

Bruggen en bogen

(leerlingentekst)

Auteurs:

André Holleman (Bonhoeffer college, “leraar in onderzoek” bij AMSTEL Instituut)

André Heck (AMSTEL Instituut)

Geschikt als praktische opdracht in 4 VWO B bij leerlingen zonder COACH ervaring. Begrote totale studielast is 5 uur, waarvan videometen met COACH (eerste 3 activiteiten) in praktijk 2 uur in beslag nemen.

© 2001 AMSTEL Instituut. Verder gebruik alleen toegestaan met bronvermelding.

Vooraf

COACH is een programma dat oorspronkelijk ontwikkeld is voor de natuurwetenschappen (natuurkunde, scheikunde en biologie). Met behulp van dit programma kun je gemakkelijk allerlei meetgegevens inlezen in de computer en omzetten in grafieken, tabellen, bewerken met allerlei formules enzovoort.

De nieuwste versie van COACH bevat de mogelijkheid tot videometen. Je neemt een videofilmje op, of gebruikt een bestaande videoclip, en gebruikt die om allerlei zaken te onderzoeken. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de baan, snelheid en versnelling van een geworpen basketbal, de achtbaan op een kermis, het botsen van twee auto's en zo meer.

Wij gaan deze mogelijkheid gebruiken voor het meten aan digitale foto's. Daarvoor is het wel nodig dat zo'n foto is omgezet tot een filmje, al merk je daar weinig van omdat je steeds hetzelfde beeld ziet.

Het programma COACH werkt met projecten. Elk project kan verschillende (deel)activiteiten bevatten. Deze opdracht betreft het project Bruggen en Bogen.

Bij bruggen en bogen zie je vaak gebogen vormen die nogal eens lijken op een parabool. Ook bij hangende touwen, koorden en kettingen zie je dergelijke vormen.

Nu is niet iedere kromme een parabool. Maar bij bruggen en bogen vaak wel. Dat heeft ook zijn reden. In deze praktische opdracht ga je daar een onderzoekje naar doen. Eerst met behulp van videometen constateren dat die paraboolvorm er echt is, daarna ga je proberen om daar een theoretische verklaring voor te vinden.

Teksten en Opdrachten

De benodigde uitleg en de opdrachten komen straks bijna allemaal op het scherm. We hebben ze ook op papier gezet, zodat je zelf kunt kiezen wat je het prettigst vindt.

Verslag

Bij deze praktische opdracht hoort het maken van een verslag.

Daarin horen de antwoorden bij opdrachten die om een antwoord vragen, soms kort, soms lang, maar in ieder geval duidelijk. Ook willen wij graag weten welke onderdelen je gemakkelijk en welke je moeilijk vond. Als je een activiteit heb afgesloten dan vraagt COACH “Resultaat of wijziging bewaren?": klik dan “ja”. Zo krijg je ook nog een digitaal deel van je verslag!

Verder verwachten wij nog een overzicht van de tijd die je aan de verschillende onderdelen hebt besteed (logboek).

Project Bruggen en bogen

Dit project bestaat uit vier activiteiten: Bixby Creek, Zeeburgerbrug, gewichten en halsketting. Onderwerp van het project is de (wiskundige) vorm van brugbogen.

In de eerste twee activiteiten gebruik je de mogelijkheden van COACH om bij twee bruggen deze vorm op te sporen. In de daaropvolgende activiteiten ga je de zaak ook theoretisch aanpakken.

Activiteit 1: Bixby Creek

In deze activiteit maak je kennis met een aantal mogelijkheden die COACH biedt. Een deel van het werk daarbij is al gedaan, zoals je zult zien. Bij de tweede activiteit moet je het geleerde zelf gaan toepassen.

Start COACH, (login als student) en kies het project *Bruggen en bogen*. Klik op de knop "Kies een activiteit" en kies *1. Bixby Creek*.

Inleiding

Je ziet nu een menubalk en vier vensters: een is voorzien van een video-meting, daarnaast een tekst en op de onderste helft van het scherm twee lege vensters.

Hiernaast, in het videovenster, zie je een opname van de Bixby Creek bridge in California, highway 1, 13.3 mijl ten zuiden van Carmel. De centrale overspanning heeft een lengte van 320 voet en is 265 voet hoog. Deze overspanning wordt aan de onderkant ondersteund door een boog.

Verder zie je een assenstelsel, een rode schaal aanduiding met 100m erbij, en twaalf meetpunten (door middel van witte kruisjes) op de "draagboog" van de brug waarvan er een verkeerd staat.

Er zijn dus twaalf beelden gebruikt van de videoclip van de brug. De clip telt overigens 30 beeldjes. De niet-gebruikte zijn als grijze streepjes weergegeven in de beeldenbalk onder in het videovenster.

In deze activiteit zul je met behulp van de mogelijkheden die COACH biedt zien dat de boog vrijwel de vorm heeft van een parabool.

1. Deze inleiding staat in een "tekstvenster". Behalve een inleiding is er ook een andere tekst met opdrachten. Om deze opdrachten te zien (links)klik je op de gele knop "Kies tekst" hierboven. Kies "Opdrachten". De muiswijzer verandert. Ga naar een leeg venster en klik daarin.
2. COACH verwerkt de meetpunten automatisch tot een tabel en een diagram (grafiek). Om de tabel te zien klik je op de knop "Kies tabel". Kies "Bixbyboog" en klik in het lege venster. Als je rechtsklikt in het tabelvenster dan krijg je een menu. Kies "Toon als diagram". Omdat we de inleiding niet meer nodig hebben klik je in dat tekstvenster.
3. In de tabel zie je de x-coördinaat en de y-coördinaat van de verschillende meetpunten P1. In het diagram zie je de grafiek hiervan.
Klik in de bovenste rij van de tabel.
Je ziet dat in het videovenster het eerste gebruikte beeldje staat.
Klik in de tweede rij.

Nu is het tweede beeld geselecteerd. Je kunt nu het verkeerde kruisje met de muis verslepen naar een betere plaats. Doe dat en bekijk het resultaat in diagram en tabel. Je zou op deze manier meer meetpunten kunnen verplaatsen. (Dat kan overigens op meer manieren, zoals je nog zult zien of zelf ontdekken.)

4. Rechtsklik in het diagram (of klik op de "hamerknop", tweede van links boven in het diagramvenster).
Kies "Analyse" en daarvan "Functiefit" (to fit = passen).
Bij "Functietype" zie je dat $f(x)=ax$ getekend is. De waarde van $a(=0,38)$ staat ernaast.
Kies bij functietype de parabool.
Klik "Auto-fit" aan.
Je ziet dat de meetpunten heel goed bij een parabool passen.
Als je nu OK zou aanklikken, dan wordt de parabool aan het diagramvenster toegevoegd. Kies je Stop dan blijft het diagramvenster zoals het was.
Schrijf de coëfficiënten van de parabool op en klik OK.
5. Rechtsklik in het diagram.
Kies "Automatisch herschalen". Je ziet nu een rood kruis door het vergrootglas op het linkse knopje rechtsboven het diagramvenster. Klik op dat knopje. Twee manieren dus om te zoomen.
6. Rechtsklik weer in het diagram.
Kies "Wijzig/maak diagram". In het dialoogvenster zie je onder andere de naam van het venster, de mogelijkheid om een raster (rooster) aan te brengen, acht kolommen om te kiezen en onderaan de mogelijkheid om de grafiek er wat anders uit te laten zien. Klik op C1. Daarmee hebben we nu niets te maken, de tijd heeft betrekking op de videofilm, en wij gebruiken geen bewegende beelden. Je ziet dan ook "Onzichtbaar" aangeklikt.
Bekijk C2, C3 en C4. Herken je bij deze laatste kolom de formule van de toegevoegde functiefit?
Maak de functiefit onzichtbaar en experimenteer met de mogelijkheden om de meetpunten op diverse manieren en in verschillende kleuren weer te geven.
7. Naar alle waarschijnlijkheid is de afstand tussen de opeenvolgende tien verticale palen waar de overspanning op steunt constant. Dit zou je kunnen gebruiken om de plaats van de meetpunten te controleren. COACH kan deze afstanden voor je berekenen.
Kies Wijzig/maak tabel.
Klik de vijfde kolom aan.
Kies Verbinding: Formule
Klik in het formule-invulvak
Klik op de wizard (goochelaar).
Maak met twee keer klikken de formule $\Delta(P1X)$
Neem als grootte: afstand palen
Eenheid: m
Decimalen: 2

Verlaat de activiteit.

Zeg "ja" tegen "resultaat of wijziging bewaren?"

Activiteit 2: Zeeburgerbrug

In deze activiteit analyseer je de vorm van de Zeeburgerbrug in Amsterdam over het Amsterdam-Rijnkanaal. Je meet de coördinaten van punten op de boogbrug en daaruit leid je de hoogte als functie van de horizontale afstand af.

In dit voorbeeld leer je hoe je metingen in de module videometen van COACH kunt uitvoeren als het om stilstaande beelden gaat. De instructies zijn zeer gedetailleerd en helpen je door het voorbeeld heen.



Start zonodig COACH en kies de activiteit *2. Zeeburgerbrug*.

Openen van een film

1. Klik met de rechter muisknop in het kwadrant 'Video-meting' en kies 'Haal video op'.
2. Selecteer de film 'Zeeburgerbrug'.

Afspelen van de film

- De film toont de Zeeburgerbrug in Amsterdam over het Amsterdam-Rijnkanaal.
- Afspelen van de film door op de afspeelknop te drukken onder de film, links naast de beeldenbalk, heeft weinig zin omdat alle beelden gelijk zijn. De beeldenbalk heeft pas nut wanneer metingen gedaan zijn.

IJking van de film

Voordat je de meting kunt uitvoeren moeten de afstanden in de videoclip geijkt worden. Gegevens over de brug of de breedte van het Amsterdam-Rijnkanaal op deze locatie kunnen elders opgezocht worden of ruwweg geschat worden. Maar vaak is in het eerste beeldje door de makers een indicatie van lengte aangebracht. In deze clip is een meetlat van 80 m te zien.

1. Rechtsklik in het videokwadrant; kies 'Instellingen'.
 - Schaal: omdat de verticale en horizontale schaal gelijk zijn kies je 'Dezelfde schaal in alle richtingen'.
 - Oorsprong: omdat alle beelden hetzelfde zijn kies je voor oorsprong 'gelijk voor alle beelden'.
 - Tijddijking: dit heeft bij dit type meting geen betekenis. Maar als je 1 beeldje per seconde kiest, dan komt het framenummer overeen met de tijd in seconden.
Klik OK.
2. Nu kan de instelling van de schaal gestart worden. Leg de 'rode' schaallijn precies over de bijna horizontale witte meetlat in het eerste beeldje door de uiteinden met de muis te verslepen. Noteer de schaallengte van 80 m in het venster "Instellingen voor schalen". De ijking is nu uitgevoerd.
3. Als je wilt kan je de oorsprong van plaats veranderen door met de muis te slepen. Punten waarbij de wiskundige formules het eenvoudigst zijn vanwege symmetrie zijn de top van de boog of het punt op het wegdek recht onder de top van de boog.

4. Klik OK in het venster "Instellingen voor schalen". De instelling is nu klaar.

Optionele meetinstellingen

Selectie van aantal meetpunten en markeringen

1. Rechtsklik in het videokwadrant en selecteer 'Meetpunten'.
2. We willen 1 punt per beeldje meten, dus bevestig door op OK te klikken.
3. Ga naar 'Markering' en kies de gewenste kleur en de markering voor de meetpunten (een wit bolletje werkt prima).

Selectie van beelden

Je legt vast welke beeldjes je precies voor de meting wilt gebruiken. Er zijn vier mogelijkheden om beeldjes te selecteren

1. Rechtsklik in het videovenster en selecteer 'Kies Beelden'
2. Als je alle meetpunten wilt verzamelen, kies dan 'Gebruik Alle beeldjes'. Dit is de default keuze van COACH.
3. In dit voorbeeld willen we echter 12 meetpunten verzamelen. Kies daartoe 'Verdeeld over' en vul het gewenste aantal in. Alle geselecteerde beeldjes zijn op de beeldenbalk zwart gemarkeerd.

Het vastleggen welke beeldjes je precies wilt gebruiken voor de meting lijkt op het eerste gezicht vreemd omdat de beeldjes allemaal gelijk zijn. Maar bedenk dat COACH aan de hand van het nummer van een beeldje in een video bijhoudt op welke plaats in de tabel de meting opgeslagen wordt. Je kunt later niet meer de gegevens sorteren naar opklimmende volgorde in zeg de horizontale coördinaat. Als je dus een bepaalde baan wilt volgen bij het meten en tevens de mogelijkheid open wilt houden om later nog tussenliggende punten te meten, dan moet je gaten laten in de te gebruiken beeldjes door bijvoorbeeld 'Verdeeld over' te kiezen en het gewenste aantal in te vullen.

Metten

1. Controleer of de ijking en de instelling van het assenstelsel naar wens is. Maak het assenstelsel zonodig zichtbaar door met de rechter muisknop in het videovenster te klikken en 'Toon assen' te kiezen. Pas zonodig de ijking aan.
2. Start de meting door op de groene 'Start' knop te klikken.
3. Beweeg de cursor over het videovenster. Kies een geschikt punt op de voorste boog van de Zeeburgerbrug om te meten. Klik op dit punt.
4. Klik in het volgende beeldje op een punt op de boog rechts van het vorige punt. Herhaal dit voor alle beeldjes.
5. Als je voortijdig mocht besluiten dat je voldoende punten hebt, druk dan op de rode 'Stop' knop.
6. Als je de vastgelegde meetpunten in het videovenster wilt blijven zien, kies dan 'Spoor' onder de hamerknop van het venster of door rechtsklikken in het videovenster.

Weergave van de metingen

1. Rechtsklik in het videovenster en kies 'Toon als Diagram' om een grafiek van de gemeten punten af te beelden. Je cursor krijgt vorm van een klein grafiekje. Klik in het kwadrant waar je de grafiek wilt hebben.
2. In het diagram dat verschijnt zijn P1X (x-positie) en P1Y (y-positie) tegen de tijd (na ijking gelijk aan het rangnummer van het beeldje) uitgezet. Wijzig het diagram: maak de tijd onzichtbaar en zet P1Y tegen P1X uit. Nuttige tip: het snelst gaat dit door de variabele P1X langs de x-as uit te zetten; de tijd wordt

dan automatisch onzichtbaar. Je kunt desgewenst ook de namen P1X en P1Y vervangen door X en Y.

3. Als je de metingen ook in een tabel wilt zien, kies dan in het videokwadrant voor 'Toon als Tabel'.
4. Het programma biedt de mogelijkheid om de film en de grafiek en/of tabel tegelijkertijd 'af te spelen', d.w.z. te laten zien in welke volgorde je welke punten hebt opgemeten. Klik op de herhaalknop (de kleine groene knop naast de startknop). Bepaal de tijdsduur van afspelen (bijv. 5 sec.) en klik op de startknop. Nu zie je de grafiek en de tabel-inhoud langzaam verschijnen op het scherm.

Corrigeren van metingen

Als je niet tevreden bent over bepaalde meetwaarden, kan je terug gaan naar een beeldje en de meting corrigeren. Om een en ander zo goed mogelijk te kunnen zien kun je het videobeeld vergroten.

- 1 Maak eerst het videovenster maximaal door op de "maximize"-knop in het venster te klikken. Druk daarna nog één of twee keer op de ↑ toets
- 2 Via ← en → kun je de gewenste meetpunten kiezen
- 3 Corrigeer de meting door in het videobeeld het meetpunt naar een betere plaats te slepen.
- 4 Als je klaar bent moet je het videovenster weer minimaliseren.

Toevoegen van extra meetpunten

Het is ook mogelijk extra meetpunten toe te voegen wanneer niet alle beeldjes gebruikt zijn.

1. Kies een beeldje op de beeldenbalk met een grijze aanduiding en druk op de INS-toets. Het geselecteerde beeldje komt weer zwart op de beeldenbalk.
2. Druk op de groene 'Start' knop om voor bijgeplaatste beeldjes te meten. De meetresultaten worden op de juiste plaats in tabel en grafiek ingevoegd.
3. Om een beeldje te verwijderen kan je kiezen op de beeldenbalk en dan op Del drukken. Probeer dit uit.

Opdrachten

Analyseer de vorm van een boog van de Zeeburgerbrug. In wiskundige termen: welke functie heeft een grafiek die goed bij de boog past en door de meetpunten gaat.

1. Maak een diagram van P1Y uitgezet tegen P1X, als je dit nog niet gedaan hebt, en wijzig hierin de namen P1X en P1Y. Als je in het menu Wijzig/maak diagram bij C2 de grootte x maakt en bij C3 y, dan heb je de "gewone" wiskundeletters.
2. Maak ook een tabel van x en y: klik met de rechter muisknop in het diagramvenster of klik met de linker muisknop op de hamerknop in dit venster. Kies 'Toon als tabel'. De cursor krijgt vorm van een klein tabelletje. Klik in het kwadrant waar je de tabel wilt hebben.
3. Klik met de rechter muisknop in een diagramvenster of klik met de linker muisknop op de hamerknop van dit venster. Kies 'Lees uit', plaats de cursor op een punt waarin je geïnteresseerd bent en lees de waarden af. Je kunt deze waarden ook in het tabelvenster aflezen.
4. Controleer het in 3 gevonden antwoord in de video: klik met de rechter muisknop in het videovenster of klik met de linker muisknop op de hamerknop in dit kwadrant. Kies 'Meetlat'. Sleep de uiteinden van de meetlat zodat ze liggen op de punten waartussen je de afstand wilt weten.
5. In het diagram lijken de meetpunten te liggen op de grafiek van een parabool. Klik met de rechter muisknop in het diagramvenster

of klik met de linker muisknop op de hamerknop in dit venster. Kies 'Analyse' > 'Functiefit' en probeer de best bijpassende parabool te vinden.

In andere COACH activiteiten over bruggen en gebouwen zul je de parabool steeds weer tegen komen. Hier is een goede reden voor en met enige kennis van wiskunde en natuurkunde is dit verder uit te zoeken.

Activiteit 3: vijf gewichten

Inleiding

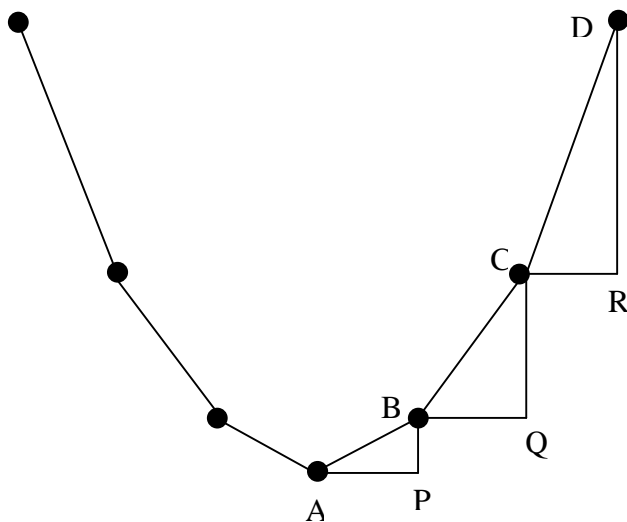
De parabolvorm bij de Zeeburgerbrug en bij de brug over de Bixby Creek is geen toeval. In deze activiteit zul je aan de hand van de opdrachten en eigen vindingrijkheid een wis- en natuurkundige verklaring op het spoor komen.

Fysisch model

De boog van de Zeeburgerbrug kun je zien als een parabool, waaraan op (in horizontale richting) gelijke afstanden gelijke gewichten hangen. Iedere kabel “draagt” een even groot deel van het wegdek.

De boog van de brug over de Bixby Creek is een parabool waarop (ook weer op gelijke horizontale afstand) een gelijk gewicht steunt.

We kiezen een “andersom” model: een ketting waaraan (op gelijke horizontale afstanden) gelijke gewichten hangen.



Kies de activiteit gewichten

Op de videoclip zie je een ketting met daaraan vijf gelijke gewichten. Deze gewichten zijn symmetrisch geplaatst zo, dat de horizontale afstand steeds 1 dm is.

Assenstelsel en schaal zijn al aanwezig.

Opdrachten

1 Kies zeven meetpunten: de beide punten waar de ketting opgehangen is en de

ophangpunten van de vijf gewichten.

Tekstvensters in COACH kennen nog niet alle mogelijkheden van een tekstverwerker. Daarom staan er nu een aantal opdrachten alleen maar op papier. Bovenstaande tekening is een versimpelde weergave van het videobeeld.

2 Meet in het videovenster de hellingshoeken $\angle A$, $\angle B$ en $\angle C$. Meet in het grafiekenvenster de helling van lijnstuk AB, van BC en van CD.

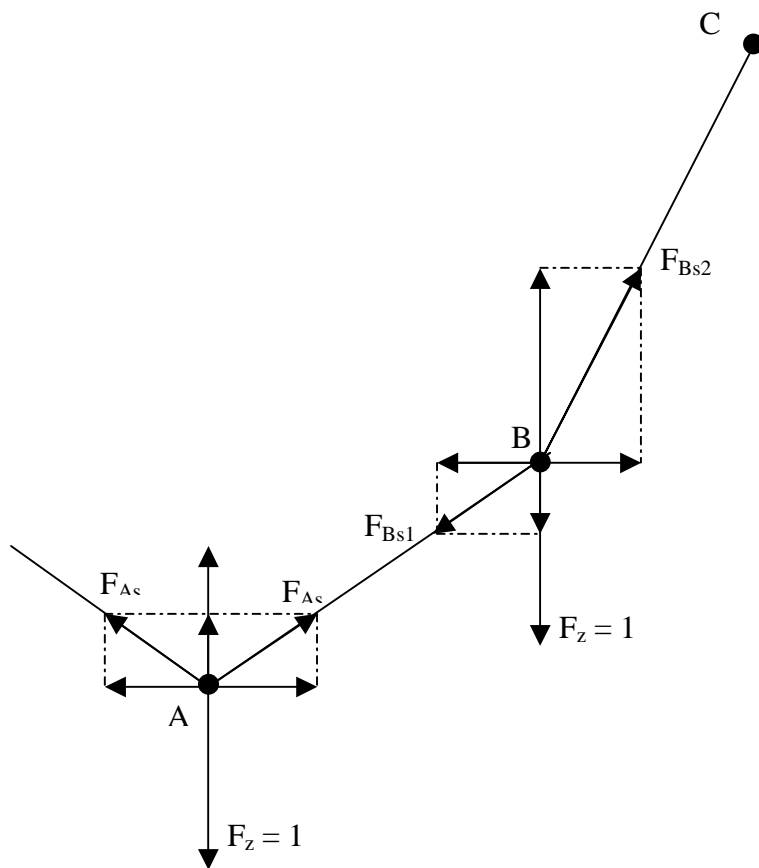
Zie je misschien regelmaat in hoeken en/of hellingen of in verhoudingen daarvan?

3 Teken op een blaadje de grafiek van de standaardparabool $y = x^2$ met A(0,0), B(1,1), C(2,4) en D(3,9). Bereken $\angle A$, $\angle B$ en $\angle C$. Bereken ook de helling van AB, van BC en van CD.

4 Onderzoek of je de regelmaat die je bij 3 gevonden hebt ook aanwezig is bij de standaardparabool. Heb je bij 3 geen regelmaat ontdekt, kijk dan of je regelmaat die je bij 4 ziet (bij benadering) terugvindt bij 3. (Bereken zo nodig de coördinaten van nog enkele punten van de standaardparabool.)

Theoretische afsluiting

Je hebt gezien dat het model van de gewichten aan de ketting inderdaad een parabool geeft. Hopelijk heb je ook gevonden dat er een eenvoudig verband is tussen de hellingen van de opeenvolgende rechte stukken ketting. Deze regelmaat is te verklaren met behulp van evenwicht van krachten in de ketting. Als basis dient de volgende figuur.



De (gelijke) gewichten zorgen voor een kracht F_z in ieder aangrijpingspunt. Je ziet dat we voor het gemak nemen $F_z = 1$.

Het gewicht bij A hangt in evenwicht door de spankrachten in F_{As} in linker- en rechterketting. Vanwege de symmetrie is de spankracht links en rechts even groot.

Je kunt gemakkelijk berekenen dat de verticale component van F_{As} gelijk moet zijn aan $0,5F_z$.

Het evenwicht bij aangrijpingspunt B wordt veroorzaakt door de zwaartekracht en de twee spankrachten.

Opdracht

Beredeneer dat de hellingen van AB, BC, CD (als er nog een gewicht meer zou hangen) zich verhouden als $1 : 3 : 5$.

Naschrift

Niet iedere hangende ketting heeft de vorm van een parabool. Sterker nog: Christiaan Huygens (1629-1695) toonde aan dat een *onbelaste* homogene ketting juist *niet* hangt volgens een parabool. Zo'n vrij hangende ketting kun je vinden in de activiteit 4. *Halsketting*.

Krijg je bij hellingen met opeenvolgende verhouding $1 : 3 : 5 : 7 \dots$ altijd als grafiek een parabool? En kun je dat verklaren?

Hoe zit het als de gewichten niet allemaal gelijk zijn?

Hoe zit het als de gewichten wel symmetrisch, maar met in een even aantal hangen (dus geen gewicht in de top)?

Deze en andere vragen zou je een volgende keer kunnen onderzoeken.