Hypotheekberekeningen
aan de hand van enige wiskundige technieken

Peter Spreij

Universiteit van Amsterdam

Radboud Universiteit Nijmegen

HOVO, Nijmegen, 28 november 2019

Inhoud

Inhoud

Wat gaan we doen?

We leiden formules af voor het maandelijks te betalen bedrag bij het aflossen van een hypotheek bij verschillende hypotheekvormen,

- de annuïteiten hypotheek (het interessante geval),
- en lineaire en aflossingsvrije hypotheek.

We vergelijken ook de verschillende hypotheekvormen.

En passant komen we allerlei wiskundig gereedschap tegen.

Maandbedrag voor annuïteitenhypotheek

Stelling (Formule voor het maandbedrag)

Veronderstel een bedrag H wordt geleend, via een annuïteitenhypotheek afbetaald in n termijnen, met een rente $r > 0$ per termijn. Het maandelijks te betalen bedrag b wordt dan gegeven door de formule

$$b = \frac{rH}{1 - (1 + r)^{-n}}.$$

Opmerking: als $r = 0$ (niet realistisch) geldt $b = \frac{H}{n}$.

Afleiding?

Centrale vraag: hoe komt deze formule tot stand?

Antwoord: verschillende manieren van aanpak, zie verder!

Voorbeeld

Realistische waarden zijn als volgt:

- $H =$€ 300000.
- $n = 360$.
- $r = 0.0025$: ga uit van $p = 3\% = 0.03$ per jaar, dan is $r = 0.03/12 = 0.0025$.
- Er volgt dan uit de formule dat $b =$ € 1265.

Opmerking

Door 'rente op rente' is $(1 + \frac{p}{12})^{12} > 1 + p$!

In het voorbeeld geldt $(1 + \frac{p}{12})^{12} = 1.0304$ en $1 + p = 1.03$.
De effectieve jaarrente is hier dus 3.04%.

Voorbeeld

Realistische waarden zijn als volgt:

- $H =$€ 300000.
- $n = 360$.
- $r = 0.0025$: ga uit van $p = 3\% = 0.03$ per jaar, dan is $r = 0.03/12 = 0.0025$.
- Er volgt dan uit de formule dat $b =$ € 1265.

Opmerking

Door ‘rente op rente’ is $(1 + \frac{p}{12})^{12} > 1 + p$!

In het voorbeeld geldt $(1 + \frac{p}{12})^{12} = 1.0304$ en $1 + p = 1.03$.
De effectieve jaarrente is hier dus 3.04%.

Voorbeeld

Realistische waarden zijn als volgt:

- $H =$€ 300000.
- $n = 360$.
- $r = 0.0025$: ga uit van $p = 3\% = 0.03$ per jaar, dan is $r = 0.03/12 = 0.0025$.
- Er volgt dan uit de formule dat $b =$ € 1265.

Opmerking

Door 'rente op rente' is $(1 + \frac{p}{12})^{12} > 1 + p$!

In het voorbeeld geldt $(1 + \frac{p}{12})^{12} = 1.0304$ en $1 + p = 1.03$.
De effectieve jaarrente is hier dus 3.04%.

Notaties

- H: het te lenen (hypotheek)bedrag.
- n: het aantal termijnen.
- r: de periodieke rente per termijn (vast genomen voor de hele looptijd).
- a_k: de aflossing in periode (termijn, maand) k, $k = 1, \dots, n$.
- A_k: het totaal afgeloste bedrag t/m periode k,

$$A_k = a_1 + \cdots + a_k.$$

- b: het maandbedrag.

Aanpak: we gaan de waarden van b en van $a_1, \dots, a_k$ vinden.

Inhoud

Een paar stappen

Het vaste maandbedrag is b. Over periode 1 wordt rH aan rente betaald en a_1 afgelost. We vinden dus

$$a_1 + rH = b.$$

We hebben nu één betrekking en twee onbekenden.

De resterende schuld na periode 1 is $H - a_1$. In periode 2 wordt hierover $r(H - a_1)$ aan rente betaald, en een bedrag a_2 afgelost. We krijgen

$$a_2 + r(H - a_1) = b.$$

We hebben nu in totaal twee betrekkingen en drie onbekenden. Dat schiet niet op. . .

Nog een extra poging

Na periode 2 is er $A_2 = a_1 + a_2$ afgelost.

De resterende schuld na periode 2 is $H - A_2$. In periode 3 wordt hierover $r(H - A_2)$ aan rente betaald, en een bedrag a_3 afgelost. We krijgen

$$a_3 + r(H - a_1 - a_2) = b.$$

We hebben nu in totaal drie betrekkingen en vier onbekenden. Dat schiet nog steeds niet op. . .

Bij iedere volgende stap krijgen we een extra betrekking, maar ook een extra onbekende variabele. Stopt dit patroon ooit?

De laatste stap (1)

Na periode $n-1$ is er $A_{n-1} = a_1 + \cdots + a_{n-1}$ afgelost.

De resterende schuld na periode $n-1$ is $H - A_{n-1}$. In periode n wordt hierover $r(H - A_{n-1})$ aan rente betaald, en een bedrag a_n afgelost. We krijgen

$$a_n + r(H - A_{n-1}) = b.$$

Weer een betrekking erbij, en weer een onbekende variabele, a_n.

Maar...

De laatste stap (2)

. . . we weten meer:

na periode n is de totale aflossing $A_n = a_1 + \cdots + a_n$ gelijk aan H, het geleende bedrag!

We hebben dus de extra betrekking

$$a_1 + \cdots + a_n = H,$$

in totaal evenveel $(n + 1)$ vergelijkingen als onbekenden, in principe goed nieuws!

Alles op een rijtje

We hebben onbekende $a_1, \cdots, a_n$ en b. En de vergelijkingen

$$
\begin{aligned}
a_1 + rH &= b \\
a_2 + r(H - a_1) &= b \\
a_3 + r(H - a_1 - a_2) &= b \\
&\vdots \\
a_n + r(H - a_1 \cdots - a_{n-1}) &= b \\
a_1 + \cdots + a_n &= H,
\end{aligned}
$$

inderdaad $n+1$ vergelijkingen voor $n+1$ onbekenden.

Herschrijven, alle onbekenden links

$$
\begin{aligned}
a_1 - b &= -rH \\
-ra_1 + a_2 - b &= -rH \\
-ra_1 - ra_2 + a_3 - b &= -rH \\
&\vdots \\
-ra_1 - ra_2 \cdots - ra_{n-1} + a_n - b &= -rH \\
a_1 + \cdots + a_n &= H,
\end{aligned}
$$

Tijd voor een intermezzo, matrixrekening!

Een vector is een rijtje getallen. We onderscheiden kolomvectoren zoals

$$\begin{pmatrix} 27 \\ 33 \\ -44 \end{pmatrix}$$

en rijvectoren zoals

$$\begin{pmatrix} 27 & 33 & -44 \end{pmatrix}.$$

Vectoren, algemeen

Kolomvector van lengte n

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

en rijvector van lengte m,

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}.$$

Product van rij- en kolomvector

Voor kolomvector k en rijvector r van *gelijke lengte* n is

$$rk = r_1 k_1 + \cdots + r_n k_n.$$

Voorbeeld (markt): de r_i stellen hoeveelheden (fruit) voor, de k_i de prijzen (van het fruit).

rk is dan wat er moet betaald moet worden.

Matrices

Een matrix is een rechthoekig blok getallen, zoals

$$b = \begin{pmatrix} 23 & 37 & 81 \\ 12 & -3 & \pi \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

We onderscheiden rijen en kolommen.

Vectoren zijn bijzonderen matrices.

Matrices, algemeen

Een $n \times m$ matrix schrijven we als

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nm} \end{pmatrix}.$$

Er zijn hier dus n rijen en m kolommen, men schrijft $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Een matrix $M \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ is een getal en schrijven we zonder haken, bijvoorbeeld $M = 123$ i.p.v. $M = \begin{pmatrix}123\end{pmatrix}$.

Product van matrix en kolomvector

Neem matrix M met m kolommen en kolomvector k van m elementen. Dan is Mk de kolomvector

$$Mk = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}k_1 + \cdots + M_{1m}k_m \\ \vdots \\ M_{n1}k_1 + \cdots + M_{nm}k_m \end{pmatrix}.$$

Voorbeeld: markt met verschillende klanten.

Rekenregels

Matrices optellen bij gelijke afmetingen ($M + N$):

$$\begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{11} & \cdots & N_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ N_{n1} & \cdots & N_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} + N_{11} & \cdots & M_{1m} + N_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1} + N_{n1} & \cdots & M_{nm} + N_{nm} \end{pmatrix}$$

Product van een matrix M met een getal g is ook weer een matrix,

$$Mg = gM = \begin{pmatrix} gM_{11} & \cdots & gM_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ gM_{n1} & \cdots & gM_{nm} \end{pmatrix}.$$

Product van twee matrices

Neem matrix M met m kolommen en matrix N met (evenveel, dus) m rijen, zeg $M \in \mathbb{R}^{n\times m}, N \in \mathbb{R}^{m\times p}$. Dan is $MN \in \mathbb{R}^{n\times p}$ de matrix

$$\begin{aligned} MN &= \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{11} & \cdots & N_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ N_{m1} & \cdots & N_{mp} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_{11}N_{11} + \cdots + M_{1m}N_{m1} & \cdots & M_{11}N_{1p} + \cdots + M_{1m}N_{mp} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1}N_{11} + \cdots + M_{nm}N_{m1} & \cdots & M_{n1}N_{1p} + \cdots + M_{nm}N_{mp} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Voorbeeld: markt met verschillende klanten en verschillende valuta, of
Verschillende klanten en verschillende (super)markten.

Volgorde maakt uit

Neem twee matrices M en N van de juiste afmetingen. Dan is i.h.a.

$$MN \neq NM.$$

Voorbeeld: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dan is

$$MN = 11$$

en

$$NM = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Zelfs de afmetingen zijn hier verschillend!

Nog een paar rekenregels

Als alle afmetingen "kloppen" geldt, niet als voor getallen,

$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(A + B)C = AC + BC.$$

Vierkante matrices

Vierkante matrices hebben evenveel rijen als kolommem (n). De eenheidsmatrix $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alleen enen op de diagonaal, verder nullen.

Product met de eenheidsmatrix

De eenheidsmatrix (**I**dentiteit) $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is de enige matrix met de eigenschap dat

$$MI = IM = M$$

voor elke matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Vergelijk de gewone vermenigvuldiging met getallen: $I = 1$ voor $n = 1$.

Inverse matrices

Herinner dat voor elke getal $x \neq 0$ er een *inverse* bestaat, $x^{-1} = \frac{1}{x}$, zodanig dat $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.

Een vierkante matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heet inverteerbaar als er een matrix $M^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times}$ bestaat met

$$MM^{-1} = M^{-1}M = I.$$

Niet elke vierkante matrix is inverteerbaar!

Inverse matrices, (tegen)voorbeeld

Neem $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Dan is

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{c}{ad-bc} \\ -\frac{b}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix},$$

onder de voorwaarde dat $ad - bc \neq 0$.

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ is niet inverteerbaar.

Blokmatrices

Neem

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right),$$

waarbij A, B, C en D zelf matrices van mogelijk verschillende afmetingen zijn, maar wel passend in het rechthoekige blok. Net zo'n soort matrix is

$$N = \left(\begin{array}{c|c} P & R \\ \hline Q & S \end{array}\right).$$

Dan geldt (de horizontale en verticale lijnen laten we nu weg)

$$MN = \begin{pmatrix} AP + CQ & AR + CS \\ BP + DQ & BR + DS \end{pmatrix},$$

mits alle matrixproducten in MN goed definieerd zijn, m.a.w. als alle afmetingen 'kloppen'.

Blokmatrices en inverses, een voorbeeld

Neem

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

waarbij A en D beide vierkant van mogelijk verschillende afmetingen zijn, maar wel beide inverteerbaar. C is een matrix die 'past' en 0 is een passende matrix met alleen maar nullen. Dan is

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

Lineaire vergelijkingen

Een vierkant stelsel lineaire vergelijkingen is van het type

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_n \end{aligned}$$

We hebben hier net zoveel vergelijkingen (n) als onbekenden (de x_i). We schrijven kortweg $Ax = b$, met $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een matrix en x en b kolomvectoren. De oplossing x bestaat en is uniek als A inverteerbaar is, en dan is

$$x = A^{-1}b.$$

Door substitutie is direct te zien dat deze oplossing voldoet.

Herinnering

We hadden onbekende $a_1, \cdots, a_n$ en b. En de vergelijkingen

$$
\begin{aligned}
a_1 - b &= -rH \\
-ra_1 + a_2 - b &= -rH \\
-ra_1 - ra_2 + a_3 - b &= -rH \\
&\vdots \\
-ra_1 - ra_2 \cdots - ra_{n-1} + a_n - b &= -rH \\
a_1 + \cdots + a_n &= H,
\end{aligned}
$$

$n+1$ vergelijkingen voor $n+1$ onbekenden.

Matrixvorm

Introduceer

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

en

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -r & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ -r & \cdots & \cdots & -r & 1 \end{pmatrix}.$$

Dan komt er

$$Pa - b\mathbf{1} = -rH\mathbf{1}.$$

De laatste vergelijking erbij

Eerst nog een extra notatie: $^\top$ betekent transpositie van een vector of matrix, d.w.z. rijen worden kolommen en omgekeerd.
Zo is $\mathbf{1}^\top = (1, \ldots, 1)$.

Neem

$$M = \begin{pmatrix} P & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1}^\top & 0 \end{pmatrix},$$

en er komt

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -rH\mathbf{1} \\ H \end{pmatrix}.$$

Dit is dus een *lineaire vergelijking in matrixvorm*. Met een geschikt computerprogramma valt razendsnel de onbekende a en b uit te rekenen, als r en H bekend zijn.

Maar wij willen een formule. . .

Een onnuttige(?) formule

Er geldt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} -rH\mathbf{1} \\ H \end{pmatrix},$$

maar hoe bepaal je (zonder computer) M^{-1}?

Een nadere kijk, een truc

We bekijken

$$M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -rH\mathbf{1} \\ H \end{pmatrix}$$

en vermenigvuldigen links en rechts voor met

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathbf{1}^\top P^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Resultaten

Eerst links,

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathbf{1}^\top P^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1}^\top & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & -\mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1}^\top P^{-1} \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Dan rechts,

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathbf{1}^\top P^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -rH\mathbf{1} \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}r \\ \mathbf{1}^\top P^{-1} \mathbf{1} r + 1 \end{pmatrix} H.$$

Een nieuwe vergelijking

We hebben nu een nieuwe vergelijking,

$$\begin{pmatrix} P & -\mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1}^\top P^{-1}\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}r \\ \mathbf{1}^\top P^{-1}\mathbf{1}r + 1 \end{pmatrix} H.$$

Wat is het voordeel hier?

Het voordeel

We kunnen b nu expliciet bepalen (en daar ging het om!).

$$b = \frac{\mathbf{1}^\top P^{-1}\mathbf{1}r + 1}{\mathbf{1}^\top P^{-1}\mathbf{1}} H,$$

als we $\mathbf{1}^\top P^{-1}\mathbf{1}$ kunnen bepalen. . . , en dan, uit

$$Pa - \mathbf{1}b = -\mathbf{1}rH$$

vinden we

$$a = P^{-1}\mathbf{1}(b - rH),$$

waarvoor we $P^{-1}\mathbf{1}$ nodig hebben. . .

P^{-1} is niet nodig

Inzicht(!) levert de volgende truc:

$$P \begin{pmatrix} 1 \\ (1+r) \\ (1+r)^2 \\ \vdots \\ (1+r)^{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{1},$$

waaruit volgt

$$P^{-1}\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ (1+r) \\ (1+r)^2 \\ \vdots \\ (1+r)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Tussendoortje

P^{-1} is toch te bepalen. Het blijkt dat

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ r & 1 & \ddots & & & \vdots \\ r(1+r) & r & \ddots & \ddots & & \vdots \\ r(1+r)^2 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ r(1+r)^{n-2} & \cdots & \cdots & \cdots & r & 1 \end{pmatrix}.$$

Hiermee vinden we

$$\mathbf{1}^\top P^{-1}\mathbf{1} = 1 + \cdots + (1+r)^{n-1}$$
$$= \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Gelijk een vraag: hoe zit het met dat laatste gelijkheidsteken?
Tijd voor een nieuw intermezzo!

Recurrente betrekking

Bekijk een rijtje getallen x_k die voldoen aan

$$x_k = g\, x_{k-1}.$$

Dit is een *recurrente betrekking*, die stapsgewijs opgelost kan worden. We beginnen met x_1, verondersteld bekend. Dan

$$\begin{aligned} x_2 &= g\, x_1 \\ x_3 &= g\, x_2 = g^2 x_1 \\ x_4 &= g\, x_3 = g^3 x_1, \end{aligned}$$

en zo kun je verder gaan. In het algemeen staat er

$$x_k = g^{k-1} x_1.$$

Sommeren

De x_k vormen een (eindige) meetkundige rij. We willen $S = x_1 + \cdots + x_n$ bepalen. Truc!

$$\begin{aligned} S &= x_1 + gx_1 + g^2x_1 + \cdots + g^{n-1}x_1 \\ gS &= \qquad gx_1 + g^2x_1 + \cdots + g^{n-1}x_1 + g^n x_1. \end{aligned}$$

Onderste minus de bovenste geeft:

$$gS - S = g^n x_1 - x_1,$$

ofwel $(g-1)S = (g^n - 1)x_1$, en dus (als $g \neq 1$)

$$S = \frac{g^n - 1}{g - 1} x_1.$$

Terug

We moesten $\mathbf{1}^\top P^{-1}\mathbf{1} = 1 + \cdots + (1+r)^{n-1}$ uitrekenen.

Met $x_1 = 1$ en $g = 1 + r$ komt er

$$\mathbf{1}^\top P^{-1}\mathbf{1} = \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Daarmee volgt wat we uiteindelijk wilden weten,

$$\begin{aligned} b &= \frac{\frac{(1+r)^n-1}{r} r + 1}{\frac{(1+r)^n-1}{r}} H \\ &= \frac{(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1} H \\ &= \frac{r}{1-(1+r)^{-n}} H. \end{aligned}$$

Bonus: we kennen nu ook de a_k

Herinner

$$a = P^{-1}\mathbf{1}(b - rH).$$

Rekenen geeft

$$b - rH = \frac{rH}{(1+r)^n - 1}$$

en $P^{-1}\mathbf{1}$ weten we ook!

Dus kennen we nu de vector a en we vinden

$$a_k = (1+r)^{k-1}\frac{rH}{(1+r)^n - 1}.$$

Een verzuchting

- Kon dat niet eenvoudiger?

Inhoud

We gaan terug naar de vergelijkingen

$$\begin{aligned} a_1 + rH &= b \\ a_2 + r(H - a_1) &= b \\ a_3 + r(H - a_1 - a_2) &= b \\ &\vdots \\ a_n + r(H - a_1 \cdots - a_{n-1}) &= b \\ a_1 + \cdots + a_n &= H, \end{aligned}$$

waarin ongebruikte structuur zit!

Paarsgewijs aftrekken

De eerste minus de tweede (b elimineren!) geeft

$$a_1 + rH - (a_2 + r(H - a_1)) = 0.$$

De tweede minus de derde geeft

$$a_2 + r(H - a_1) - (a_3 + r(H - a_1 - a_2)) = 0.$$

Herschrijven levert

$$\begin{aligned} a_2 &= (1 + r)a_1 \\ a_3 &= (1 + r)a_2. \end{aligned}$$

Algemene uitdrukking

We vinden de recurrente betrekking

$$a_k = (1+r)a_{k-1},$$

en dus

$$a_k = (1+r)^{k-1}a_1.$$

We kennen dus alle a_k als we a_1 kennen.

En met eerdere somformule volgt ook

$$a_1 + \cdots + a_n = \frac{(1+r)^n - 1}{r} a_1.$$

Het vinden van a_1

We hadden nog een vergelijking,

$$a_1 + \cdots + a_n = H.$$

Dus

$$\frac{(1+r)^n - 1}{r} a_1 = H,$$

en daarmee

$$a_1 = \frac{r}{(1+r)^n - 1} H.$$

Het vinden van b

We gaan terug naar

$$a_1 + rH = b$$

en gebruiken dat we a_1 weten:

$$b = \frac{r}{(1+r)^n - 1} H + rH = \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} H,$$

en daar waren we op uit!

Vergelijking van de methoden

In de tweede aanpak hebben we eerst de a_k, eigenlijk a_1, bepaald, en daarmee b.

In de eerste aanpak was dat omgekeerd.

Het vinden van a_k en A_k

Herinner $a_k = (1+r)^{k-1} a_1$. Dus

$$a_k = \frac{r(1+r)^{k-1}}{(1+r)^n - 1} H.$$

Ook weten we nu uit de eerste vergelijking, som van een meetkundige rij, en een eerdere formule voor a_1

$$\begin{aligned} A_k &= a_1 + \cdots + a_k \\ &= \frac{(1+r)^k - 1}{r} a_1 \\ &= \frac{(1+r)^k - 1}{r} \frac{r}{(1+r)^n - 1} H \\ &= \frac{(1+r)^k - 1}{(1+r)^n - 1} H. \end{aligned}$$

De totale betaling

Wat betaal je in totaal over de gehele periode?

Antwoord:

$$\begin{aligned} nb &= \frac{nr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} H \\ &= \frac{nr}{1-(1+r)^{-n}} H, \end{aligned}$$

en dat kan behoorlijk meer zijn dan H !

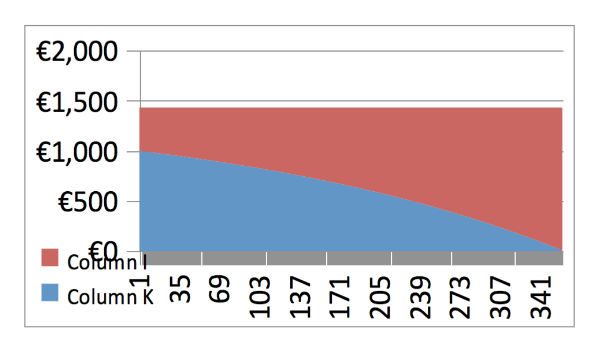
Inhoud

De invloed van de rente

We nemen $H = € \ 300000$, $n = 360$ en $r = p/12$.

p	b	nb
2%	€ 1109	€ 399180 $= H + 33\%$
3%	€ 1265	€ 455332 $= H + 52\%$
4%	€ 1432	€ 515608 $= H + 72\%$
8%	€ 2201	€ 792465 $= H + 164\%$

De annuïteiten bij 4%



[blauw=rente, rood=aflossing]

De invloed van de looptijd

We nemen $H = €\ 300000$, $r = p/12$ met $p = 4\%$.

n	b	nb
240	€ 1818	€ 436305 $= H + 45\%$
300	€ 1584	€ 475053 $= H + 58\%$
360	€ 1432	€ 515608 $= H + 72\%$
420	€ 1328	€ 557896 $= H + 86\%$

Inhoud

Lineaire hypotheek

Hier is de maandelijkse aflossing constant, en dus geldt dat

$$a_k = \frac{H}{n},\, A_k = \frac{kH}{n}.$$

De rente in periode k is dan $r_k = r(H - A_{k-1})$ en het maandbedrag wordt nu variabel:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{H}{n} + r(H - \frac{(k-1)H}{n}) \\ &= H(\frac{1}{n} + r(1 - \frac{k-1}{n})). \end{aligned}$$

Intermezzo: rekenkundige reeks

Een rekenkundige rij zijn getallen x_k van het type $x_k = kg$. Er geldt dus

$$x_k = g + x_{k-1}.$$

We bepalen $S = x_1 + \cdots + x_{n-1}$ met een truc:

$$S = x_1 + \cdots + x_{n-1} = g + \cdots + (n-1)g$$
$$S = x_{n-1} + \cdots + x_1 = (n-1)g + \cdots + g.$$

Optellen geeft (er zijn $n-1$ termen):

$$2S = ng + \cdots + ng = (n-1)ng.$$

Conclusie:

$$g + \cdots + (n-1)g = \frac{1}{2}(n-1)ng.$$

Eindbedrag

De totale betaling aan het eind van de periode is nu

$$B = b_1 + \cdots + b_n = H[(1 + rn) - \frac{1}{2}r(n-1)] = H(1 + \frac{1}{2}r(n+1)).$$

De totale rentebetaling is dan

$$B - H = \frac{1}{2}(n+1)rH.$$

Aflossingsvrije hypotheek

- Er wordt alleen rente betaald, lage maandlasten!
- Het maandbedrag is constant, $b = rH$.
- Aan het eind van de rit is $B = nrH$ betaald, maar er resteert een schuld van H, het huis is nog van de bank.
- Om het huis aan te schaffen wordt effectief een eindbedrag van $nrH + H$ betaald.

Aflossingsvrije hypotheek

- Er wordt alleen rente betaald, lage maandlasten!
- Het maandbedrag is constant, $b = rH$.
- Aan het eind van de rit is $B = nrH$ betaald, maar er resteert een schuld van H, het huis is nog van de bank.
- Om het huis aan te schaffen wordt effectief een eindbedrag van $nrH + H$ betaald.

Aflossingsvrije hypotheek

- Er wordt alleen rente betaald, lage maandlasten!
- Het maandbedrag is constant, $b = rH$.
- Aan het eind van de rit is $B = nrH$ betaald, maar er resteert een schuld van H, het huis is nog van de bank.
- Om het huis aan te schaffen wordt effectief een eindbedrag van $nrH + H$ betaald.

Inhoud

Drie hypotheekvormen op een rij

We nemen $H = € \ 300000$, $n = 360$ en $r = p/12$, met $p = 3\%$.

	eindbedrag	totale rente
AnnH	€ 455332	€ 155332
LinH	€ 435375	€ 135375
AfvH	€ 570000	€ 270000

We zien een zeer hoog eindbedrag bij de AfvH,
waar lagere maandlasten tegenover staan.

Invloed van belastingaftrek

Hieronder presenteren we de totale betaling *verminderd* met de belastingaftrek, bij verschillende tarieven voor de (hoogste) belastingschijf.

Weer: $H = €\ 300000$, $n = 360$ en $r = p/12$, met $p = 3\%$.

	32%	52%
AnnH	€ 405626	€ 374560
LinH	€ 392055	€ 364980
AfvH	€ 483600	€ 429600

Dank voor uw aandacht!