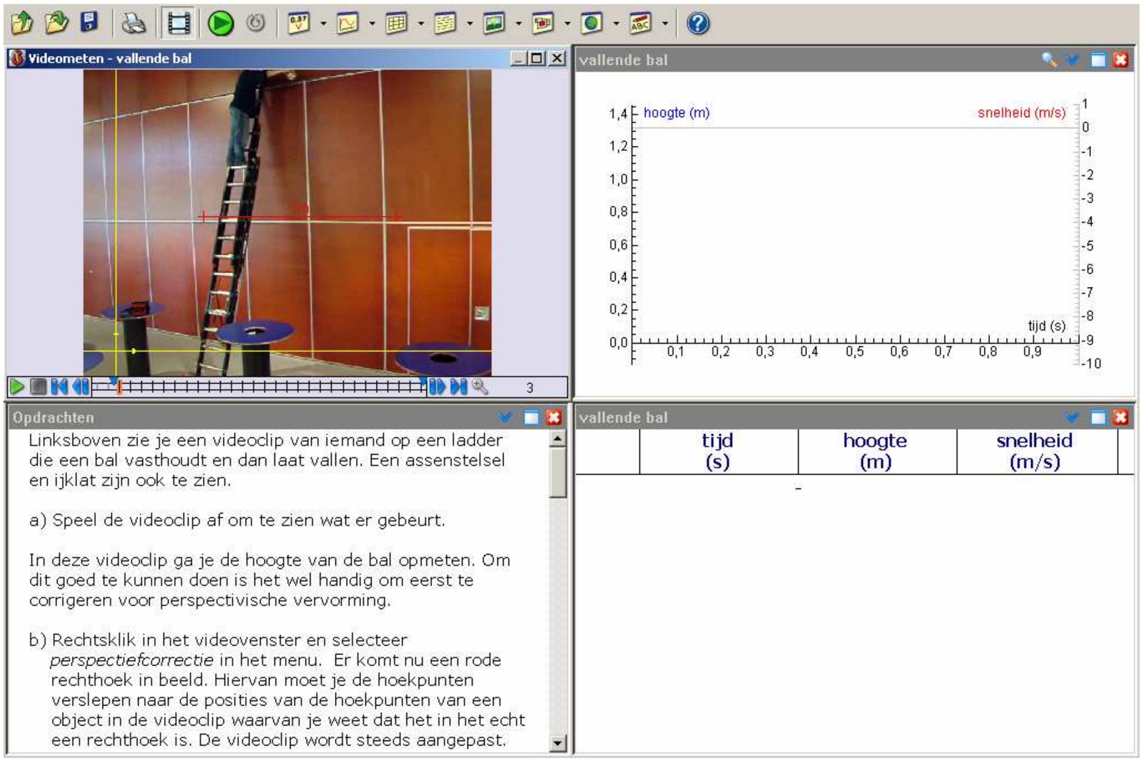
Opdracht 3.

a) Schat eens hoelang het duurt voordat een bal die simpelweg losgelaten wordt op een hoogte van 5 meter de ondergrond bereikt en probeer een argument te vinden voor je schatting. De keuzemogelijkheden zijn: (i) 0,5 s (ii) 1 s (iii) 2 s (iv) 5 s.
b) Schat eens met welke vaart een bal die simpelweg losgelaten wordt op een hoogte van 5 meter op de ondergrond neerkomt probeer een argument te vinden voor je schatting. De keuzemogelijkheden zijn: (i) 1 m/s (ii) 2,5 m/s (iii) 5 m/s (iv) 10 m/s.

Engelsen zeggen: “The proof of the pudding is in the eating”. In het Nederlands vertaald betekent dit dat in de praktijk zal blijken of het goed is. Daarom een Coach opdracht waarin een video te zien is met een man op een ladder die een bal vasthoudt en naar beneden laat vallen.

2.1. Meten

Coach opdracht 4. Linksboven in onderstaande schermafdruk (Figuur 1) zie je een videoclip van iemand op een ladder die een bal vasthoudt en dan laat vallen. Een assenstelsel en ijklat zijn ook te zien.



Figuur 1. Schermafdruk van videomeet-activiteit van vallende bal.

a) Speel de videoclip af om te zien wat er gebeurt.

In deze videoclip ga je de hoogte van de bal opmeten. Om dit goed te kunnen doen is het wel handig om eerst te corrigeren voor perspectivische vervorming.

b) Rechtsklik in het videovenster en selecteer *perspectiefcorrectie* in het menu. Er komt nu een rode rechthoek in beeld. Hiervan moet je de hoekpunten verslepen naar de posities van de hoekpunten van een object in de videoclip waarvan je weet dat het in het echt een rechthoek is. De videoclip wordt steeds aangepast tijdens je manipulatie. Als je klaar bent met perspectiefcorrectie kun je deze menukeuze het beste deselecteren om later niet per abuis wijzingen aan te brengen. De rode vierhoek verdwijnt dan weer.

De voorbereidingen voor de videometing van de hoogte van de vallende bal gaan door. Eerst zet je het assenstelsel op een geschikte plaats en plaats je de ijklat zodanig dat je hiervoor een in werkelijk bekende lengte op kunt geven.

c) Wat is de meest geschikte plaats voor de oorsprong van het assenstelsel als je de hoogte van de vallende bal op elk filmbeeldje wilt registreren? Plaats het assenstelsel ook daadwerkelijk op de door jou gekozen plek.

d) Gegeven is dat elk tegelblok in de wand een hoogte van 2,2 m heeft. Hiermee zijn verschillende hoogtes in de videoclip bekend of eenvoudig te berekenen. Gebruik deze informatie om de ijking van hoogte uit te voeren. (Aanwijzing: bedenk welke bekende hoogte de meest nauwkeurige ijking oplevert).
e) Na het positioneren van het assenstelsel en de schaling hoeven het assenstelsel en de ijklat niet meer in beeld te blijven. Zet de zichtbaarheid uit.

Alles staat nu klaar om de hoogte van de bal in elk filmbeeldje te meten.

f) Je begint de handmatige meting door op de groene startknop (of de <F9> toets) te drukken. Nu moet je telkens met de linker muisknop, die nu een vizier is geworden, op de vallende bal te klikken. Het meest precies kun je dit doen als je het venster op maximale grootte zet.

Er ontstaan twee grafieken (die we klaargezet hebben in het diagram rechtsboven). De rondjes geven de hoogte aan van de bal in de diverse filmbeeldjes op bijpassende tijdstippen. Voor alle duidelijkheid kun je de benaming P1Y vervangen door de naam *hoogte*. De getrokken lijn is de afgeleide van de meetwaarden die uit de meting van de video numeriek wordt bepaald. Het is dus de verticale snelheid van de bal (negatief bij neergaande beweging en kortweg snelheid genoemd). De precieze waarden staan in de tabel rechtsonder.

Een andere manier om de video op te meten is via *Traceren*. Dan kun je een interessant punt in de videoclip, in dit geval de vallende bal, automatisch laten volgen door de software en de positie in elk beeldje laten registreren.

g) Wis de gegevens en selecteer het onderdeel Traceren in het menu. Er verschijnt nu een vierkant met daarbinnen een vizier. Plaats het vizier zo goed mogelijk op de bal. Het vierkant markeert het zoekgebied waarin Coach in het volgende beeldje de bal zal zoeken. Dit kun je desgewenst aanpassen, maar doe eerst maar eens een meting. Controleer of de automatische videometing goed gaat.

Ook nu ontstaan de twee grafieken van hoogte en verticale snelheid. Om deze grafieken goed te kunnen vergelijken met de grafieken die met behulp van modelleren zullen ontstaan, moeten de grafieken geëxporteerd worden. Ook voor de verdere analyse van de meetresultaten is het handig om na het uitvoeren van de metingen eerst de tussenresultaten veilig te stellen. Dit doe je door de activiteit in een resultaatbestand op te slaan:

Bestand $\rightarrow$ Opslaan als $\rightarrow$
Tik achter "Naam:" *Resultaat videometing vallende bal*
en wijzig "Opslaan als:" in: *Coach 6 Resultaat (*.cmr).*

h) Vergelijk de gemeten valtijd en de vaart waarmee de bal de grond raakt met de door jou geschatte waarden in opdracht 3.

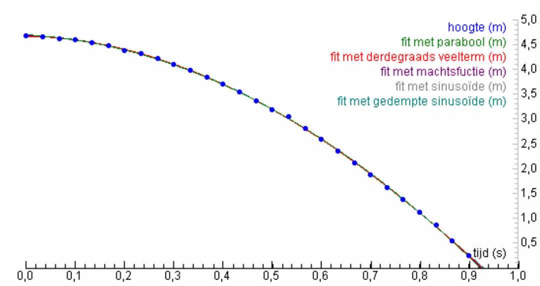
2.2. Experimenteel modelleren

De meest luie manier om de beweging van de vallende bal in de videoclip van de vorige opdracht wiskundig te beschrijven is via *regressie* (ook wel *functiefit* genoemd). Je probeert dan bij de op verschillende tijdstippen t gemeten hoogte h een bekend wiskundig verband, bijvoorbeeld $h = a \cdot t + b$ of $h = a \cdot \sin(b \cdot t + c) + d$, en waarden voor parameters a, b, … te vinden die “het best passen” bij de gegevens. Wat precies bedoeld wordt met “het best passen” is variabel, maar een veelgebruikt criterium is het volgende: de parameters in het functievoorschrift dat het wiskundige verband vastlegt krijgen zodanige waarden dat hiermee de som van de kwadraten van de verschillen tussen berekende functiewaarden en gegevens zo klein mogelijk is. Dit wordt *de methode van de kleinste kwadraten* genoemd. Een maat voor de geschiktheid van een wiskundig verband om meetgegevens te beschrijven is het gemiddelde van de kwadratische verschillen tussen berekende en gemeten waarden. Vaak wordt hiervan de wortel getrokken en dan wordt het de *standaardafwijking van de fit* genoemd. De standaardafwijking moet klein zijn wil je een functiefit geslaagd vinden.

Je grafische rekenmachine en Coach 6 bieden de mogelijkheid om de methode van kleinste kwadraten met veel voorkomende wiskundige verbanden toe te passen op gegevens. Coach toont, nadat de functiefit berekend is, gelijk de grafiek van de gegevens en van de fit en het brengt de getalswaarde van de standaardafwijking van de fit gelijk in beeld. Zo kun je meteen het resultaat voor een gekozen wiskundig verband zien. Ook kun je in Coach de regressiemethode gemakkelijk toepassen voor een deel van de gegevens door in de grafiek van de gegevens in te zoomen op een kleiner gebied. Wat betreft het opsporen van de meest geschikte variabelen biedt Coach de mogelijkheid om het computerprogramma een schatting te laten maken, die je daarna nog kunt laten verbeteren. Maar ook kun je handmatig (door manipuleren van de fitkromme of door invullen van getalswaarden) een redelijke functiefit initiëren en daarna verfijnen.

Coach opdracht 5. Open het resultaatbestand uit de vorige Coach opdracht (of ga door met de Coach activiteit als je deze nog niet hebt afgesloten).

a) De grafiek van de snelheid ziet er op het oog uit als een rechte lijn. Welke consequentie heeft dit voor het vermoedelijke wiskundige verband tussen hoogte en tijd? Controleer dit via functiefit.
b) Laat functiefit eens los op de meetgegevens voor de volledige in Coach gegeven lijst van functietypen (voor zover zinvol). Welke wiskundige verbanden lijken bij regressie ook een goed resultaat op te leveren?
c) Ga na dat een functiefit met een machtsfunctie $h = a \times t^b + c$ een goed resultaat oplevert als je met geschikte startwaarden voor de parameters begint.



De wiskundige beschrijving van de beweging van de vallende bal in de videoclip via regressie is eigenlijk een vorm van experimentele wiskunde. Het is een tamelijk domme methode, die je alleen maar toepast als je niets beters weet te verzinnen. Je hebt vast al wel in de vorige opdracht gezien dat vele regressiekrommen tot een goed resultaat leiden. In nevenstaand diagram kun je de ene grafiek bijna niet onderscheiden van de andere en ze gaan allemaal door de meetpunten heen. De regressievergelijkingen van sommige krommen zijn: $h = -4,911t^2 - 0,544t + 4,69$ (parabool), $h = -5,385t^{1,86275} + 4,666$ (machtsfunctie) en $h = 10,836\sin(1,0184t + 1,5905) - 6,169$ (sinusoïde). Hoe weet je nu welk verband het meest betekenisvol is? En moet je bij een andere vallende bal weer opnieuw beginnen? Tijd dus om rekenmachines en computers aan de kant te schuiven en eerst eens na te denken over de valbeweging. Wat kun je met gebruik van wat natuurkundige principes over de hoogte-tijdkromme te weten komen?

2.3. Modelleren met formules

Opdracht 6.

a) Welke krachten werken er op de bal zodra deze losgekomen is van de hand van experimentator?
b) Welke kracht denk je dat de belangrijkste rol speelt bij de berekening van de hoogte-tijdkromme?
c) Noem enkele factoren die van invlloed kunnen zijn op de beweging van de vallende bal.

Veronderstel nu eens dat alleen maar zwaartekracht op de bal werkt tijdens de val recht naar beneden en dat aërodynamische effecten geen rol spelen. Met andere woorden: ga nu eens uit van *vrije val*. Onder deze voorwaarde is de wis- en natuurkunde niet zo moeilijk. Gebruik de volgende notatie en kies daarbij als oorsprong van het assenstelsel de positie waar de bal op de ondergrond neerkomt en als tijdstip $t = 0$ het moment waarop de bal vrij in beweging komt.

$v_0 =$ afwerpsnelheid, $h_0 =$ afwerphoogte,

$t =$ tijdsduur na wegwerpen van de bal,

$h =$ hoogte van de bal op tijdstip t,

$v =$ snelheid van de bal op tijdstip t,

$a =$ versnelling van de bal op tijdstip t,

$m =$ massa van de kogel, $g =$ valversnelling

Opdracht 7.

a) Laat zien dat onder de zojuist gemaakte aannames er in verticale richting sprake is van een eenparig versnelde rechtlijnige beweging tengevolge van de zwaartekracht. Wat is de constante versnelling van de bal?

b) Leidt hieruit de formules voor de snelheid en hoogte van de bal op tijdstip t af (schrijf ook je afleiding op).

c) De wiskundige formule voor de hoogte van een puntvoorwerp in vrije val is een parabool. Als het goed is heb je dit in het vorige onderdeel ook gevonden. Schrijf op wat de betekenis is van elk van de coëfficiënten van de parabool. Zoek de formule van de kwadratische functiefit in Coach opdracht 5 nog eens op en ga na of de coëfficiënten van de bergparabool aan je verwachtingen voldoen en of ze overeenstemmen met hetgeen je in de videoclip ziet overeenstemmen.

Opdracht 8. Ga nu eens uit van een vrije val zonder beginsnelheid.

a) Wat is onder deze omstandigheden de formule voor de hoogte van de bal op tijdstip t?

b) Toon aan dat de valtijd, d.w.z. de tijd die de bal nodig heeft om op de ondergrond neer te komen, gelijk is aan $\sqrt{\dfrac{2h_0}{g}}$.

c) Toon m.b.v. je antwoorden op onderdelen a) en b) aan dat de snelheid waarmee de bal neerkomt op de ondergrond gelijk is aan $\sqrt{2gh_0}$.

d) Laat zien dat je de formule van onderdeel c) ook kunt afleiden via de wet van behoud van energie.

e) De zwaartekrachtversnelling g varieert van $9{,}83\ \mathrm{m/s^2}$ aan de polen tot $9{,}78\ \mathrm{m/s^2}$ op de evenaar. In Nederland, op 52° noorderbreedte, bedraagt $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. Als je een voorwerp van een hoogte van 5 meter in vrije val naar beneden laat gaan zonder beginsnelheid te geven, hoeveel tijdsverschil in milliseconden zal er dat optreden in de valtijd tussen de uitvoering van dit experiment op de evenaar en op de noordpool?

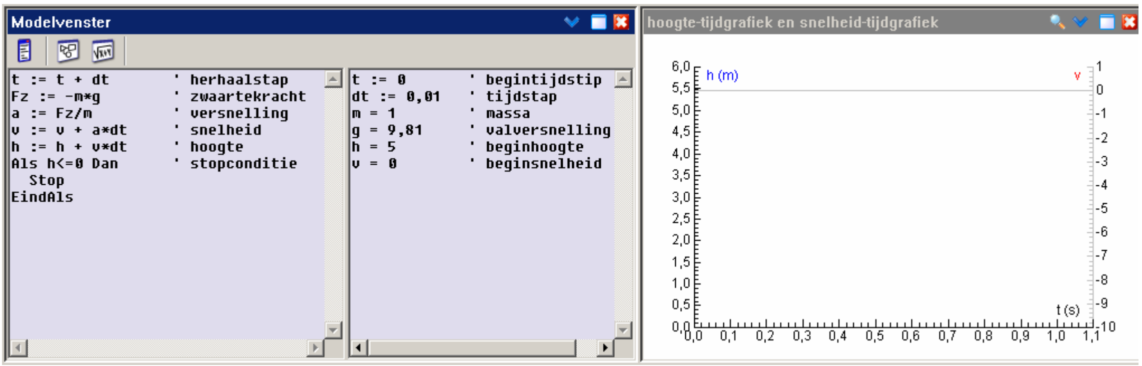
f) De zwaartekrachtversnelling op de maan is ongeveer 1/6 van die op de aarde. Hoeveel langer is de valtijd op de maan in vergelijking met de aarde?

De kracht van het wiskundige model is dat we nu een op wiskundige en natuurkundige principes gebaseerde beschrijving hebben van de vrije val van elke bal losgelaten op een willekeurige hoogte met <u>wat voor beginsnelheid en beginhoogte</u> dan ook. Weliswaar een idealisering van het loslaten van een bal, maar toch, alle hoogte-tijdkrommen van vallende ballen zijn gelijkvormig en wel bergparabolen. Er is dus eigenlijk in wezen maar één hoogte-tijdkromme.

2.4. Werken met computermodellen

In plaats van de aanpak met het nodige formulewerk kun je ook een computermodel opstellen op basis van eenvoudige natuurkundige principes zoals de wetten van Newton. Dit kan in Coach op drie manieren: grafisch, via vergelijkingen en tekstgebaseerd. In de volgende opdracht bekijk je de drie methoden van modelleren van de verticale vrije val van een voorwerp vanaf een gegeven hoogte en met een gegeven beginsnelheid.

Coach opdracht 9. Open het de bijpassende Coach activiteit. Het bovenste gedeelte van het scherm ziet er als volgt uit (na het naar links verschuiven van de scheider in het midden van het modelvenster):



Figuur 2. Tekstgebaseerd computermodel van vallende bal.

Je ziet een apart modelvenster waarin links het tekstgebaseerde computermodel staat en rechts de parameters die je kunt instellen. De tekst voor de apostrof is de echte computercode die tijdens het doorrekenen van het computermodel daadwerkelijk gebruikt wordt. Rechts van de apostrofs staat steeds commentaar ter verduidelijking van wat er met de coderegel(s) bedoeld is. Hiermee wordt niets gedaan tijdens het doorrekenen van het computermodel. Het computermodel kun je lezen als een reeks van opdrachten die herhaald worden uitgevoerd totdat aan de stopconditie voldaan is of het maximale aantal herhalingen (iteraties) bereikt is. De programmastructuur is als volgt:

t := t + dt	herhaalstap	t = 0	begintijdstip
Fz := - m*g	zwaartekracht	dt = 0,01	tijdstap
a := Fz / m	2e wet van Newton	m = 1	massa van de bal
v := v + a*dt h := h + v*dt	bewegings- vergelijkingen	g = 9,81	zwaartekrachtversnelling
Als h <= 0 Dan Stop EindAls	stopconditie	h = 5 v = 0	Beginhoogte van de bal beginsnelheid van de bal

Rechts in het modelvenster staan de parameters die je voor een computersimulatie kunt instellen. In dit model kun je behalve de beginhoogte, beginsnelheid en massa van het geworpen voorwerp ook nog de zwaartekrachtversnelling opgeven. De tijdstap dt bepaalt op welke tijdtippen de positie van het vallende voorwerp numeriek berekend wordt. De coderegels aan de rechterkant van het modelvenster worden slecht één keer uitgevoerd en wel bij de start van een simulatie. Een simulatie doe je door op de groene startknop in de knoppenbalk te drukken.

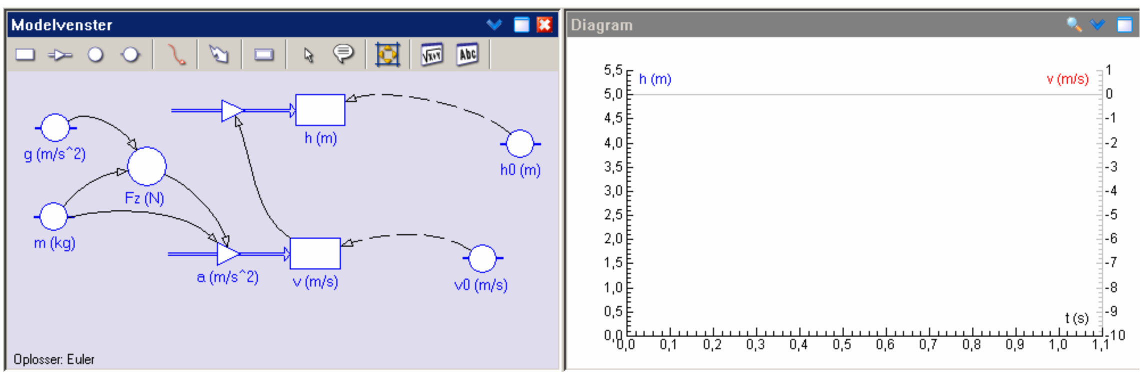
De grafieken die in het diagramvenster klaargezet zijn worden automatisch getekend. Je kunt ook nog in het modelvenster het menu item Simulatie kiezen en dan een parameter wijzigen.

Voer simulaties uit met wisselende waarden voor de massa van de bal, voor de beginhoogte en beginsnelheid, en voor de zwaartekrachtversnelling op de maan $g = 1,63\ \mathrm{m/s^2}$. Begrijp je steeds welk effect de verandering van een parameterwaarde heeft op de hoogte-tijdgrafiek en de snelheid-tijdgrafiek?

Coach opdracht 10. Open de bijpassende Coach activiteit. Het bovenste gedeelte van het scherm ziet er als in onderstaande schermafdruk. Je ziet een apart grafisch modelvenster.

a) Reken het model door (i.p.v. op de groene startknop te drukken kun je hiervoor ook de <F9> toets gebruiken). Dezelfde grafieken als in opdracht 9 ontstaan.

b) Eigenlijk is het grafische model alleen maar een andere weergave van het eerder besproken model. Klik maar eens op de Abc-knop in de werkbalk van het modelvenster om het onderliggende *tekstgebaseerde model* te aanschouwen. Controleer dat dit in wezen het zelfde computerprogramma is.



Figuur 3. Grafisch model van vallende bal.

c) Bekijk ook eens het model in *vergelijkingenmodus* door op de 'formuleknop' in de werkbalk van het modelvenster te klikken. Het modelvenster heeft een zelfde structuur als het tekstgebaseerde modelvenster: links staan grootheden en hun veranderingen gespecificeerd via bewegingsvergelijkingen en rechts staat een lijst van parameters die je kunt instellen. Laten we als voorbeeld eens de volgende bewegingsvergelijking bekijken:

v(t) = v(t-dt) + (a)*dt (m/s)

De rechterkant (m/s) geeft de eenheid van snelheid aan en hoort niet echt bij de bewegingsvergelijking. Deze vergelijking kun je herschrijven als:

$$\frac{v(t) - v(t-dt)}{dt} = a$$

Met ander woorden, hier staat dat het differentiequotiënt van de snelheid gelijk is aan de gemiddelde versnelling over het tijdsinterval (t – dt, t). Dank je de koekoek: dit is een herformuleren van de definitie van versnelling, mits je de tijdstap dt oneindig klein neemt! Ga zelf na dat de eerste bewegingsvergelijking h(t) = h(t-dt) + (Stroom_1)*dt (m) in combinatie met de definitie Stroom_1 = v eigenlijk niets nieuws onder de zon oplevert en een andere manier is om de definitie van snelheid op te schrijven.

d) Zet het modelvenster weer terug in *grafische modus*. Om de betekenis van het grafische model te begrijpen moet je weten waar de iconen voor staan. Er wordt onderscheid gemaakt in vier typen variabelen: *toestandsvariabelen* (rechthoeken), *stroomvariabelen* (dubbele pijlen met een driehoek in het midden die de pijlrichting accentueert), *constanten* (cirkels met 'handvaten) en tenslotte *hulpvariabelen* (cirkels). De stroomvariabelen representeren de veranderingen van toestandsgrootheden en de bijpassende formules leggen het veranderingsproces vast. De *onafhankelijke variabele* in het model, in ons geval de tijd t, heeft een icoon in de werkbalk van het modelvenster, nl. de rechthoek met een dubbele rand naast het aanwijsknopje. De icoon is ook expliciet zichtbaar te maken in het modelvenster. Door op een icoon dat in het modelvenster geplaatst is te klikken krijg je een dialoogvenster waarin je namen, eenheden, beschrijvingen, definities en representaties van de variabelen kunt opgeven.

Dubbelklik op de icoon met de naam a en kijk of je snapt wat in het dialoogvenster staat. De instellingen van de tijdstap, stopconditie, rekenmethode en opslag van modelresultaten regel je via de ‘Instelling’ knop (stopwatch ) in de bovenste werkbalk Dubbelklik op de ‘Instelling’ knop en kijk of je snapt wat in het dialoogvenster staat. In het grafische model zijn ook relatiepijlen te zien aangemaakt via de knop  in de werkbalk van het modelvenster. Ze worden gebruikt om in het grafische model expliciet aan te geven waarop een variabele invloed heeft of waar deze van afhangt. Je bent overigens niet verplicht dergelijke relaties met pijlen aan te geven. Advies is om dit bij meer ingewikkelde modellen alleen voor de belangrijkste relaties te doen.

e) Importeer de gemeten hoogte-tijdkromme uit de videometing van opdracht 4 als achtergrondgrafiek in het diagramvenster, in een weergave via kruisjes zonder verbindingslijnen. Kies nu dusdanige waarden voor de parameters in je model dat de modelresultaten en meetresultaten goed overeenkomen.

Het idee is dat het modelleren van veranderingsprocessen via het grafische interface gemakkelijker gaat dan het tekstgebaseerd modelleren omdat je beter overzicht houdt over de status van het modelleerproces en gemakkelijker over het computermodel met iemand anders kunt praten. De afhankelijkheden van grootheden zijn in het grafisch model in beeld gebracht en vraagtekens geven aan als je nog een getalswaarde of formule vergeten bent in te vullen. Daarnaast geven de dialoogvensters je houvast bij het specificeren van onderdelen van het model; je hoeft niet precies de syntax van de Coach programmeertaal te kennen. Minpuntje is wel dat je te maken krijgt met de eigen taal en denktrant van wat bekend staat als *systeem-dynamisch modelleren*. Deze wijkt af van de meest krachtige en efficiënte taal en werkwijze die er bestaat, nl. de wiskundige beschrijving van discrete en continue dynamische modellen. Maar leren werken met grafische computermodellen loont de moeite omdat je er zoveel mee kunt bereiken zonder al te groot beroep te hoven doen op je wiskundige kennis en vaardigheden. Computermodellen zijn ook toepasbaar in situaties waarin een exacte wiskundige aanpak tekort schiet. Als voorbeeld moge de volgende Coach opdracht dienen waarin een vallende bal onder invloed van zwaartekracht en luchtwrijving gemodelleerd wordt.

Coach opdracht 11. De kracht F_w die een voorwerp ondervindt als gevolg van luchtwrijving is te berekenen met de volgende formule:

$$F_w = \frac{1}{2}\rho \cdot A \cdot c_w \cdot v^2\,, \tag{2.1}$$

waarbij ρ de dichtheid van de lucht is, A de oppervlakte van de doorsnede van het voorwerp loodrecht op de bewegingsrichting ($A = \frac{1}{4}\pi \cdot D^2$ voor een bal met diameter D), v de snelheid van het bewegende voorwerp t.o.v. de luchtdeeltjes is en c_w de luchtwrijvingscoëfficiënt is. De luchtwrijvingscoëfficiënt hangt af van de vorm en materiaal van het voorwerp. Hoewel deze coëfficiënt ook van de snelheid afhangt wordt deze in berekeningen vaak constant genomen. Voor een tafeltennisbal mag je de volgende waarden kiezen:

$$m = 0{,}0027\,\text{kg}, \quad D = 0{,}04\,\text{m}, \quad c_w = 0{,}5\,, \quad \rho = 1{,}2\,\text{kg/m}^3\,.$$

a) Pas het tekstgebaseerde model van de vrije val uit opdracht 9 zodanig aan dat luchtwrijving in het model is opgenomen.
b) Doe een simulatie voor een tafeltennisbal die op een hoogte van 5 meter losgelaten wordt en vergelijk het modelresultaat met het modelresultaat verkregen bij vrije val. Wat kun je zeggen over de valtijd en de vaart in de situatie met en zonder luchtwrijving.
c) Bouw een grafisch model voor de valbeweging van een voorwerp waarin rekening gehouden wordt met luchtwrijving. Ga na dat je model hetzelfde werkt als het tekstgebaseerde computermodel.

3. Een stuiterende bal

3.1. Modelleren van de beweging in de lucht

Bij een verticaal stuiterende bal is er ook nog een opgaande beweging in de lucht. Als je luchtwrijving verwaarloost, dan is de opgaande beweging in wezen niet anders dan de eenparig versnelde beweging onder invloed van de zwaartekrachtversnelling met een beginhoogte nul en beginsnelheid naar boven gericht.

Coach opdracht 12. Open de bijpassende Coach activiteit, die overigens gelijk is aan die van opdracht 10.

a) Kies de beginhoogte gelijk aan nul en de beginsnelheid gelijk aan 10 m/s om de beweging te modelleren van een bal die omhoog gaat vanaf de ondergrond met zekere beginsnelheid en weer op de ondergrond neerkomt. Doe de simulatie en bekijk de hoogte-tijdgrafiek en de snelheid-tijdgrafiek. Welke conclusies over de beweging van de bal worden door de vorm van de grafieken gesuggereerd?
b) Kun je jouw conclusies ook met natuurkundige argumenten onderbouwen?
c) Leid een formule af voor de maximale hoogte van de bal (schrijf ook je afleiding op) en voor het tijdstip waarop dit gebeurt.
d) De bal komt uiteindelijk weer neer op de ondergrond. Met welke snelheid?
e) Welke wiskundige formule geldt voor de tijdsduur dat de bal in de lucht is?
f) Maak een model voor een vallende bal met een gegeven beginsnelheid dat rekening houdt met luchtwrijving (misschien heb je dit model al wel in opdracht 11 gemaakt). Kies de beginhoogte gelijk aan nul en de beginsnelheid gelijk aan 10 m/s om de beweging te modelleren van een bal die omhoog gaat vanaf de ondergrond met zekere beginsnelheid en weer op de ondergrond neerkomt. Doe de simulatie en bekijk de hoogte-tijdgrafiek en de snelheid-tijdgrafiek. Welke verschillen zijn er met het model zonder luchtwrijving uit onderdeel a) en kun je deze verklaren?

3.2. Enkele schermutselingen vooraf: experimenten en meten

Coach opdracht 13. *Een stuiterbal*

a) Open een lege videoactiviteit en importeer de bijpassende videoclip, waarin een meisje in een klaslokaal in een experiment een stuiterbal laat vallen. Doe een videometing van de hoogte van de bal (vanaf het moment van loslaten; noem dit tijdstip t = 0) en maak een hoogte-tijdgrafiek. Probeer de meetresultaten te corrigeren voor het na voren komen van de bal in de videoclip. Schrijf het resultaat van je meting weg in een Coach resultaatbestand om het later met modelresultaten te kunnen vergelijken.
b) Ga in het diagramvenster in uitlees-modus en maak op papier, of nog beter, maak in een tekstvenster een tabel van de maximale hoogten van de bal in de videoclip. Schat ook de *stuittijdstippen*, d.w.z. de tijdstippen van botsing in. De tijd tussen twee opeenvolgende

momenten van contact met de ondergrond noemen we een *stuiterperiode.* Noteer in de tabel ook de achtereenvolgende stuiterperioden die je uit de stuittijdstippen kunt afleiden.

c) Wat is de nauwkeurigheid van de meting van een tijdstip van een botsing? Hoe nauwkeurig denk je dat de bepaling van de stuiterperioden is?

Coach opdracht 14. ***Simultane video- en geluidsregistratie van een tafeltennisbal***

Aan het geluid van een stuiterende tafeltennisbal kun je horen dat de tijd tussen twee opeenvolgende momenten van contact met de ondergrond steeds korter wordt.

a) Wat betekent de korter wordende stuiterperioden voor de hoogten die de bal bereikt?

b) Wat zijn mogelijke oorzaken voor de korter wordende stuiterperiode?

c) Controleer je antwoorden op de vorige onderdelen aan de hand van de bijpassende Coach activiteit, die overigens alleen in een volledige Coach versie gebruikt kan worden en niet in de Studio MV versie van Coach 6 (negeer de melding dat het meetinterface niet gevonden kan worden). Hierin is tegelijkertijd een videoclip (beeldfrequentie = 30 fps) opgenomen en een drukmeting met een geluidssensor (meetfrequentie = 900 Hz) gedaan. De videometing en de geluidsmeting zijn gesynchroniseerd. Het geluid van het stuiterende tafeltennisballetje is in de videoclip goed te horen.

d) Exporteer de videoclip (met beeldcompressie, bijvoorbeeld de MPEG-4 Video Codec V2) om er later een videometing mee te kunnen doen.

e) Ga in het diagramvenster over op uitlees-modus en maak op papier, of nog beter, maak in een tekstvenster een tabel met de tijdstippen waarop de bal de grond raakt (tijdijking: $t = 0$ bij loslaten van de bal). Schrijf ook op wat de achtereenvolgende stuiterperioden zijn. Deze gegevens ga je later weer gebruiken bij het modelleren van het proces van stuiteren. Wat is de nauwkeurigheid van de meting van de stuittijdstippen op basis van de geluidsmeting? Hoe nauwkeurig denk je dat de bepaling van de stuiterperioden is?

f) Wat is de *uitdooftijd*, d.w.z. de tijdsduur die nodig is voordat een stuiterende bal die op tijdstip $t = 0$ op zekere hoogte losgelaten wordt tot stilstand komt?

Coach opdracht 15. ***Videometing van een tafeltennisbal***

a) Open een lege videoactiviteit en importeer de videoclip die je in opdracht 14 geëxporteerd hebt (of gebruik de meegeleverde videoclip van de E-klas). Doe een videometing van de hoogte van de bal en schrijf het resultaat van je meting weg in een Coach resultaatbestand om het later met modelresultaten te kunnen vergelijken.

b) Ga in het diagramvenster in uitlees-modus en maak op papier een tabel van de eerste acht maximale hoogten van de bal in de videoclip.

c) Stel dat je de videometing gebruikt om de stuiterperioden en stuittijdstippen te bepalen. Wat denk je dat de nauwkeurigheid van de meting (de meetfout) van de stuittijdstippen en van de stuiterperioden is?

d) Wat is op basis van de videometing de uitdooftijd? Hoe verhoudt zich deze t.o.v. de uitdooftijd die je in de vorige opdracht op basis van de geluidsregistratie gevonden hebt?

Coach opdracht 16. ***Videometing van een tafeltennisbal m.b.v. een hogesnelheidscamera***

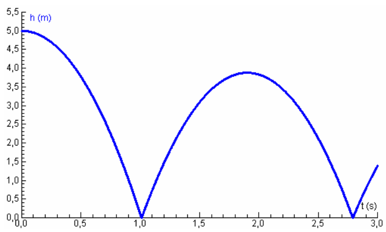
a) Open de bijpassende Coach activiteit opdracht16_50fps.cma, waarin een videoclip is te zien van een tafeltennisbal die op een bureautafel stuitert. De videoclip is met een hogesnelheidscamera gemaakt met een beeldsnelheid van 50 beeldjes per seconde. De meetlat is in centimeterverdeling met elke 10 cm een afwisseling van rode en witte achtergrondkleur. Doe een videometing van de hoogte van de tafeltennisbal m.b.v. de optie 'Traceren'. Kies zelf een geschikte ijking van afstand en een geschikt zoekgebied voor traceren. Laat ook de hoogte-tijdgrafiek en snelheid-tijdgrafiek tekenen. Bewaar de meting en de grafiek in het resultaatbestand opdracht16_meting_50fps.cmr.

b) Open de bijpassende Coach activiteit opdracht16_150fps.cma, waarin een videoclip is te zien van een tafeltennisbal die op een bureautafel stuitert. De videoclip is met een hogesnelheidscamera gemaakt met een beeldsnelheid van 150 beeldjes per seconde. Doe hetzelfde als in onderdeel a) en bewaar de meting en de grafiek in het resultaatbestand opdracht16_meting_150fps.cmr.
c) Als je uit de metingen informatie over stuitertijden en stuiterhoogten wilt halen, welke van de twee videometingen zal dan de meest nauwkeurige informatie opleveren en waarom?

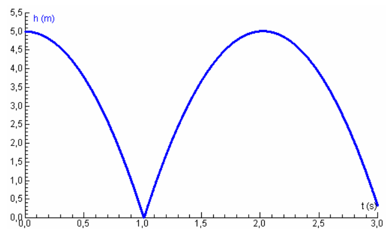
3.3. Een eenvoudig model voor een stuiterende bal

In het algemeen is het verstandig eerst een eenvoudig model voor de beweging op te stellen, dan de mogelijke gevolgen te berekenen en tenslotte de uitkomsten te vergelijken met meetgegevens. Op grond hiervan kan bekeken worden of het nodig is het model te verfijnen.

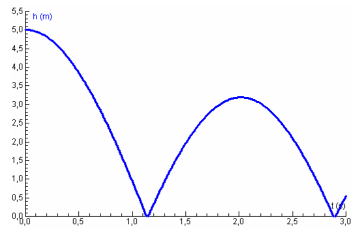
Opdracht 17. Hieronder staan drie hoogte-tijdgrafieken voor een stuiterende bal, gemaakt met de modelomgeving van Coach 6. Ze geven het ideale wrijvingsloze geval, de onveerkrachtige botsing en het realistische geval weer. Kies met uitleg welke grafiek bij welk geval hoort.



Figuur A



Figuur B



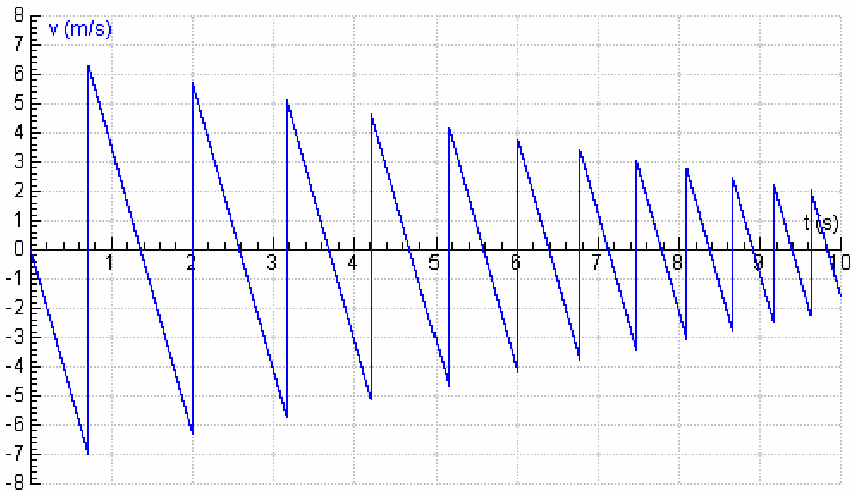
Figuur C

Coach opdracht 18.
a) Als je een tafeltennisbal verticaal op tafel laat vallen, dan stuitert hij een aantal keer voordat hij stil ligt. Helaas is zo'n bal geen perpetuum mobile! Leg uit waarom niet.
b) Als de tafeltennisbal stuitert komt hij na elke botsing minder hoog. Dit kan worden veroorzaakt door luchtweerstand en/of energieverlies bij botsing. Is op voorhand uit te maken welke van deze twee factoren de belangrijkste rol speelt? Verzin een experiment waarmee je dat zou kunnen onderzoeken.
c) Open de bijpassende Coach activiteit, waarin een detailopname te zien is van een tafeltennisbal die op een bureautafel stuitert. De videoclip is met een hogesnelheidscamera gemaakt met een beeldsnelheid van 250 beeldjes per seconde. Aan de linkerkant is een meetlat in millimeterschaal. Geeft deze videoclip en de mogelijkheid om er de hoogte van de bal per filmbeeldje op te meten je enig zicht op welke factor, luchtweerstand of energieverlies bij botsing, de belangrijkste rol speelt?
d) Beredeneer of de hieronder genoemde factoren van invloed zijn op energieverlies bij botsing:
   a. De veerkracht van de ondergrond;
   b. De snelheid van de bal bij het neerkomen;
   c. Mogelijke rotatie van de bal;
   d. De lasnaad.
e) Is het energieverlies bij botsing met de jou bekende natuurkundeformules te berekenen? Leg uit.

Coach opdracht 19. Als je veronderstelt dat luchtwrijving geen rol speelt moet de oorzaak voor het steeds korter worden van de stuitertijden worden toegeschreven aan energieverlies bij botsing.

a) De wet van behoud van energie moet ook bij een onveerkrachtige botsing, ook wel *niet-elastische botsing*, ook gelden. Als er een deel van de kinetische energie bij botsing verdwijnt, waarin kan dit dan opgaan?
b) Keer nog eens terug naar je videometing uit opdracht 18, waarin een gedetailleerd fragment van een botsing van een tafeltennisbal met een tafel beschikbaar gesteld is. Bepaal de snelheid van de tafeltennisbal voor en na de botsing.
c) Welk percentage van de kinetische energie is bij de botsing verloren gegaan in andere vormen van energie?

Opdracht 20. In Figuur 4 wordt gedurende een tijd van drie seconden de snelheid van een verticaal stuiterend balletje weergegeven in een (v-t)-diagram.



Figuur 4. (v-t)-diagram van stuiterende bal

a) Verklaar het verloop van de grafiek in woorden.
b) Hoe kun je aan de grafiek zien dat men het balletje heeft laten vallen en niet omhoog of omlaag gegooid heeft?
c) Waarom zijn de schuine lijnen in de grafiek evenwijdig aan elkaar?
d) Maak een schets van een diagram waarin kinetische energie tegen de tijd is uitgezet.
e) Schat de hoogte in vanaf waar men de bal heeft laten vallen. Leg uit hoe je aan je antwoord kunt komen zonder ook maar aan natuurkunde te denken en alleen bovenstaande grafiek te gebruiken..

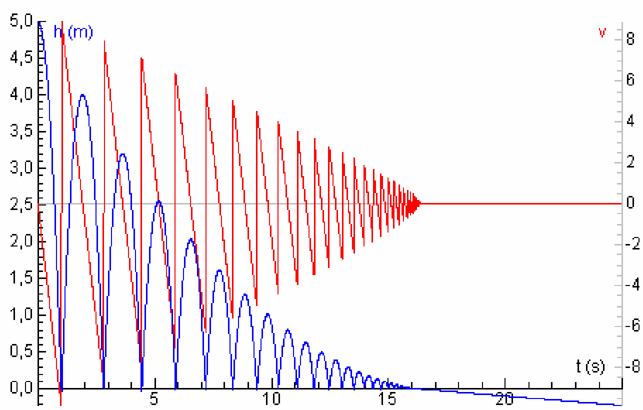
Zoals je al eerder gemerkt hebt is de beweging in de lucht het gemakkelijkst te beschrijven wanneer je de luchtwrijving verwaarloost. Als je veronderstelt dat de tafeltennisbal op te vatten is als een puntmassa, dan impliceert dit dat je je niet druk hoeft te maken over mogelijke rotatie van de bal of de lasnaad. Het meest eenvoudige model voor het stuiteren van een bal krijg je nu door te veronderstellen dat het verlies van kinetische energie bij een niet-elastische botsing een constant percentage van de kinetische energie vlak voor de botsing is. In formulevorm geldt dan voor de snelheid vlak voor en vlak na de botsing:

$$v_{\text{na}} = -r \cdot v_{\text{voor}}\,, \qquad (3.1)$$

waarin r een getal tussen 0 en 1 is en de *restitutiecoëfficiënt* of *stuitfactor* genoemd wordt.

Coach opdracht 21.
a) Pas het tekstgebaseerde model uit opdracht 9 zodanig aan dat het een stuiterende bal modelleert (neem stuitfactor r = 0,9).

b) Grote kans dat je diagramvenster er net zo uitziet als in Figuur 5. Zoom in op het gebied waar de hoogte kleiner dan 0 wordt. Breng onder woorden wat er mis gaat.
c) Neem een kleinere tijdstap: dt = 0,005. Ga na dat (na ophogen van het aantal iteraties) nu wel alle stuiteringen van de bal in beeld komen, maar dat het probleem van niet realistisch eindigen van de berekening aanwezig blijft.
d) Veel kleiner maken van de tijdstap helpt niet altijd: neem maar eens dt = 0,001. Dit gaat weer heel slecht. Het lijkt wel toeval dat de tijdstap dt = 0,0005 weer beter gaat. Maar inspectie tegen het einde van de stuiteringen laat zien dat het maar schone schijn is en bovendien faalt deze waarde voor de tijdstap weer dramatisch als je de stuitfactor *r* gelijk kiest aan 0,8.



Figuur 5. Numerieke problemen bij het doorrekenen van een computermodel.

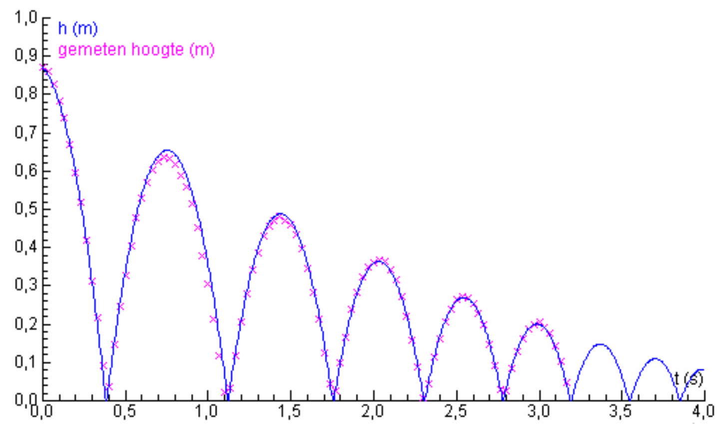
De laatste opdracht illustreert dat je bij een computermodel op je hoede moet wezen voor numerieke eigenaardigheden die een direct gevolg zijn van de discrete aanpak van een bewegingsprobleem. Een verkleining van de tijdstap leidt niet automatisch tot betere resultaten. De volgende opdracht laat zien dat er betere rekenschema's zijn om het stuiteren van een bal door te rekenen. Via het grafische modelleerinterface heb je daar eenvoudig toegang toe en dit is misschien nog wel de belangrijkste reden waarom grafisch modelleren zo handig is.

Coach opdracht 22.

a) Pas het grafische model uit opdracht 10 zodanig aan dat het een stuiterende bal modelleert (neem stuitfactor *r* = 0,9 en denk er ook aan de stopconditie te wijzigen in de instellingen). Je kunt dit doen het bestaande model uit te breiden met een discrete gebeurtenis, gesymboliseerd met een ruit waarbinnen een bliksemschicht getekend is (druk op de 'Voorval'-knop  in de werkbalk van het modelvenster om zo'n grafisch element op te roepen). In het dialoogvenster van een voorval geef je aan waardoor het voorval opgeroepen wordt (Zodra …) en welke toestandsvariabele(n) abrupt en los van de bewegingsvergelijkingen gewijzigd moet(en) worden en op welke wijze. In dit geval hoeft alleen zodra de hoogte kleiner of gelijk aan nul is de snelheid van teken te veranderen en met een constante factor verkleind te worden. Het voorval kan pas weer opnieuw optreden zodra de trigger-voorwaarde weer een keer onwaar is geworden, in ons geval wanneer de berekende hoogte weer groter dan nul geworden is. Ga na dat het doorrekenen van computermodel nu minder problematisch is wat betreft onrealistische hoogten.
b) Ga na dat de keuze van kleinere tijdstappen dt van invloed is op de modelresultaten
c) Als je de integratiemethode van Euler in RK4 (afkorting voor 4de orde Runge-Kutta methode) verandert hoef je niet hele kleine tijdstappen te gebruiken om goede modelresultaten te krijgen. Op de precieze reden van deze laatste verbetering gaan we niet verder in, maar het heeft er mee te maken dat je een betere numerieke methode selecteert. Omdat de

onderliggende computercode verandert is het wel mogelijk dat het ‘oude’ probleem met negatieve berekende hoogten terugkeert. Dan moet je maar een geschikte stopconditie inbouwen. Ga dit allemaal na in het concrete voorbeeld

d) Haal de snelheidsgrafiek in het diagramvenster weg en importeer de gemeten hoogten uit de videometing van opdracht 13 (het meisje met de stuiterbal) als achtergrondgrafiek. Probeer geschikte waarden voor de parameters te vinden zodat de modelresultaten en de meetresultaten goed overeenstemmen. Dat dit kan toont onderstaande schermafdruk (Figuur 6).



Figuur 6. Vergelijking van meting en computermodel.

e) Gebruik je computermodel om de uitdooftijd te bepalen.

3.4. Modelleren met formules

Met de experimentele benadering gevolgd door een grafische modellering van een wiskundige model zijn we al een heel eind gekomen met de bestudering van een stuiterende bal. Maar een van de oorspronkelijke onderzoeksvragen “Kun je de totale stuitertijd berekenen en voorspellen?” is nog onbeantwoord. Ook op vragen zoals “Wat is de totale afgelegde weg van het stuiterende balletje” en “Op welke manier kun je een geschikte waarde voor de restitutiecoëfficiënt vinden” is nog niet ingegaan. Je kunt zelfs stellen dat de aanpak totnogtoe volstaat voor een onderzoek naar de beweging van een specifiek stuiterend balletje, maar dat dit wel inhoudt dat je voor elk nieuw soort balletje weer van voren af aan moet beginnen. Met andere woorden, wat heb je tot nu toe geleerd over een stuiterende bal in het algemeen? Wis- en natuurkunde bieden uitkomst in aansluiting op de aanpak via computermodellen.

Opdracht 23.

a) Toon aan dat de stuitfactor in het model van een stuiterende bal zonder rekening te houden met luchtwrijving ook gegeven wordt door de wortel van het quotiënt van twee opeenvolgende maximale hoogten.

b) Toon aan dat de stuitfactor in het model ook gegeven wordt door het quotiënt van twee opeenvolgende stuiterperioden.

c) Bewijs de volgende formule voor de uitdooftijd T, d.w.z. voor de tijdsduur die nodig is voordat een stuiterende bal die op tijdstip $t = 0$ op hoogte h_0 losgelaten wordt tot stilstand komt:

$$T = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \cdot \frac{1+r}{1-r}. \qquad (3.2)$$

d) Bewijs dat als je in een grafiek de stuiterperiode uitzet tegen het stuittijdstip aan het begin van het tijdsinterval voor de beweging in de lucht je een verzameling punten krijgt die op een rechte lijn liggen met richtingscoëfficiënt gelijk aan $r-1$. Wat is de betekenis van het snijpunt van deze lijn met de horizontale as?

e) In opdracht 13 heb je een tabel gemaakt met de gemeten maximale hoogte, stuittijdstippen en stuiterperioden voor een experiment van een meisje dat een stuiterbal laat vallen. Bereken de gemiddelde stuitfactor met de formule van onderdeel a). Doe dit ook met de formule uit onderdeel b).

f) Vergelijk je antwoorden voor de stuitfactor uit onderdeel d) met de restitutiecoëfficiënt die in Coach opdracht 22 een goed resultaat opleverde. Welke conclusie(s) trekt je>

g) Bereken met de uitdooftijd in dit experiment met de formule van onderdeel c).

Coach opdracht 24. Open de bijpassende Coach activiteit. Hierin staat een tabel van de stuittijdstippen gemeten via geluidsopname, waarden die je in opdracht 14 hopelijk ook zelf gevonden hebt.

a) Als je in een tabel een nieuwe kolom, zeg met de naam Y, maakt door de Delta functie in Coach toe te passen op een kolom, zeg met de naam X, dan wordt het verschil van twee opeenvolgende waarden in X steeds uitgerekend en in de kolom Y geplaatst volgens de regel: $Y_n = X_{n+1} - X_n$ (n is het rijnummer). Het laatste element uit de kolom Y blijft ongedefinieerd. Gebruik de Delta functie om de stuiterperioden uit te laten rekenen.

b) Zet in een diagram de stuiterperiode uit tegen het stuittijdstip met alleen dikke punten als weergave. Bewaar dit diagram in een Coach resultaatbestand.

c) Bepaal de rechte lijn die het best past bij de gegeven punten in het (stuiterperiode-stuittijdstip)-diagram. Welke formule vind je hiervoor?

d) Welke waarde voor de stuitfactor volgt uit de regressielijn van onderdeel c?

e) Welke uitdooftijd volgt uit de regressielijn van onderdeel c?

f) De stuitfactor is gelijk aan het quotiënt van de opeenvolgende stuiterperioden. Laat Coach deze quotiënten uitrekenen en tabelleren (Hint: maak een slimme formule met de Delta functie). Wat is de gemiddelde waarde van de stuitfactoren? Stemt dit overeen met de waarde die je in onderdeel c gevonden hebt?

3.5. Vergelijken van modellen met metingen

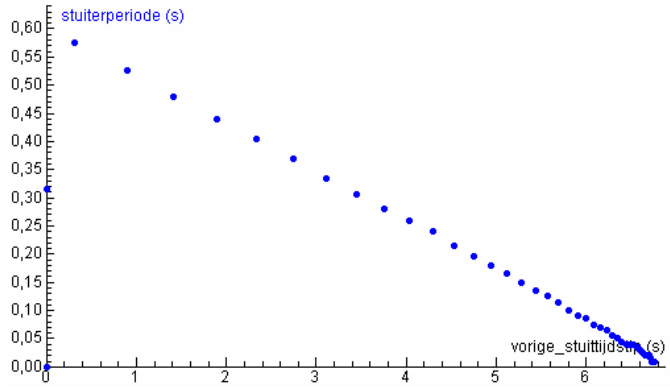
In Coach opdracht 22 heb je al gezien dat het eenvoudige wiskundige model en het daaruit volgende computermodel resultaten op kan leveren die aardig in overeenstemming zijn met meetgegevens. Maar dit was nog maar één speciaal geval van een meisje dat een stuiterbal op de grond laat vallen. Deze videoclip is te kort om te zien of de beschrijving ook voor langere duur goed blijft gaan en of een voorspelling van de uitdooftijd met de werkelijke waarde overeenstemt. Maar gelukkig hebben we de metingen aan een stuiterende tafeltennisbal nog om de resultaten van een model en de meting met elkaar te vergelijken. Dat gaan we in deze sectie doen.

We beginnen het experiment waarin we simultaan een video- en geluidsregistratie gedaan hebben (opdrachten 14, 15). In opdracht 25 heb je al de stuittijdstippen en stuiterperioden bepaald via de geluidsmeting en deze meetwaarden zelfs gebruikt om een stuitfactor te vinden: gemiddeld 0,918 (op basis van quotiënten van opeenvolgende stuiterperioden) en 0,915 (op basis van een diagram van stuiterperiode uitgezet tegen stuittijdstip). Tijd om deze resultaten te gebruiken in een model en dan de modelresultaten met de geluidsmetingen te confronteren

Coach opdracht 25. Open de bijpassende Coach activiteit. Hierin staat grafisch model vooreen stuiterende bal.

a) Breid het model zodanig uit dat het ook twee opeenvolgende stuittijdstippen vastlegt.

b) Doe een simulatie met stuitfactor 0,915 voor een tafeltennisbal die op een hoogte van 48 cm losgelaten wordt met een beginsnelheid van 0 m/s en zet de in het model berekende stuiterperiode uit tegen het vorige stuittijdstip (als losse punten). Je diagram ziet er hopelijk als volgt uit:

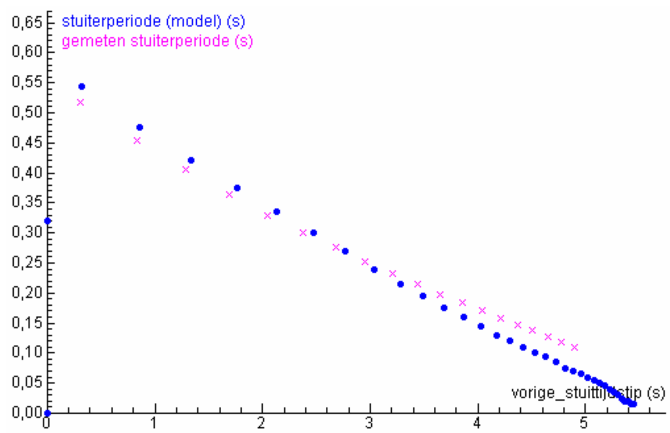


c) Het model voorspelde dat de punten in het (stuiterperiode-stuittijdstip)-diagram op een rechte lijn zouden liggen. Wat doen de eerste twee punten op de verticale as hierboven?

d) In opdracht 24 heb je in een resultaatbestand de meetgrafiek van stuiterperiode versus stuittijdstip bewaard. Haal dit diagram als achtergrondgrafiek binnen en vergelijk de modelgrafiek uit onderdeel b) met de meetgrafiek op de achtergrond.

e) De meetgrafiek en modelgrafiek stemmen niet goed overeen, zoals je in het vorige onderdeel vast gemerkt hebt: de grafieken vallen niet goed samen en de met het model voorspelde uitdooftijd is veel groter dan de gemeten uitdooftijd. Noem een aantal mogelijke redenen.

f) Een goede kandidaat om het verschil tussen model en meting te verklaren is dat we ten onrechte luchtwrijving verwaarloosd hebben. In opdracht 11 heb je al een grafisch model gemaakt voor een vallende tafeltennisbal dat rekening houdt met luchtwrijving. Pas je huidige model in deze opdracht aan zodat het ook rekening houdt met luchtwrijving. Onderstaand diagram laat zien dat de modelgrafiek en de meetgrafiek dan beter met elkaar overeenstemmen.



g) Laat Coach het berekende (hoogte-tijd)-diagram tekenen en vergelijk dit met de meetgrafiek die je in opdracht 15 bepaald hebt via videometing. Hoe goed vind je dat het model en de meting overeenstemmen?

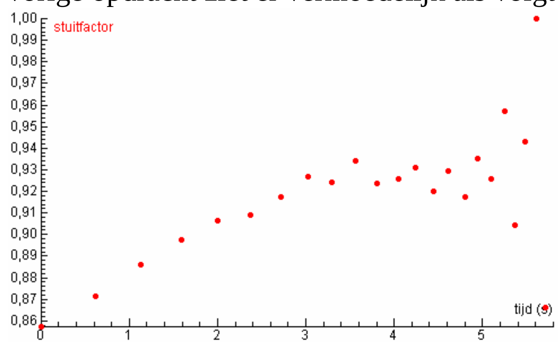
Het model in de vorige opdracht mag dan wel een aardige overeenstemming geven tussen gemeten en berekende stuittijdstippen en stuiterperioden, de overeenstemming tussen de gemeten en berekende hoogte-tijdgrafiek laat nog te wensen over. Dit willen we toch echt goed zien te krijgen. We zullen daarvoor een videometing van een stuiterende tafeltennisbal, die we met een hogesnelheidscamera gemaakt hebben, onder de loep nemen en nagaan of we de gemeten hoogte-tijdgrafiek kunnen modelleren.

Coach opdracht 26.

a) Open het resultaatbestand van opdracht16_150fps.cma, waarin je een videometing van de hoogte van de bal gedaan hebt via tracking. Open eventueel de bij deze opdracht passende Coach activiteit, Ga in het diagramvenster in uitlees-modus en maak op papier, of nog beter in een tekstvenster, een tabel van de maximale hoogten van de bal in de videoclip.

b) Een alternatief voor onderdeel a) is om de gegevens van de videometing in tabelvorm te exporteren en dan in een nieuwe meetactiviteit weer te openen. Het computerbestand opdracht26b.cma staat al klaar voor gebruik van de meetgegevens. Gebruik nu het gereedschap Punten selecteren/verwijderen om de maximale hoogten als losse punten te selecteren. Gebruik nu een formule in Coach om snel de stuitfactor uit deze tabel te berekenen.

c) Het resultaat van de vorige opdracht ziet er vermoedelijk als volgt uit



Het lijkt er op dat de stuitfactor niet echt constant is, maar in de eerste stuiterfase lineair groeit en vervolgens (in dit geval na pakweg 3 seconden) constant wordt. Gebruik nu Functiefit om beide stukken via formules te beschrijven.

d) Het resultaat in onderdeel c) is wel heel erg toegespitst op het speciale geval van de opgemeten stuiterende tafeltennisbal. Dit komt omdat de stuitfactor als functie van tijd beschouwd is. Hubbard en Jones (2001) hebben beschreven hoe het stuiteren van een holle bal op een harde ondergrond afhangt van de snelheid waarmee de bal neerkomt: bij hoge snelheid is de het kinetische energieverlies groter dan bij lage snelheden. Wat betekent dit voor de stuitfactor? Open het computerbestand opdracht26d.cma waarin een tabel met snelheden bij botsing van de bal op de harde ondergrond en de stuitfactoren op basis van gemeten maximale hoogten staat. Beschrijf het verband tussen stuitfactor en snelheid van botsing met een uit twee rechte lijnen opgebouwde, stuksgewijs gedefinieerde functie.

e) Het computerbestand opdracht26e.cma staat al klaar voor gebruik van de meetgegevens van de baan van een stuiterende tafeltennisbal. Gebruik Punten selecteren/verwijderen om de stuittijdstippen te selecteren. Gebruik nu een formule in Coach om hieruit snel de stuiterperioden te vinden. Laat het (stuiterperiode-stuittijdstip)-diagram tekenen en bepaal hiermee via Functiefit een waarde voor de stuitfactor. Bepaal ook de stuitfactor als het quotiënt van opeenvolgende stuiterperioden. Stemmen de twee gevonden antwoorden goed met elkaar overeen?

f) Maak op papier of in een tekstvenster een tabel van snelheden vlak voor en vlak na botsingen van de bal op de tafel. Welke stuitfactor krijg je uit de tabel van snelheden voor en na botsing?

g) Vergelijk je antwoorden voor de stuitfactor uit onderdelen b) t/m f): heb je in alle onderdelen hetzelfde antwoord gevonden? Zo nee, welke van de antwoorden is naar jouw mening beter en waarom?

Coach opdracht 27.

a) Maak een eenvoudig grafisch model voor een stuiterbal zonder rekening te houden met luchtweerstand en met een constante stuitfactor.

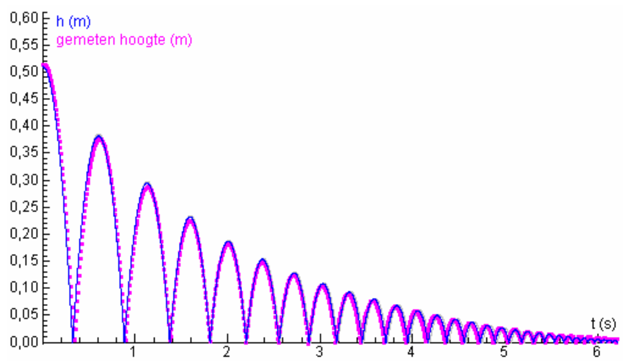
b) Importeer het (hoogte-tijd)-diagram uit de videometing van opdracht 16 (stuiterende tafeltennisbal opgenomen met een hogesnelheidscamera met 150 beeldjes per seconde) als achtergrondgrafiek. Ga na dat je geen constante stuitfactor kunt vinden die de baan van de tafeltennisbal gedurende de <u>hele</u> stuiterbeweging netjes beschrijft.

c) Maak een grafisch model voor een stuiterbal waarin wel rekening gehouden wordt met luchtwrijving, maar nog eeds een constante stuitfactor gebruikt wordt. Ga na dat je nog steeds geen constante stuitfactor kunt vinden die de baan van de tafeltennisbal gedurende de <u>hele</u> stuiterbeweging netjes beschrijft, maar dat het al wel beter gaat dan in onderdeel b) waarin luchtwrijving verwaarloosd werd.

d) Keer terug naar je model uit onderdeel b). Ga na dat je wel een goede wiskundige benadering krijgt als je de stuitfactor niet constant kiest maar de formule

$$r=\begin{cases}0{,}859+0{,}022t & \text{als } t\le 3\\ 0{,}926 & \text{als } t>3\end{cases}$$

gebruikt of beter nog de door jezelf gevonden beschrijving in opdracht 26c. Het resultaat ziet er uit als

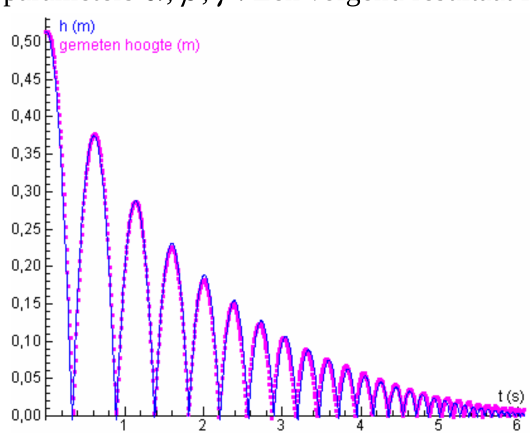


e) Hoe mooi het bovenstaande plaatje ook moge wezen, het heeft geen natuurkundige grondslag. Noem twee bezwaren.

f) Keer terug naar je model uit onderdeel c), maar gebruik nu een niet-constante stuitfacter gegeven door een formule van de vorm

$$r=\begin{cases}\alpha+\beta\cdot t & \text{als } |v|\ge 1{,}4\\ \gamma & \text{als } |v|<1{,}4\end{cases}$$

voor geschikt gekozen parameters α, β, γ. Een volgend resultaat is realiseerbaar:



Referenties

Cor de Beurs & Maarten Krol (1991). Hypothesetoetsing met behulp van numerieke modellen *NVON Maandblad*, 16e jaargang, nr. 10, december 1991, pp. 444-447.

M. Hubbard & W.J. Stronge (2001). Bounce of hollow balls on flat surfaces. *Sports Engineering*, **4**, 49-61.