Inleiding Wiskundige Logica

Yde Venema*

2017/2018

*Institute for Logic, Language and Computation, University of Amsterdam, Science Park 904, NL–1098XH Amsterdam. E-mail: y.venema@uva.nl.

Voorwoord

Deze aantekeningen vormen een aanzet tot een syllabus voor het gelijknamige vak *Inleiding Wiskundige Logica* (Universiteit van Amsterdam, BSc Wiskunde, 1e jaar).

De basis van deze syllabus wordt voorlopig gevormd door enkele hoofdstukken uit het volgende boek:

- Johan van Benthem, Hans van Ditmarsch en Jan van Eijck, *Logica in Actie*, uitg. Academic Service, ISBN 9789039525999.

Deze tekst is ook gratis binnen te halen via de volgende link van de Open Universiteit: `https://www.ou.nl/Docs/Spinoza/Benthem/LIA_eBook.pdf`.

Commentaar op deze aantekeningen is van harte welkom!

Inhoudsopgave

1 Inleiding **1**

I Propositielogica 2

2 Syntax en semantiek **3**
2.1 Propositielogica, waarheid en classificeren . . . 3
2.2 Inductie op formules . . . 3
2.3 Opgaven . . . 4

3 Semantische begrippen **6**
3.1 Wie A zegt moet B zeggen . . . 6
3.2 Functionele volledigheid . . . 6
3.3 Opgaven . . . 8

4 Natuurlijke Deductie **10**
4.1 Afleidingen . . . 10
4.2 De afleidingsregels . . . 11
4.3 Voorbeelden . . . 15
4.4 Correctheid, volledigheid en compactheid . . . 17
4.5 Opgaven . . . 18

5 Compactheid **20**

6 Correctheid & Volledigheid **23**
6.1 Volledigheid . . . 23
6.2 Correctheid . . . 25
6.3 Compactheid . . . 27

II Predicatenlogica 28

7 Taal van de predicatenlogica **29**
7.1 Predicatenlogica, modellen en programma's . . . 29
7.2 Termen en formules . . . 29
7.3 Syntactische begrippen . . . 30
7.4 Opgaven . . . 31

8 Semantiek **34**
8.1 Structuren en betekenis . . . 34
8.2 Semantische begrippen in de predicatenlogica . . . 37
8.3 Definieerbaarheid, theorieën en axiomatiseringen . . . 38
8.4 Opgaven . . . 41

9 Expressiviteit via spelen **44**
9.1 Opgaven . . . 48

10 Natuurlijke Deductie **50**
10.1 Afleidingen 50
10.2 Voorbeelden 51
10.3 Opgaven 53

11 Theorie van de predicatenlogica **55**
11.1 Compactheid 55
11.2 Opgaven 58

1 Inleiding

- ▶ Hoofdstuk 1 uit *Logica in Actie*[1]

[1] zie https://www.ou.nl/Docs/Spinoza/Benthem/LIA_eBook.pdf .

Deel I

Propositielogica

2 Syntax en semantiek

2.1 Propositielogica, waarheid en classificeren

▶ Hoofdstuk 2 uit *Logica in Actie*[2]

2.2 Inductie op formules

We geven een voorbeeld van twee definities en een bewijs die gebruik maken van inductie naar de complexiteit van formules (kortweg: formule-inductie).

Definitie 2.1 De verzameling *subformules* van een formule definiëren we inductief als volgt:

$$\begin{array}{lcll} \mathit{Sfor}(\varphi) & := & \{\varphi\} & \text{als } \varphi \text{ een propositieletter is,} \\ \mathit{Sfor}(\neg\varphi) & := & \{\neg\varphi\} \cup \mathit{Sfor}(\varphi), & \\ \mathit{Sfor}(\varphi \vee \psi) & := & \{\varphi \vee \psi\} \cup \mathit{Sfor}(\varphi) \cup \mathit{Sfor}(\psi), & \\ \text{etc.} & & & \end{array}$$

(Hier, evenals in het vervolg van deze aantekeningen, schrijven we 'etc.' om aan te geven dat de definitie voor de formules $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \to \psi$ en $\varphi \leftrightarrow \psi$ de voor de hand liggende variaties zijn van de definitie voor de $\varphi \vee \psi$.)

De verzameling propositieletters in een formule geven we met behulp van de volgende inductieve definitie:

$$\begin{array}{lcll} P(\varphi) & := & \{\varphi\} & \text{als } \varphi \text{ een propositieletter is,} \\ P(\neg\varphi) & := & P(\varphi), & \\ P(\varphi \vee \psi) & := & P(\varphi) \cup P(\psi), & \\ \text{etc.} & & & \end{array}$$

$\lhd$

Propositie 2.2 *Voor iedere propositionele formule φ geldt dat $P(\varphi) \subseteq \mathit{Sfor}(\varphi)$.*

Bewijs. We bewijzen de propositie met inductie naar de complexiteit van φ.

Basisgeval φ is een atomaire formule.
Met andere woorden: φ is van de vorm $\varphi = p$, voor zekere propositieletter p.
Dan is $P(\varphi) = \{p\}$ en $\mathit{Sfor}(\varphi) = \{p\}$; er geldt dus zeker dat $P(\varphi) \subseteq \mathit{Sfor}(\varphi)$.

Inductiestap φ is een samengestelde formule.
Onderscheid gevallen:

- φ is van de vorm $\varphi = \neg\psi$, voor zekere formule ψ.
  Inductiehypothese: de bewering geldt voor ψ, dwz $P(\psi) \subseteq \mathit{Sfor}(\psi)$.

[2] zie `https://www.ou.nl/Docs/Spinoza/Benthem/LIA_eBook.pdf` .

Dus geldt:

$$\begin{aligned} P(\varphi) &= P(\psi) && \text{(definitie } P) \\ &\subseteq \mathit{Sfor}(\psi) && \text{(IH)} \\ &\subseteq \{\neg\psi\} \cup \mathit{Sfor}(\psi) && \text{(elementaire verzamelingenleer)} \\ &= \mathit{Sfor}(\varphi) && \text{(definitie } \mathit{Sfor}), \end{aligned}$$

hetgeen we moesten bewijzen.

- φ is van de vorm $\varphi = \psi_0 \vee \psi_1$, voor zekere formules ψ_0 en ψ_1.
  Inductiehypothese: de bewering geldt voor ψ_0 en voor ψ_1, dwz $P(\psi_i) \subseteq \mathit{Sfor}(\psi_i)$ voor $i = 0, 1$.
  Dus geldt:

$$\begin{aligned} P(\varphi) &= P(\psi_0) \cup P(\psi_1) && \text{(definitie } P) \\ &\subseteq \mathit{Sfor}(\psi_0) \cup \mathit{Sfor}(\psi_1) && \text{(IH)} \\ &\subseteq \{\psi_0 \vee \psi_1\} \cup \mathit{Sfor}(\psi_0) \cup \mathit{Sfor}(\psi_1) && \text{(elementaire verzamelingenleer)} \\ &= \mathit{Sfor}(\varphi) && \text{(definitie } \mathit{Sfor}), \end{aligned}$$

- φ is een conjunctie, implicatie, of bi-implicatie: deze gevallen gaan net zo als het geval van disjuncties.

QED

2.3 Opgaven

Opgave 2.1 Geef de volgende zinnen weer in de propositielogica:

a. Als de bus niet komt, komen de tram en de trein.

b. Als de tram komt in het geval de trein niet komt, dan komen de trein en de bus niet allebei.

c. De trein komt alleen als de bus en de tram niet komen.

d. Tenzij de bus of de tram komt, komt de trein.

Opgave 2.2 Het aantal elementen van een verzameling A representeren we als $\#A$, zodat (met Definitie 2.1) $\#(\mathit{Sfor}(\varphi))$ het aantal subformules van de formule φ weergeeft.

a. Welk begrip wordt geïntroduceerd door de volgende inductieve definitie?

$$\begin{array}{lll} C(\varphi) & := & 0 \qquad \text{als } \varphi \text{ een propositieletter is,} \\ C(\neg\varphi) & := & 1 + C(\varphi), \\ C(\varphi \vee \psi) & := & 1 + C(\varphi) + C(\psi), \\ \text{etc.} & & \end{array}$$

b. Geef voorbeelden van formules met $C(\varphi) = 3$, terwijl het aantal subformules van φ respectievelijk 3,4,5,6 en 7 bedraagt.

c. Zijn er formules φ zodanig dat $C(\varphi) = 3$ en $\#(\mathit{Sfor}(\varphi)) \geq 8$?

d. Toon aan dat het aantal subformules van een formule φ wordt begrensd door $3^{1+C(\varphi)}$:

$$\#(\mathit{Sfor}(\varphi)) \leq 3^{1+C(\varphi)}.$$

e. Kunt u een scherpere bovengrens geven voor $\#(\mathit{Sfor}(\varphi))$? Zo ja, geef een bewijs.

f. (*) Voor welke natuurlijke getallen m en n is er een formule φ met $C(\varphi) = m$ en $\#(\mathit{Sfor}(\varphi)) = n$?

Opgave 2.3 De *diepte* $D(\varphi)$ van een formule wordt als volgt gedefinieerd:

$$\begin{array}{lll} D(\varphi) & := & 1 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{als } \varphi \text{ een propositieletter is,} \\ D(\neg\varphi) & := & 1 + D(\varphi), \\ D(\varphi \vee \psi) & := & 1 + \max(D(\varphi), D(\psi)), \\ \text{etc.} & & \end{array}$$

a. Geef voorbeelden van formules φ van diepte 3 die respectievelijk 3, 4, 5, 6 en 7 verschillende subformules hebben. Hint: teken de *constructiebomen* van deze formules!

b. Toon aan dat voor elke formule φ het aantal subformules van φ wordt begrensd door $2^{D(\varphi)} - 1$:

$$\#(\mathit{Sfor}(\varphi)) \leq 2^{D(\varphi)} - 1.$$

Opgave 2.4 Voor een gegeven formule φ definiëren we $A(\varphi)$ als het aantal voorkomens van propositieletters in φ. Bijvoorbeeld: $A(p) = 1$, $A(\neg p \vee q) = 2$, $A(p \wedge (q \to \neg p)) = 3$.

a. Geef een inductieve definitie van $A(\varphi)$.

b. Geef voorbeelden van formules φ met $A(\varphi) = 3$ die respectievelijk $5, 6, 7, \ldots$ verschillende subformules hebben.

c. Toon aan dat voor elke formule φ het aantal subformules van φ kleiner of gelijk is aan de som van het aantal voorkomens van popositieletters in φ en het aantal connectieven in φ (zie Opgave 2.2):

$$\#(\mathit{Sfor}(\varphi)) \leq A(\varphi) + C(\varphi).$$

d. Wanneer geldt $\#\mathit{Sfor}(\varphi) = A(\varphi) + C(\varphi)$? (U hoeft uw antwoord niet te bewijzen.)

3 Semantische begrippen

3.1 Wie A zegt moet B zeggen

- Hoofdstuk 3 uit *Logica in Actie*[3]

Opmerking 3.1 Anders dan in het boek zullen we voor de logische gevolgrelatie het symbool '$\models$', en niet '$\Longrightarrow$' gebruiken. Om aan te geven dat de formule φ een logisch gevolg is van de verzameling Γ formules, noteren we dus: $\Gamma \models \varphi$.

Definitie 3.2 Een *valuatie* of *waardering* is een afbeelding van de verzameling propositieletters naar de verzameling $\{0, 1\}$ van waarheidswaarden. Een valuatie is een *model* voor een formule als de formule waar is onder die valuatie. $\lhd$

Valuaties corresponderen dus met de *rijen* van een waarheidstafel.

3.2 Functionele volledigheid

Definitie 3.3 Een verzameling C van connectieven heet *functioneel volledig* als elke formule uit de propositielogica equivalent is met een C-formule (dat wil zeggen: een formule die alleen connectieven uit C gebruikt). $\lhd$

Een belangrijke stelling over de propositielogica is de volgende.

Stelling 3.4 *De verzameling* $\{\neg, \wedge, \vee\}$ *is functioneel volledig.*

Voor deze stelling geven we twee verschillende bewijzen.

Bewijs van Stelling 3.4 (a). We bewijzen met formule-inductie dat we bij elke formule φ een formule φ' kunnen vinden die (i) alleen de connectieven $\neg$, $\wedge$ en $\vee$ gebruikt, en (ii) equivalent is met φ.

In de *basisstap* hebben we van doen met een atomaire formule φ, dat wil zeggen: φ is een propositieletter. Maar dan kunnen we definiëren $\varphi' := \varphi$.

In de *inductiestap* hebben we te maken met een samengestelde formule φ. We maken een gevalsonderscheiding:

(*geval* $\neg$) φ is van de vorm $\neg\psi$. Volgens de *inductiehypothese* is er een $\{\neg, \wedge, \vee\}$-formule ψ' die equivalent is met ψ. Maar dan is de formule $\neg\psi'$ equivalent met $\varphi = \neg\psi$, en deze formule is ook een $\{\neg, \wedge, \vee\}$-formule. We kunnen dus definiëren $\varphi' := \neg\psi'$.

(*geval* $\vee$) φ is van de vorm $\psi_1 \vee \psi_2$. ...

(*geval* $\wedge$) φ is van de vorm $\psi_1 \wedge \psi_2$. ...

[3] zie `https://www.ou.nl/Docs/Spinoza/Benthem/LIA_eBook.pdf`.

(*geval* $\to$) φ is van de vorm $\psi_1 \to \psi_2$. Volgens de *inductiehypothese* zijn er $\{\neg, \wedge, \vee\}$-formules ψ_1' en ψ_2' die equivalent zijn met respectievelijk ψ_1 en ψ_2. Definieer $\varphi' := \neg\psi_1' \vee \psi_2'$, dan behoort φ' zeker tot het juiste fragment. Maar ook geldt dat φ' equivalent is met $\psi_1' \to \psi_2'$, en wegens de inductiehypothese dus met $\psi_1 \to \psi_2$, dat wil zeggen: met φ. De formule φ' voldoet dus aan de voorwaarden.

(*geval* $\leftrightarrow$) φ is van de vorm $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$. ...

QED

Bewijs van Stelling 3.4 (b). Een heel ander bewijs, dat we hier alleen aan de hand van een voorbeeld schetsen, gaat als volgt. Neem de formule φ met de propositieletters p, q en r, en bekijk de waarheidstafel van deze formule, bijvoorbeeld:

p	q	r	φ
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Neem nu de drie *modellen* van φ, die we gemakshalve maar even V_{101}, V_{011} en V_{010} zullen noemen. Bij elk van deze valuaties creëren we een conjunctie van propositieletter en negaties van propositieletters, als volgt. De valuatie V_{101} kunnen we karakteriseren door de formule $\gamma_{101} := p \wedge \neg q \wedge r$, de valuatie V_{011} door de formule $\gamma_{011} := \neg p \wedge q \wedge r$, en de valuatie V_{010} door de formule $\gamma_{010} := \neg p \wedge q \wedge \neg r$.

De formule φ is precies waar onder één van deze drie valuaties, en is dus equivalent met de formule

$$\gamma_{101} \vee \gamma_{011} \vee \gamma_{010},$$

en deze laatste formule gebruikt alleen de connectieven $\neg$, $\wedge$ en $\vee$. QED

Het tweede bewijs levert eigenlijk een sterker resultaat op dan de stelling, op twee manieren. Om te beginnen laat dit bewijs zien dat niet alleen de bekende connectieven, maar alle *mogelijke* connectieven die met behulp van waarheidstafels zijn gedefinieerd, kunt omschrijven met de connectieven $\neg, \wedge$ en $\vee$. En ten tweede levert de gevolgde procedure van bewijs (b) altijd een formule op die een hele *bijzondere vorm* heeft.

Definitie 3.5 Een *literal* is een formule van de vorm p of $\neg p$, dat wil zeggen: een propositieletter of een negatie van een propositieletter. Een formule φ is in *disjunctieve normaalvorm* als φ een disjunctie is van conjuncties van literals. $\lhd$

Voorbeelden van formules in disjunctieve normaalvorm: p, $\neg p$, $p \vee \neg q$, $\neg p \wedge r$, $(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg p \vee \neg r)$. De definitie is dus eigenlijk een beetje slordig geformuleerd: de formule $\neg p \wedge r$ is een 'disjunctie van één' conjunctie van literals, en de formule $p \vee \neg q$ is een disjunctie van twee formules die elk een 'conjunctie' van één literal zijn. Voorbeelden van formules die *niet* in disjunctieve normaalvorm zijn: $\neg\neg p$, $\neg p \wedge (p \vee q)$.

Bewijs (b) van Stelling 3.4 laat dus zien dat elke formule uit de propositielogica kan worden herschreven tot een equivalente formule in disjunctieve normaalvorm.

3.3 Opgaven

Opgave 3.1 Maak waarheidstafels voor de volgende formules:

a. $\neg(p \leftrightarrow (q \vee r))$;

b. $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$;

c. $(\neg p \vee q \vee \neg r) \rightarrow (p \vee \neg q)$;

d. $q \wedge \neg q$.

Opgave 3.2 Beschouw de volgende twee formules:

$$\begin{aligned} \varphi &= \neg(p \rightarrow ((q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r))) \\ \psi &= ((p \rightarrow q) \vee r) \wedge (r \rightarrow \neg q) \end{aligned}$$

a. Laat met behulp van waarheidstafels zien dat alle modellen van φ modellen van ψ zijn.

b. Is φ een logisch gevolg van ψ? Zo ja, toon dat aan. Zo nee, geef een tegenmodel.

c. Is $\varphi \rightarrow \psi$ een tautologie? Is $\psi \rightarrow \varphi$ een tautologie?

d. Geef een disjunctieve normaalvorm van ψ.

Opgave 3.3 Geef disjunctieve normaalvormen van de volgende formules:

$$\begin{aligned} \varphi &= \neg(p \rightarrow ((q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r))) \\ \psi &= ((p \rightarrow q) \vee r) \wedge (r \rightarrow \neg q) \\ \chi &= p \rightarrow (q \wedge \neg q) \end{aligned}$$

Opgave 3.4 Laat zien dat $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ dan en slechts dan als $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.

Opgave 3.5 Beantwoord de volgende vragen:

a. Hoeveel verschillende deelverzamelingen heeft een verzameling van n elementen?

b. Hoeveel verschillende valuaties zijn er voor een gegeven domein van n propositieletters?

c. Wat is de lengte van een waarheidstafel met n propositieletters?

d. Hoeveel verschillende waarheidstafels zijn er met n propositieletters?

e. Hoeveel logisch niet-equivalente formules zijn definieerbaar met het alfabet $\{p_1, \ldots, p_n\}$, $\neg$, $\wedge$ en $\vee$?

Opgave 3.6 a. Geef $\{\neg, \rightarrow\}$-formules die equivalent zijn met respectievelijk $p \vee q$ en $p \wedge q$.

b. Laat zien dat de verzameling $\{\neg, \rightarrow\}$ functioneel volledig is.

c. Laat zien dat het connectief $\rightarrow$ in zijn eentje niet functioneel volledig is. (Hint: bekijk alle $\{\rightarrow\}$-formules die je met twee propositieletters kunt maken.)

Opgave 3.7 Gegeven is het connectief $\star$ ('noch'), met de volgende waarheidstabel:

φ	ψ	$\varphi \star \psi$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

a. Geef $\star$-formules die equivalent zijn met respectievelijk $\neg p$, $p \vee q$ en $p \wedge q$.

b. Laat zien dat het connectief $\star$ in zijn eentje functioneel volledig is.

4 Natuurlijke Deductie

Opmerking 4.1 Bij het onderwerp natuurlijke deductie gaan we uit van een propositielogische taal die als speciale constante het *falsum* symbool $\perp$ bevat. Dit symbool is een atomaire formule die onder elke valuatie onwaar is — een contradictie dus. Verder negeren we het equivalentieconnectief $\leftrightarrow$: de formule $\varphi \leftrightarrow \psi$ wordt hier gezien als afkorting van $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

4.1 Afleidingen

Een *bewijs* of *afleiding* met *natuurlijke deductie* (kort: ND) is een genummerde lijst van formules, die we als volgt weergeven:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & \varphi_1 \\
2 & \varphi_2 \\
3 & \varphi_3 \\
\vdots & \vdots \\
n-1 & \varphi_{n-1} \\
n & \varphi_n
\end{array}
$$

In een ND-bewijs wordt elke formule φ op één van de onderstaande manieren verkregen:

1. φ is een *premisse*, dat wil zeggen een onbewezen aanname;

2. φ is verkregen uit eerdere formules door het toepassen van één van de *afleidingsregels*;

3. φ is een *hypothese*, dat wil zeggen een onbewezen aanname die later wordt ingetrokken.

Elk ND-bewijs heeft dus een (eventueel lege) verzameling premisses, en een *resultaat*, namelijk de laatste formule van de afleiding. Als er een afleiding bestaat waarvan alle premisses uit de verzameling Γ komen, en φ het resultaat is, noteren we dat als $\Gamma \vdash \varphi$, en we zeggen dat φ *afleidbaar* is *uit* Γ. In het geval dat Γ de lege verzameling is, zeggen we dat φ *afleidbaar* is, notatie: $\vdash \varphi$.

Met het aannemen van een hypothese in een afleiding beginnen we een *deelbewijs*. Zo'n deelbewijs eindigt als de aanname wordt *ingetrokken* — dat betekent dat de hypothese niet langer gebruikt mag worden. We zullen deelbewijzen weergeven met behulp van een extra verticale lijn; de (unieke) hypothese van het deelbewijs wordt van de rest van het deelbewijs gescheiden door een horizontale lijn:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & \varphi_1 \\
\vdots & \vdots \\
k-1 & \varphi_{k-1} \\
\begin{array}{l} k \\ \vdots \\ l \end{array} & \quad \begin{array}{|l} \varphi_k \\ \hline \vdots \\ \varphi_l \end{array} \\
l+1 & \varphi_{l+1} \\
\vdots & \vdots \\
n & \varphi_n
\end{array}
$$

In het bovenstaande voorbeeld bestaat het deelbewijs uit de formules $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_l$, met hypothese φ_k. Deelbewijzen kunnen zelf ook weer deelbewijzen hebben; verderop vindt u een aantal voorbeelden.

Bewijzen zijn pas acceptabel als ze aan de volgende twee voorwaarden voldoen: Om te beginnen mogen formules uit een afleiding worden gebruikt in deelbewijzen, maar niet andersom. In het bovenstaande voorbeeld zijn de formules $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$ zowel beschikbaar in de regels $k \ldots l$ als in $l+1, \ldots, n$; de formules $\varphi_k, \ldots, \varphi_{l-1}$ zijn daarentegen *niet* beschikbaar in de regels $l+1, \ldots, n$. De extra verticale lijn maakt de formules in een deelbewijs als het ware onzichtbaar in het hoofdbewijs. De tweede conditie voor een (volledig) bewijs is dat het resultaat van de afleiding in het hoofdbewijs moet staan, en dus niet in een deelbewijs. In het voorbeeld hierboven vormen de regels $1 \ldots l$ dus geen compleet bewijs.

Bij dit college zullen we ND afleidingen *annoteren*, dat wil zeggen dat we bij elke formule in het bewijs precies verantwoorden waarom die formule daar mag staan. Dat wil zeggen: achter de formule geven we aan of de formule een premisse is (P), een hypothese (H), of het resultaat van een afleidingsregel; in het laatste geval vermelden we expliciet op grond van welke afleidingsregel, toegepast op welke eerdere formules, de formule in de afleiding voorkomt.

4.2 De afleidingsregels

Nu dan de concrete regels. Bij elk connectief horen twee soorten regels: *introductieregels* en *eliminatieregels*. Introductieregels geven aan hoe je een formule met het betreffende connectief kunt verkrijgen, eliminatieregels vertellen je hoe je zo'n formule kunt gebruiken. Bijvoorbeeld: de eliminatieregel ($\to$E), die overeenkomt met Modus Ponens, laat zien hoe je een implicatie $\varphi \to \psi$ kunt gebruiken: namelijk om samen met de formule φ te concluderen tot ψ. De introductieregel ($\to$I) daarentegen, geeft een voor de hand liggende manier om de implicatie $\varphi \to \psi$ te bewijzen, namelijk door de formule φ aan te nemen als hypothese, en dan ψ te bewijzen: als dat lukt, trek je de hypothese φ weer in, en heb je $\varphi \to \psi$ bewezen. Naast deze gebruiks- en introductieregels is er nog een *herhalingsregel* die zegt dat formules mogen worden gekopieerd (behalve vanuit een deelbewijs naar het hoofdbewijs), en de *dubbele negatieregel* die je toestaat om een dubbele negatie te verwijderen.

$\boxed{\to\mathrm{I}}$ De introductieregel voor $\to$:

$$
\begin{array}{l|lll}
\vdots & \vdots & & \\
k & & \multicolumn{1}{|l}{\varphi} & \text{(H)} \\
\cline{3-3}
\vdots & & \multicolumn{1}{|l}{\vdots} & \\
l & & \multicolumn{1}{|l}{\psi} & \\
\vdots & \vdots & & \\
m & \varphi \to \psi & & \to\mathrm{I},\ k\text{–}l
\end{array}
$$

$\boxed{\to\mathrm{E}}$ De eliminatieregel voor $\to$:

$$
\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
k & \varphi \to \psi & \\
\vdots & \vdots & \\
l & \varphi & \\
\vdots & \vdots & \\
m & \psi & \to\mathrm{E},\ k,\ l
\end{array}
$$

$\boxed{\wedge\mathrm{I}}$ De introductieregel voor $\wedge$:

$$
\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
k & \varphi & \\
\vdots & \vdots & \\
l & \psi & \\
\vdots & \vdots & \\
m & \varphi \wedge \psi & \wedge\mathrm{I},\ k,\ l
\end{array}
$$

$\boxed{\wedge\text{E}}$ De eliminatieregels voor $\wedge$:

$$
\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
k & \varphi \wedge \psi & \\
\vdots & \vdots & \\
l & \varphi & \wedge\text{E}, k
\end{array}
\qquad \text{en} \qquad
\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
k & \varphi \wedge \psi & \\
\vdots & \vdots & \\
l & \psi & \wedge\text{E}, k
\end{array}
$$

$\boxed{\vee\text{I}}$ De introductieregels voor $\vee$:

$$
\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
k & \varphi & \\
\vdots & \vdots & \\
l & \varphi \vee \psi & \vee\text{I}, k
\end{array}
\qquad \text{en} \qquad
\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
k & \psi & \\
\vdots & \vdots & \\
l & \varphi \vee \psi & \vee\text{I}, k
\end{array}
$$

$\boxed{\vee\text{E}}$ De eliminatieregel voor $\vee$:

$$
\begin{array}{l|lll}
\vdots & \vdots & & \\
k & \varphi \vee \psi & & \\
\vdots & \vdots & & \\
l & & \begin{array}{|l}\varphi \\ \hline \vdots \\ \chi\end{array} & \text{(H)} \\
m & & & \\
\vdots & \vdots & & \\
l' & & \begin{array}{|l}\psi \\ \hline \vdots \\ \chi\end{array} & \text{(H)} \\
m' & & & \\
\vdots & \vdots & & \\
n & \chi & & \vee\text{E}, k, l\text{–}m, l'\text{–}m'
\end{array}
$$

$\boxed{\neg\mathrm{I}}$ De introductieregel voor $\neg$:

$$\begin{array}{l|l|ll}
\vdots & \vdots & & \\
k & & \varphi & (\mathrm{H}) \\ \cline{3-3}
\vdots & & \vdots & \\
l & & \bot & \\
\vdots & \vdots & & \\
m & \neg\varphi & & \neg\mathrm{I},\ k\text{–}l
\end{array}$$

$\boxed{\neg\mathrm{E}}$ De eliminatieregel voor $\neg$:

$$\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
k & \neg\varphi & \\
\vdots & \vdots & \\
l & \varphi & \\
\vdots & \vdots & \\
m & \bot & \neg\mathrm{E},\ k,\ l
\end{array}$$

$\boxed{\bot\mathrm{E}}$ De eliminatieregel voor $\bot$ (“ex falso quodlibet”)

$$\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
k & \bot & \\
\vdots & \vdots & \\
l & \varphi & \bot\mathrm{E},\ k
\end{array}$$

$\boxed{\neg\neg\mathrm{E}}$ De dubbele negatieregel:

$$\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
k & \neg\neg\varphi & \\
\vdots & \vdots & \\
l & \varphi & \neg\neg\mathrm{E},\ k
\end{array}$$

$\boxed{\text{R}}$ De herhalingsregel:

$\vdots$	$\vdots$	
k	φ	
$\vdots$	$\vdots$	
l	φ	R, k

Nota bene: formules mogen wel worden herhaald van een hoofdbewijs naar een deelbewijs, maar niet andersom.

Opmerking 4.2 Als u de negatie als een niet-primitief connectief beschouwt ($\neg\varphi$ als afkorting van $\varphi \to \bot$), zijn de regels ($\neg$E) en ($\neg$I) speciale gevallen van de regels ($\to$E) en ($\to$I). De regel ($\neg$E) kunt u in zekere zin ook als een introductieregel voor $\bot$ beschouwen.

4.3 Voorbeelden

Voorbeeld 4.3 Om te beginnen geven we een afleiding voor de formule r uit de formules $(p \to (q \to r))$, $p \to q$ en p, dat wil zeggen, we laten zien dat $(p \to (q \to r)), p \to q, p \vdash r$:

1	$p \to (q \to r)$	(P)
2	$p \to q$	(P)
3	p	(P)
4	$q \to r$	$\to$E, 3, 1
5	q	$\to$E, 3, 2
6	r	$\to$E, 5, 4

Voorbeeld 4.4 Ter vergelijking geven we een afleiding voor de formule $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$:

1		$p \to (q \to r)$			(H)
2			$p \to q$		(H)
3				p	(H)
4				$q \to r$	$\to$E, 3, 1
5				q	$\to$E, 3, 2
6				r	$\to$E, 5, 4
7			$p \to r$		$\to$I, 3–6
8		$(p \to q) \to (p \to r)$			$\to$I, 2–7
9	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$				$\to$I, 1–9

Voorbeeld 4.5 Als derde voorbeeld laten we zien dat $\vdash (p \wedge q) \to (q \wedge q)$:

1	$p \wedge q$	(H)
2	q	$\wedge$E, 1
3	$q \wedge q$	$\wedge$I, 2, 2
4	$(p \wedge q) \to (q \wedge q)$	$\to$I, 1–3

Voorbeeld 4.6 Het vierde voorbeeld laat zien dat $p \vee (q \vee r) \vdash (p \vee q) \vee r$:

1	$p \vee (q \vee r)$	(P)
2	p	(H)
3	$p \vee q$	$\vee$I, 2
4	$(p \vee q) \vee r$	$\vee$I, 3
5	$q \vee r$	(H)
6	q	(H)
7	$p \vee q$	$\vee$I, 6
8	$(p \vee q) \vee r$	$\vee$I, 7
9	r	(H)
10	$(p \vee q) \vee r$	$\vee$I, 9
11	$(p \vee q) \vee r$	$\vee$E, 6–8, 9–10
12	$(p \vee q) \vee r$	$\vee$E, 2–4, 5–11

Voorbeeld 4.7 Het volgende bewijs is een afleiding voor de formule $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$:

1	$\neg p \to \neg q$	(H)
2	q	(H)
3	$\neg p$	(H)
4	$\neg q$	$\to$E, 3, 1
5	$\bot$	$\neg$E, 2, 4
6	$\neg\neg p$	$\neg$I, 3–5
7	p	$\neg\neg$E, 6
8	$q \to p$	$\to$I, 2–7
9	$(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$	$\to$I, 1–8

Voorbeeld 4.8 Het laatste voorbeeld, dat aantoont dat $\vdash p \vee \neg p$, is moeilijker. Om een disjunctie te bewijzen is soms een bewijs uit het ongerijmde nodig:

1	$\neg(p \vee \neg p)$	(H)
2	p	(H)
3	$p \vee \neg p$	$\vee$I, 2
4	$\bot$	$\neg$E, 3, 1
5	$\neg p$	$\neg$I, 2–4
6	$p \vee \neg p$	$\vee$I, 5
7	$\bot$	$\neg$E, 6, 1
8	$\neg\neg(p \vee \neg p)$	$\neg$I, 1–7
9	$(p \vee \neg p)$	$\neg\neg$E, 8

4.4 Correctheid, volledigheid en compactheid

Ten slotte: met de introductie van het begrip afleidbaarheid hebben we nu *twee* manieren om aan te geven dat een formule φ een gerechtvaardigde conclusie is uit een verzameling Γ van formules:

- $\Gamma \models \varphi$ betekent dat φ een *semantisch gevolg* is van Γ: elk model voor Γ (dat wil zeggen: elke valuatie die alle formules in Γ waar maakt) is ook een model voor φ.

- $\Gamma \vdash \varphi$ betekent dat φ *afleidbaar* is uit Γ: er bestaat een ND-afleiding van φ met Γ als de verzameling premisses.

Dit roept natuurlijk de vraag op hoe deze twee begrippen zich tot elkaar verhouden. Een belangrijk resultaat uit de Logica stelt dat voor de propositielogica, semantisch gevolg *precies hetzelfde* is als deze afleidbaarheidsrelatie:

Stelling 4.9 (Correctheid en Volledigheid voor de Propositielogica) *Als Γ een verzameling formules is, en φ een formule, dan geldt:*

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ dan en slechts dan als } \Gamma \models \varphi.$$

Beide richtingen van deze stelling hebben een eigen naam:

correctheid '$\Gamma \vdash \varphi$ impliceert $\Gamma \models \varphi$'
afleidbare gevolgtrekkingen zijn semantisch geldig;

volledigheid '$\Gamma \models \varphi$ impliceert $\Gamma \vdash \varphi$'
voor elke semantisch geldige gevolgtrekking bestaat een bewijs.

Deze twee begrippen, Correctheid en Volledigheid, zijn van fundamenteel belang in de Logica. In veel gevallen is de semantische gevolgtrekkingsrelatie gegeven, en is het de uitdaging om een correct en volledig afleidingssysteem te vinden. Dit is zelden eenvoudig, en soms zelfs onmogelijk. Stelling 4.9, die we in Hoofdstuk 6 zullen bewijzen, zegt dus dat er althans voor de propositielogica wel zo'n afleidingssysteem bestaat: natuurlijke deductie.

Een interessant gevolg van de bovenstaande stelling is de Compactheidsstelling.

Stelling 4.10 (Compactheid voor de Propositielogica) *Als Γ een verzameling formules is, en φ een formule, dan geldt:*

$$\textit{als } \Gamma \models \varphi \textit{ dan heeft } \Gamma \textit{ een eindige deelverzameling } \Gamma' \textit{ zó dat } \Gamma' \models \varphi.$$

Bewijs. Stel dat $\Gamma \models \varphi$. Wegens volledigheid geldt dan $\Gamma \vdash \varphi$, dat wil zeggen: er is een afleiding van φ uit Γ. Omdat afleidingen eindige rijtjes formules zijn, kan deze afleiding slechts eindig veel formules uit Γ als premisse gebruiken. Γ heeft dus een eindige deelverzameling Γ' zó dat $\Gamma' \vdash \varphi$. Met behulp van de correctheidsstelling geldt dan dat $\Gamma' \models \varphi$. QED

In Hoofdstuk 5 geven we een direct bewijs van Stelling 4.10 (dat wil zeggen: zonder de correctheid en volledigheid van natuurlijke deductie te gebruiken).

4.5 Opgaven

Opgave 4.1 Geef ND-afleidingen voor de volgende beweringen:

a. $p \to (q \to r) \vdash q \to (p \to r)$;

b. $p \vdash \neg\neg p$;

c. $\vdash p \to p$;

d. $\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$.

Opgave 4.2 Geef ND-afleidingen voor de volgende beweringen:

a. $\bot \vdash p$;

b. $p \to r, q \to r \vdash (p \vee q) \to r$.

c. $\neg(p \to q) \vdash p$;

Opgave 4.3 Geef ND-afleidingen voor de volgende beweringen:

a. $q \vdash p \to q$;

b. $\neg(p \to q) \vdash \neg q$;

c. $p \wedge q \vdash \neg(p \to \neg q)$;

d. $(p \to q) \to q \vdash \neg p \to q$.

Opgave 4.4 Geef ND-afleidingen voor de wetten van de Morgan:

a. $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$;

b. $\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$;

c. $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$;

d. $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$.

Opgave 4.5 Stel dat $\varphi \vdash \psi$. Geldt dan $\neg\psi \vdash \neg\varphi$?

Opgave 4.6 Laat zien dat $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ dan en slechts dan als $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

Opgave 4.7 Geef eliminatie- en introductieregels voor het equivalentie-connectief $\leftrightarrow$.

Opgave 4.8 (*) Is de dubbele negatieregel *nodig*? Of is het juist zo dat er, als $\Gamma \vdash \varphi$, altijd een afleiding te vinden is die de regel ($\neg\neg$E) niet gebruikt?

5 Compactheid

Twee equivalente formuleringen

Er zijn twee verschillende (maar equivalente) versies van de Compactheidsstelling.

Stelling 5.1 (Compactheid) *Laat* Γ *een verzameling propositionele formules zijn, en* φ *een formule. Als* $\Gamma \models \varphi$ *dan is er een eindige verzameling* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ *zó dat* $\Gamma_0 \models \varphi$*.*

Definitie 5.2 Een verzameling formules Γ heet *vervulbaar* als Γ een model heeft, en *eindig vervulbaar* als elke eindige deelverzameling van Γ vervulbaar is. $\lhd$

Stelling 5.3 (Compactheid) *Elke eindig vervulbare verzameling formules is vervulbaar.*

Propositie 5.4 *De beweringen in Stelling 5.1 en Stelling 5.3 zijn equivalent.*

Bewijs. Neem eerst aan dat de bewering in Stelling 5.1 waar is, en laat Δ een eindig vervulbare verzameling formules zijn. Stel dat Δ niet vervulbaar is, dan geldt dus $\Delta \models \bot$. Wegens (de bewering in) Stelling 5.1 is er dan dus een eindige $\Delta_0 \subseteq \Delta$ zó dat $\Delta_0 \models \bot$. Maar dan is deze Δ_0 onvervulbaar, wat in tegenspraak is met de aanname.

Voor de tegenovergestelde implicatie nemen we aan dat Stelling 5.3 waar is. Stel nu dat Γ een verzameling propositionele formules zijn, en φ een semantisch gevolg van Γ. Dan is de verzameling $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ onvervulbaar, zodat er wegens de aanname een eindige deelverzameling $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ is zó dat $\Gamma_0 \cup \{\neg\varphi\}$ onvervulbaar is. Maar dan geldt dat $\Gamma_0 \models \varphi$. QED

Ons doel is nu om Stelling 5.3 (en daarmee Stelling 5.1) te bewijzen.

König's Lemma

Ons bewijs maakt gebruik van een bekend combinatorisch principe, *König's Lemma.*

Definitie 5.5 Een *boom* is een samenhangende, cykelvrije, gerichte graaf waarvan precies één knoop, de *wortel* van de boom, geen *voorgangers* heeft, terwijl elke andere knoop precies één voorganger heeft. Een boom is *eindig vertakkend* als elke knoop slechts eindig veel kinderen (dat wil zeggen directe opvolgers) heeft. $\lhd$

Het is niet moeilijk om te laten zien dat vanuit de wortel van een boom er een uniek pad bestaat naar elke willekeurige knoop van de boom.

Stelling 5.6 (König's Lemma) *Als* $\mathbb{T} = (T, E)$ *een oneindige, eindig vertakkende boom is dan heeft* $\mathbb{T}$ *een oneindig pad.*

Bewijs. Omdat $\mathbb{T} = (T, E)$ oneindig is, heeft de wortel r oneindig veel opvolgers.

Beschouw nu een willekeurige knoop s in $\mathbb{T}$ met oneindig veel opvolgers. Omdat s slechts eindig veel kinderen heeft, moet op grond van het duiventilprincipe minstens één kind van s zelf ook oneindig veel opvolgers hebben.

Op basis van deze twee observaties is het eenvoudig om met inductie een oneindig pad $s_0 E s_1 E s_2 E \ldots$ in de boom te vinden (met $s_0 = r$). QED

Bewijs van Stelling 5.3

Stelling 5.3.

Om deze stelling te bewijzen, moeten we iets preciezer zijn over de verzameling propositieletters en de bijbehorende valuaties. We nemen aan dat $Q = \{p_0, p_1, \ldots\}$ de verzameling van alle propositieletters is, en definiëren Q_n als de verzameling $Q_n := \{p_i \in Q \mid i < n\}$ van de eerste n propositieletters. De verzameling van formules die alleen van de propositieletters in Q_n gebruik mogen maken, geven we aan met $For(Q_n)$.

Een n-valuatie is een valuatie $V : Q_n \to \{0,1\}$. (U kunt aan een n-valuatie denken als een rijtje nullen ('onwaar') en enen ('waar') van lengte n.) De *beperking* van een n-valuatie V tot Q_k (waarbij $k \leq n$) is de valuatie $V{\restriction_k} : Q_k \to \{0,1\}$ die gedefinieerd wordt door $V{\restriction_k}\ (p_i) := V(p_i)$, voor elke $i < k$. Omgekeerd noemen we in dit geval V een *uitbreiding* van $V{\restriction_k}$. We schrijven $V \leq V'$ als V een beperking is van V'.

Stel nu dat Γ een eindig vervulbare verzameling formules is. Als Γ eindig is volgt onmiddellijk dat Γ zelf vervulbaar is en zijn we direct klaar. Neem dus aan dat Γ oneindig is, zeg $\Gamma = \{\gamma_0, \gamma_1, \ldots\}$. Definieer $\Gamma_n := \{\gamma_i \in \Gamma \mid i < n \text{ en } \gamma_i \in For(Q_n)\}$; deze verzameling bestaat dus uit die formules in $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}$ waarin alleen de propositieletters $p_0, \ldots, p_{n-1}$ mogen voorkomen.

Definitie 5.7 We noemen een n-valuatie V *goed* als V een model is voor Γ_n. ◁

Lemma 5.8 *Als V een goede n-valuatie is, dan is $V{\restriction_k}$ een goede k-valuatie, voor elke $k < n$.*

Opgave 5.1 Bewijs dit lemma.

Lemma 5.9 *Er zijn oneindig veel goede valuaties.*

Opgave 5.2 Bewijs dit lemma.

Om König's Lemma toe te passen, definiëren we de volgende boom $\mathbb{T} = (T, E)$. Voor T nemen we de verzameling van goede valuaties, en we definiëren de relatie $E \subseteq T \times T$ als volgt: $(V, V') \in E$ precies als, voor zekere k, V en V' respectievelijk een k-valuatie en een $(k+1)$-valuatie zijn zó dat $V \leq V'$.

Lemma 5.10 $\mathbb{T}$ *is een oneindige, eindig vertakkende boom.*

Opgave 5.3 Bewijs dit lemma.

Uit König's Lemma volgt nu dat er een oneindig pad door $\mathbb{T}$ loopt, bestaande uit valuaties $V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \ldots$. Definieer nu de valuatie $V_\infty : Q \to \{0,1\}$ door middel van

$$V_\infty(p_k) := V_{k+1}(p_k),$$

dat wil zeggen: om een waarheidswaarde aan p_k toe te kennen, kijkt V_∞ naar de eerste valuatie in het rijtje die een waarheidswaarde aan p_k toekent, en dat is V_{k+1}.

Lemma 5.11 *V_∞ is een model voor Γ.*

Bewijs. Merk om te beginnen op dat $V_n \leq V_\infty$, voor alle n. Dat betekent dat V_∞ overeenstemt met elke V_n, waar gedefinieerd.

Beschouw nu een willekeurige formule in Γ, zeg γ_n. Let k voldoende groot zijn zó dat $k \geq n$ en $\gamma_n \in For(Q_k)$. Nu geldt dat V_k een model is voor γ_n (waarom?), en omdat V_k en V_∞ overeenstemmen over de verzameling propositieletters in γ_k, is V_∞ dus ook een model voor $\gamma_k = \gamma$.

Omdat γ een willekeurige formule in Γ was, is V_∞ dus een model voor elke formule in Γ, en daarmee (per definitie) een model voor Γ. QED

Hiermee is het bewijs van Stelling 5.3 voltooid.

6 Correctheid & Volledigheid

In het laatste hoofdstuk over de propositielogica bewijzen we de Correctheid- en Volledigheidsstelling:

Stelling 6.1 *Laat Γ een verzameling propositionele formules zijn, en φ een formule. Dan geldt:*

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ dan en slechts dan als } \Gamma \models \varphi. \tag{1}$$

We zullen beide richtingen van deze stelling apart bewijzen, in de Proposities 6.2 en 6.10 hieronder; daarna zullen we laten zien hoe de Compactheidsstelling kan worden afgeleid uit de combinatie van correctheid en volledigheid. Net als bij deze laatste stelling is het handig om de verzameling propositieletters vast te leggen: $Q := \{p_0, p_1, \ldots\}$.

6.1 Volledigheid

We beginnen met de *volledigheid* van de natuurlijke deductie, dat wil zeggen, de richting '$\Leftarrow$' van (1). Ons bewijs verloopt, zoals gebruikelijk bij volledigheidsbewijzen, met contrapositie; om precies te zijn, zullen we de volgende bewering bewijzen:

Propositie 6.2 *Laat Γ een verzameling propositionele formules zijn, en φ een formule.*

$$\text{Als } \Gamma \nvdash \varphi \text{ dan } \Gamma \not\models \varphi. \tag{2}$$

In het bewijs speelt het begrip *maximaal consistente verzameling* of *MCV* een sleutelrol.

Definitie 6.3 Een verzameling formules Γ heet *consistent* als $\Gamma \nvdash \bot$, en *maximaal consistent (met betrekking tot Q)* als Γ consistent is, maar deze consistentie verliest zodra we nieuwe Q-formules aan Γ toevoegen. Preciezer geformuleerd: een consistente verzameling Γ is maximaal consistent als elke verzameling Δ van Q-formules die Γ als echte deelverzameling heeft, inconsistent is. $\lhd$

Merk op deze definitie gebruik maakt van het feit dat we de verzameling Q van propositieletters hebben vastgelegd.

Lemma 6.4 *Laat Γ een verzameling formules zijn, en φ een formule. Dan geldt*

$$\Gamma \nvdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ is consistent.} \tag{3}$$

$$\Gamma \nvdash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\} \text{ is consistent.} \tag{4}$$

Bewijs. (3,$\Rightarrow$) Stel dat de verzameling $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ juist inconsistent is, dat wil zeggen: $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$. Er is dus een afleiding $\mathcal{D}$ met premissen in $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ en resultaat $\bot$. Het is niet moeilijk om deze afleiding te transformeren tot een afleiding $\mathcal{D}'$ met premissen Γ en resultaat φ: begin met het opsommen van alle formules in Γ als premissen; start dan een deelbewijs met $\neg\varphi$ als hypothese, en kopieer $\mathcal{D}$ in dit subbewijs, met dien verstande dat elk vóórkomen van $\neg\varphi$ of een $\gamma \in \Gamma$ als premisse in $\mathcal{D}$ nu met de herhalingsregel wordt verkregen; verlaat ten slotte dit subbewijs met de regel $\neg$I, en met één toepassing van de eliminatie van dubbele negatie verkrijgen we φ als resultaat van $\mathcal{D}'$. Maar dan geldt dus $\Gamma \vdash \varphi$.

(3,$\Leftarrow$) Als $\Gamma \vdash \varphi$, dan is het niet moeilijk om in te zien dat $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot$.

Opgave 6.1 Bewijs (4).

QED

Opgave 6.2 Laat Γ een consistente verzameling formules zijn, en φ een formule. Laat zien dat tenminste één van de verzamelingen $\Gamma \cup \{\varphi\}$ en $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ ook consistent is.

Lemma 6.5 *Laat Γ een maximaal consistente verzameling formules zijn, en φ een formule. Dan geldt*

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \varphi \in \Gamma. \tag{5}$$

Opgave 6.3 Bewijs dit lemma.

Maximaal consistente verzamelingen hebben een aantal aantrekkelijke eigenschappen.

Lemma 6.6 (Decompositielemma) *Voor elke maximaal consistente verzameling Γ geldt:*

1. $\bot \notin \Gamma$,
2. $\neg\varphi \in \Gamma \iff \varphi \notin \Gamma$,
3. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma \iff \varphi \in \Gamma$ *en* $\psi \in \Gamma$,
4. $\varphi \vee \psi \in \Gamma \iff \varphi \in \Gamma$ *of* $\psi \in \Gamma$,
5. $\varphi \to \psi \in \Gamma \iff \varphi \notin \Gamma$ *of* $\psi \in \Gamma$.

Opgave 6.4 Bewijs dit lemma. Welke eigenschappen volgen al uit de consistentie van Γ?

Het volgende lemma zegt dat elke consistente verzameling formules kan worden uitgebreid tot een MCV.

Lemma 6.7 (Lindenbaum Lemma) *Voor elke consistente verzameling formules Γ is er een maximaal consistente verzameling $\Delta \supseteq \Gamma$.*

Bewijs. Laat $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ een opsomming zijn van alle Q-formules. (Waarom bestaat er zo'n opsomming?) Laat Γ een consistente verzameling formules zijn, en definieer inductief

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_0 & := & \Gamma \\ \Gamma_{n+1} & := & \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{als } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ consistent is,} \\ \Gamma_n & \text{anders.} \end{cases} \end{array}$$

Opgave 6.5 a. Laat inductief zien dat elke Γ_n consistent is.

b. Concludeer dat $\Delta := \bigcup_n \Gamma_n$ ook consistent is.

Ten slotte, om te laten zien dat Δ *maximaal* consistent is, nemen we een willekeurige formule φ die *geen* element van Δ is. We moeten laten zien dat $\Delta \cup \{\varphi\}$ inconsistent is.

De formule φ komt ergens voor in de opsomming van alle Q-formules, zeg als de formule $\varphi = \varphi_n$. Wegens $\varphi_n \notin \Delta$ en $\Gamma_{n+1} \subseteq \Delta$ is φ_n géén element van Γ_{n+1}; per definitie van Γ_{n+1} geldt dan dat $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ inconsistent is. Omdat $\Gamma_n \subseteq \Delta$ is dan ook $\Delta \cup \{\varphi_n\}$ inconsistent, precies wat we moesten bewijzen. QED

Lemma 6.8 (Vervulbaarheidslemma) *Elke maximaal consistente verzameling is vervulbaar.*

Bewijs. Gegeven een MCV Γ, definieer de valuatie $V_\Gamma : Q \to \{0,1\}$ als volgt:

$$V_\Gamma(p) := \begin{cases} 1 & \text{als } p \in \Gamma \\ 0 & \text{als } p \notin \Gamma \end{cases}$$

We kunnen laten zien dat voor alle formules φ geldt:

$$\varphi \in \Gamma \iff V_\Gamma \text{ maakt } \varphi \text{ waar.} \tag{6}$$

Opgave 6.6 Bewijs dit.

Uit (6) volgt dat V_Γ een model is voor de verzameling Γ, die daarmee inderdaad vervulbaar is. QED

We hebben nu voldoende materiaal om de volledigheid van natuurlijke deductie te bewijzen.

Bewijs van Propositie 6.2.

$$\begin{array}{llr} \Gamma \nvdash \varphi & \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ consistent} & \text{(Lemma 6.4(3))} \\ & \Rightarrow \text{ er is een MCV } \Delta \supseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\} & \text{(Lindenbaum Lemma)} \\ & \Rightarrow \text{ er is een vervulbare verzameling } \Delta \supseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\} & \text{(Vervulbaarheidslemma)} \\ & \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ is vervulbaar} & \text{(direct uit definitie)} \\ & \Rightarrow \Gamma \not\models \varphi. & \text{(direct uit definitie)} \end{array}$$

QED

6.2 Correctheid

Ten slotte bewijzen we de *correctheid* van de natuurlijke deductie, dat wil zeggen, de richting '$\Rightarrow$' van (1). We hebben de volgende definities nodig.

Definitie 6.9 Voor een gegeven afleiding $\mathcal{D}$ definiëren we $\Pi_\mathcal{D}$ als de verzameling premissen van $\mathcal{D}$, en $\chi_\mathcal{D}$ als het resultaat; de formule $\chi_\mathcal{D}$ is dus de laatste formule in het rijtje van $\mathcal{D}$. De *lengte* $|\mathcal{D}|$ van $\mathcal{D}$ is het aantal formules in $\mathcal{D}$. $\lhd$

We kunnen nu de correctheidsstelling als volgt formuleren:

Propositie 6.10 *Voor elke ND-afleiding $\mathcal{D}$ geldt dat*

$$\Pi_\mathcal{D} \models \chi_\mathcal{D}. \tag{7}$$

Opgave 6.7 Waarom is dit voldoende om correctheid van natuurlijke deductie te bewijzen?

We bewijzen Propositie 6.10 met natuurlijke inductie naar $|\mathcal{D}|$.

Basisstap: $\mathcal{D}$ is een afleiding van lengte 1.
Dat betekent dat er een formule φ is zo dat $\Pi_{\mathcal{D}} = \{\varphi\}$ en $\chi_{\mathcal{D}} = \varphi$. Maar dan volgt (7) onmiddellijk uit het feit dat $\{\varphi\} \models \varphi$.

Inductiestap: $\mathcal{D}$ is een afleiding van lengte $k > 1$, zeg $\mathcal{D} = \varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_k$, waarbij $\varphi_k = \chi_{\mathcal{D}}$. De *inductiehypothese* (IH) stelt dat $\Pi_{\mathcal{D}'} \models \chi_{\mathcal{D}'}$ voor elke afleiding $\mathcal{D}'$ die korter is dan $\mathcal{D}$.

Om te laten zien dat (7) geldt voor $\mathcal{D}$ zelf, maken we een gevalsonderscheiding met betrekking tot de *laatst toegepaste regel* in $\mathcal{D}$ (dat wil zeggen, de regel die φ_k opleverde):

$\boxed{\mathbf{E}\!\rightarrow}$ In dit geval zijn er twee formules in $\mathcal{D}$, van de vorm $\varphi_i = \varphi \to \chi_{\mathcal{D}}$ en $\varphi_j = \varphi$, met $i \neq j < k$. We veronderstellen dat $i < j$ (het andere geval verloopt analoog). $\mathcal{D}$ ziet er dus als volgt uit:

$$\begin{array}{c|ll}
\vdots & \vdots & \\
i & \varphi \to \chi_{\mathcal{D}} & \\
\vdots & \vdots & \\
j & \varphi & \\
\vdots & \vdots & \\
k & \chi_{\mathcal{D}} & \to\text{E}, i, j
\end{array}$$

Met behulp van de inductiehypothese valt gemakkelijk in te zien dat $\Pi_{\mathcal{D}} \models \varphi \to \chi_{\mathcal{D}}$ en $\Pi_{\mathcal{D}} \models \varphi$ (hoe precies?). Maar uit $\Pi_{\mathcal{D}} \models \varphi \to \chi_{\mathcal{D}}$ en $\Pi_{\mathcal{D}} \models \varphi$ volgt onmiddellijk dat $\Pi_{\mathcal{D}} \models \chi_{\mathcal{D}}$.

$\boxed{\mathbf{I}\!\rightarrow}$ Als I$\to$ de laatste toegepaste regel van de afleiding $\mathcal{D}$ is, dan is het resultaat $\chi_{\mathcal{D}} = \varphi_k$ van $\mathcal{D}$ een implicatie, zeg $\chi_{\mathcal{D}} = \varphi \to \psi$, en bevat $\mathcal{D}$ een subafleiding, zeg $\varphi_m \ldots \varphi_n$, waarvan φ de hypothese is (dus $\varphi = \varphi_m$), en ψ het resultaat (dus $\psi = \varphi_n$):

$$\begin{array}{c|ll}
1 & \varphi_1 & \\
\vdots & \vdots & \\
m & \quad \begin{array}{|l}\varphi \\ \hline \end{array} & \text{(H)} \\
\vdots & \quad \begin{array}{|l}\vdots\end{array} & \\
n & \quad \begin{array}{|l}\psi\end{array} & \\
\vdots & \vdots & \\
k & \varphi \to \psi & \to\text{I}, m\text{–}n
\end{array}$$

Transformeer $\mathcal{D}$ nu tot een andere afleiding door het rijtje $\varphi_m \ldots \varphi_n$ niet meer als deelbewijs te zien maar als deel van het hoofdbewijs. Daarmee is $\varphi = \varphi_m$ niet langer een hypothese, maar een extra premisse. Noem $\mathcal{D}'$ het zo ontstane rijtje formules $\varphi_1 \cdots \varphi_n$:

$$\begin{array}{l|ll} 1 & \varphi_1 & \\ \vdots & \vdots & \\ m & \varphi & \qquad \text{(P)} \\ \vdots & \vdots & \\ n & \psi & \end{array}$$

Het is niet moeilijk in te zien dat $\mathcal{D}'$ een correcte ND-afleiding is, met $\chi_{\mathcal{D}'} = \varphi_n = \psi$. Volgens de inductiehypothese geldt dus dat $\Pi_{\mathcal{D}'} \models \psi$, en omdat $\Pi_{\mathcal{D}'} \subseteq \Pi_{\mathcal{D}} \cup \{\varphi\}$ (waarom?) mogen we dus concluderen dat $\Pi_{\mathcal{D}} \cup \{\varphi\} \models \psi$. Hieruit volgt dat $\Pi_{\mathcal{D}} \models \varphi \to \psi$ (zie Opgave 3.4).

Opgave 6.8 a. Doe zelf de gevallen $E\wedge$, $I\wedge$ en $I\vee$.

b. Doe zelf de overige gevallen.

6.3 Compactheid

Als een niet-triviaal gevold van de Correctheids- en de Volledigheidsstelling kunnen we de Compactheidsstelling (in de versie van Stelling 5.1) afleiden.

Bewijs van Stelling 5.1. Stel dat $\Gamma \models \varphi$. Dan geldt wegens de Volledigheidsstelling dat $\Gamma \vdash \varphi$, dat wil zeggen: er is een afleiding $\mathcal{D}$ van φ uit Γ. De cruciale observatie is nu dat afleidingen *eindige objecten* zijn. In het bijzonder geldt dat $\mathcal{D}$ slechts eindig veel premissen uit Γ gebruikt. Laat $\Gamma' \subseteq \Gamma$ de verzameling van premissen zijn die worden gebruikt in $\mathcal{D}$. Dan is φ dus afleidbaar uit Γ', en op grond van de Correctheidsstelling mogen we uit $\Gamma' \vdash \varphi$ concluderen dat $\Gamma' \models \varphi$. QED

Deel II
Predicatenlogica

7 Taal van de predicatenlogica

7.1 Predicatenlogica, modellen en programma's

▶ Hoofdstuk 4 uit *Logica in Actie*[4]

7.2 Termen en formules

Definitie 7.1 Gegeven is een verzameling $\mathcal{F}$ van *functiesymbolen*; we nemen aan dat elk functiesymbool f een vaste *ariteit* $ar(f) \in \mathbb{N}$ heeft. Als $ar(f) = n$ zeggen we dat f een *n-plaatsig* functiesymbool is. Functiesymbolen van ariteit nul noemen we ook wel *constantes*.

Bij een verzameling X van individuele variabelen kunnen we nu *inductief* de verzameling $Ter_{\mathcal{F}}(X)$ van *$\mathcal{F}$-termen over X* definiëren:

1. alle variabelen in X en constantes in $\mathcal{F}$ zijn $\mathcal{F}$-termen over X;

2. als $t_1, ..., t_n$ $\mathcal{F}$-termen over X zijn, en f is een n-plaatsig functiesymbool, dan is $f(t_1, ..., t_n)$ ook een $\mathcal{F}$-term over X;

Meestal maken we ons niet druk over de verzameling X van variabelen, en vaak ligt de verzameling $\mathcal{F}$ van functiesymbolen vast; we schrijven dan ook meestal *Ter* in plaats van $Ter_{\mathcal{F}}(X)$. $\lhd$

Voorbeelden van termen zijn $+(x, y)$, $+(S(x), S(S(y)))$, $+(0, S(0))$, etc. Hier is $+$ een functiesymbool van ariteit twee, S een symbool van ariteit één, en 0 een constante (of symbool van ariteit nul). In veel gevallen gebruiken we gewoon infixnotatie, en laten we overbodige haakjes weg — de bovenstaande termen kunnen worden gerepresenteerd als respectievelijk $x + y$, $Sx + SSy$, en $0 + S0$.

Definitie 7.2 Gegeven is nu ook een verzameling $\mathcal{R}$ van *predicaatletters* of *relatiesymbolen*, elk van een vaste ariteit. Het paar $(\mathcal{F}, \mathcal{R})$ wordt soms een *predicaatlogische taal* genoemd.

De verzameling *formules* $For_{\mathcal{F},\mathcal{R}}$ over deze taal wordt als volgt gedefinieerd:

1. als $t_1, ..., t_n$ termen zijn, en R is een n-plaatsig relatiesymbool, dan is $R(t_1, ..., t_n)$ een atomaire formule; als t_1 en t_2 termen zijn, dan is $t_1 = t_2$ een atomaire formule;

2. als φ en ψ formules zijn, dan zijn ook $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ en $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ formules;

3. als φ een formule is en x een variabele, dan zijn ook $\forall x\, \varphi$ en $\exists x\, \varphi$ formules.

In sommige gevallen kijken we naar de predicaatlogica *zonder identiteit*: in dat geval zijn atomaire formules van de vorm $t_1 = t_2$ niet toegestaan. $\lhd$

[4]zie `https://www.ou.nl/Docs/Spinoza/Benthem/LIA_eBook.pdf` .

7.3 Syntactische begrippen

Een maat voor de complexiteit van een predicaatlogische formule is het begrip *kwantordiepte*.

Definitie 7.3 De *kwantordiepte* $q(\varphi)$ van een formule φ uit de predicatenlogica wordt inductief als volgt gedefinieerd:

$$\begin{array}{lcll} q(\varphi) & := & 0 & \text{als } \varphi \text{ een atomaire formule is,} \\ q(\neg\varphi) & := & q(\varphi), & \\ q(\varphi \odot \psi) & := & \max(q(\varphi), q(\psi)) & \text{voor } \odot \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \\ q(Q\varphi) & := & 1 + q(\varphi) & \text{voor } Q \in \{\exists, \forall\} \end{array}$$

Als voor twee gegeven structuren $\mathbb{M}$ en $\mathbb{M}'$ geldt dat $\mathbb{M} \models \varphi \iff \mathbb{M}' \models \varphi$, voor elke φ met $q(\varphi) \leq n$, dan noemen we $\mathbb{M}$ en $\mathbb{M}'$ *n-equivalent*, notatie: $\mathbb{M} \equiv_n \mathbb{M}'$. $\lhd$

Om twee voorbeelden te geven: de formule $\forall x \forall y\, (Rxy \rightarrow \exists z(Rxz \wedge Rzy))$ heeft kwantordiepte 3, terwijl $q\big(\forall x(\exists y Rxy \rightarrow \exists z Rzx)\big) = 2$.

Definitie 7.4 Een voorkomen van een variabele x in een formule heet *vrij* als dit voorkomen niet in het bereik van een kwantor $\forall x$ of $\exists x$ ligt (de kwantorvariabelen zelf tellen we hier niet mee). Als we uit de formule φ de formule $\forall x\, \varphi$ (of $\exists x\, \varphi$) vormen, dan *bindt* de kwantor $\forall x$ of $\exists x$ alle voorkomens van de variabele x in φ, tenminste, voor zover die nog vrij waren. $\lhd$

De verzamelingen vrije en gebonden variabelen van een formule kunnen ook inductief gedefinieerd worden.

Definitie 7.5 We definiëren eerst (met inductie naar de complexiteit van termen) de verzameling $V(t)$ van variabelen in een term t:

$$\begin{array}{rcl} V(x) & := & \{x\} \\ V(c) & := & \varnothing \\ V(f(t_1, \ldots, t_n)) & := & V(t_1) \cup \cdots \cup V(t_n) \end{array}$$

Op basis hiervan kunnen we de verzameling $VV(\varphi)$ van vrije variabelen van een formule φ definiëren:

$$\begin{array}{lcll} VV(R(t_1, \ldots, t_n)) & := & V(t_1) \cup \cdots \cup V(t_n) & \\ VV(t_1 = t_2) & := & V(t_1) \cup V(t_2) & \\ VV(\neg\varphi) & := & VV(\varphi) & \\ VV(\varphi_1 \heartsuit \varphi_2) & := & VV(\varphi_1) \cup VV(\varphi_2) & \text{voor elk connectief } \heartsuit \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \\ VV(\forall x\, \varphi) & := & VV(\varphi) \setminus \{x\} & \\ VV(\exists x\, \varphi) & := & VV(\varphi) \setminus \{x\} & \end{array}$$

Een formule zonder vrije variabelen heet een *gesloten* formule of een *zin*. $\lhd$

In de huiswerkopgaven wordt u gevraagd om een inductieve definitie te geven van de verzameling $BV(\varphi)$ van *gebonden* variabelen van een formule φ. Hier is een aantal voorbeelden:

Voorbeeld 7.6 In de formule $Af(x) \wedge \exists y\, Rxf(f(y))$ zijn alle voorkomens van x vrij, en het enige voorkomen van y is gebonden door de kwantor $\exists y$. We vinden dus $VV(Af(x) \wedge \exists y\, Rxf(f(y))) = \{x\}$, en $BV(Af(x) \wedge \exists y\, Rxf(f(y))) = \{y\}$.

In de formule $Af(x) \wedge \exists x\, Rxf(f(y))$ komt de variabele x zowel vrij (de x in $Af(x)$) als gebonden (de x in $Rxf(f(y))$) voor. Nu zien we dus dat $VV(Af(x) \wedge \exists x\, Rxf(f(y))) = \{x, y\}$, en $BV(Af(x) \wedge \exists x\, Rxf(f(y))) = \{x\}$.

Definitie 7.7 Gegeven een term t en een variabele x, definiëren we de *substitutie* $[t/x]$ als de operatie die in een term of een formule alle vrije voorkomens van x vervangt door t. $\lhd$

Voorbeeld 7.8 Beschouw de substitutie $[g(z,c)/x]$: deze transformeert de term $f(x)$ tot $f(g(z,c))$, de formule $Af(x) \wedge \exists y\, Rxf(f(y))$ tot $Af(g(z,c)) \wedge \exists y\, Rg(z,c)f(f(y))$, en de formule $Af(x) \wedge \exists x\, Rxf(f(y))$ tot $Af(g(z,c)) \wedge \exists x\, Rxf(f(y))$.

Voorbeeld 7.9 Misschien een wat onverwacht voorbeeld is dat, uitgevoerd op de formule $\exists y\, Rxy$, de substitutie $[y/x]$ de formule $\exists y\, Ryy$ oplevert. Intuïtief geeft dit niet het juiste resultaat: stel dat we Rxy interpreteren als 'x kent y', dan zegt de formule $\exists y\, Rxy$ dat x iemand kent. Je verwacht dan dat de substitutie $[y/x]$ een formule oplevert die betekent dat y iemand kent, maar de formule $\exists y\, Ryy$ betekent iets heel anders, namelijk dat er iemand is die *zichzelf* kent. Het probleem is natuurlijk dat de variabele y dezelfde is die al gebruikt werd voor de kwantificatie.

Definitie 7.10 Een term t heet *vrij voor* een variabele x in een formule φ, als in de formule $[t/x]\varphi$ geen variabele van t, in een gesubstitueerd voorkomen, gebonden raakt. $\lhd$

Voorbeeld 7.11 De term $f(y,z)$ is niet vrij voor x in de formule $\exists y\, Rxy$, maar de term $f(x,z)$ wel.

In de praktijk zijn substitutieproblemen altijd op te lossen met behulp van zogenaamde *alfabetische varianten*. Een alfabetische variant van een formule wordt verkregen door *gebonden* variabelen door nieuwe te vervangen. Bijvoorbeeld, bij de alfabetische variant $\exists z\, Rxz$ van de formule $\exists y\, Rxy$ treedt het probleem van Voorbeeld 7.9 niet op: de substitutie $[y/x]$ levert de formule $\exists z\, Ryz$ op, die inderdaad betekent dat y iemand kent.

7.4 Opgaven

Opgave 7.1 Vertaal de volgende zinnen in de predicatenlogica. Gebruik daarbij de volgende vertaalsleutel:

a	$\sim$	Anna
b	$\sim$	Bouke
Mx	$\sim$	x is een man
Nx	$\sim$	x is Nederlander
Rx	$\sim$	x is rijk
Gxy	$\sim$	x is getrouwd met y
Kxy	$\sim$	x is een kind van y

a. Anna heeft een buitenlandse man.

b. Anna heeft een zuster.

c. Alle Nederlanders zijn rijk.

d. Alle Nederlandse kinderen van Bouke zijn arm.

e. Alle dochters van Anna hebben kinderen.

f. Een grootvader van Bouke is getrouwd met een zuster van Anna.

Opgave 7.2 Geef de betekenis van de onderstaande zinnen en formules uit de predicatenlogica. Gebruik hierbij de voor de hand liggende vertaalsleutel.

a. $\forall x \exists y\, y \cdot y = x$;

b. $\forall x \forall y\, (x < y \to \exists z(x < z \wedge z < y))$;

c. $\exists x_1 \exists x_2\, (x_1 = x_1 \cdot x_1 \wedge x_2 = x_2 \cdot x_2 \wedge \neg x_1 = x_2 \wedge \forall x_3(x_3 = x_3 \cdot x_3 \to (x_3 = x_1 \vee x_3 = x_2)))$.

Geef van de bovenstaande formules aan of ze waar zijn in respectievelijk de structuren $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

Opgave 7.3 Vertaal de volgende zinnen in de predicatenlogica. Gebruik daarbij de volgende vertaalsleutel:

$Sx \sim x$ woont in Sneek,
$Fx \sim x$ spreekt Fries.

a. Minstens één persoon spreekt Fries.

b. Er wonen minstens twee mensen in Sneek.

c. Er wonen hoogstens twee mensen in Sneek.

d. Er wonen precies twee mensen in Sneek.

e. Er wonen precies twee mensen in Sneek die Fries spreken.

f. Er wonen precies twee mensen in Sneek, en die spreken allebei Fries.

g. Beide inwoners van Sneek spreken Fries.

Opgave 7.4 Vertaal de volgende zinnen in de predicatenlogica. Gebruik daarbij de vertaalsleutel van opgave 7.1.

a. Anna is de enige dochter van Bouke.

b. Anna heeft geen grootmoeder.

c. Anna heeft precies één zoon, en die is getrouwd met een zus van Bouke.

d. Anna heeft precies twee tantes.

e. Anna heeft precies twee kinderen, en die zijn allebei getrouwd met Bouke.

f. Alle grootouders hebben of alleen dochters, of precies twee zonen, of ze zijn kinderloos.

Opgave 7.5 Vertaal het vermoeden van Goldbach in de predicatenlogica. Gebruik hierbij de volgende vertaalsleutel (deze taal heeft dus geen relatiesymbolen, alleen functiesymbolen).

0	$\sim$	nul
$s(x)$	$\sim$	de opvolger van x
$a(x, y)$	$\sim$	de som van x en y
$m(x, y)$	$\sim$	het product van x en y

Opgave 7.6 Gegeven is de term $t = f(x, y, c)$. Bereken voor elk van de volgende formules $\varphi = \varphi_a, \ldots, \varphi_d$ de formule $[t/x]\varphi$, en geef aan of de term t vrij is voor x in φ.

a. $\varphi_a = Ax \wedge \exists x\, Rxy$

b. $\varphi_b = Ax \wedge \exists y\, Rxy$

c. $\varphi_c = Ax \wedge \exists x \exists y\, Rxy$

d. $\varphi_d = Ax \wedge \exists z\, Rxy$

Opgave 7.7 Geef een inductieve definitie van de verzameling $BV(\varphi)$ van de gebonden variabelen van een formule φ.

8 Semantiek

8.1 Structuren en betekenis

Structuren

Definitie 8.1 Een *structuur* voor een taal $(\mathcal{F}, \mathcal{R})$ is een paar $\mathbb{M} = (D, I)$, bestaande uit een niet-lege verzameling D, het *domein* van de structuur, en een functie I, de *interpretatiefunctie*. De functie I interpreteert elk n-plaatsig functie*symbool* als een 'echte' n-plaatsige *functie* $f^I : D^n \to D$. (In het speciale geval dat we het over een constante c hebben, beeldt de functie I het symbool c af op een element van D). De relatiesymbolen worden door I geïnterpreteerd als 'echte' relaties; dat wil zeggen: I beeldt elk n-plaatsig relatiesymbool af op een n-plaatsige relatie. $\lhd$

Voorbeeld 8.2 Stel dat we een taal voor de rekenkunde bekijken die als functiesymbolen heeft: 0 (constante), S (éénplaatsig) en $+$ (tweeplaatsig), en als enig relatiesymbool $<$ (tweeplaatsig).

In een voor de hand liggende interpretatie nemen we als domein de verzameling van de natuurlijke getallen, S interpreteren we als de opvolgerfunctie, $+$ als de optelling, en $<$ als de (strikte) kleiner-dan relatie. Formeel geeft dit de structuur $\mathbb{M}_0 = (N, I)$ met

$$\begin{aligned} N &= \text{de verzameling natuurlijke getallen} \\ 0^I &= \text{het getal nul} \\ S^I(n) &= \text{de opvolger van } n \\ +^I(m, n) &= \text{de som van } m \text{ en } n \\ <^I &= \{(m, n) \mid m \text{ is kleiner dan } n\}. \end{aligned}$$

We zouden net zo goed als domein de verzameling van alle gehele getallen kunnen nemen, S interpreteren als de voorgangerfunctie, $+$ interpreteren als vermenigvuldiging, en $<$ als de deler relatie (dat wil zeggen: $(z_1, z_2) \in <^I$ precies als deling van z_2 door z_1 een geheel getal oplevert). Dit levert de structuur $\mathbb{M}_1 = (Z, J)$ op met

$$\begin{aligned} Z &= \text{de verzameling gehele getallen} \\ 0^J &= \text{het getal dertien} \\ S^J(z) &= \text{de voorganger van } z \\ +^J(z_1, z_2) &= \text{het product van } z_1 \text{ en } z_2 \\ <^J &= \{(z_1, z_2) \mid z_1 \text{ is een deler van } z_2\}. \end{aligned}$$

Betekenis

Voordat we een precieze definitie kunnen geven van de *betekenis* van predicaatlogische formules in een structuur, hebben we nog één nieuw begrip nodig: *bedelingen*. Bedelingen kun je zien als een soort van tijdelijke, of 'hulp'-interpretaties. Het verschil tussen de interpretatie c^I van een constante en de bedeling $b(x)$ van een variabele is dat de interpretatie van een constante *vast ligt* in de structuur, terwijl de bedeling van de variabele kan *veranderen*. Met andere woorden: hier komt het verschil tussen constantes en variabelen expliciet naar voren.

Definitie 8.3 Een *bedeling* van een verzameling X van individuele variabelen in een structuur (D, I) is een functie $b : X \to D$. Gegeven een variabele $x \in X$ en een element $d \in D$, definiëren we de bedeling $b[x \mapsto d] : X \to D$ als volgt:

$$b[x \mapsto d](y) := \begin{cases} d & \text{als } y = x, \\ b(y) & \text{voor elke variabele } y \neq x. \end{cases}$$

$\triangleleft$

De bedeling $b[x \mapsto d]$ gedraagt zich dus precies als b voor variabelen verschillend van x, en beeldt x af op d.

Definitie 8.4 Gegeven een structuur $\mathbb{M}$ voor een taal $(\mathcal{F}, \mathcal{R})$, en een bedeling $b : X \to D$, definiëren we nu de *betekenis* $[\![t]\!]^{\mathbb{M},b}$ van een term $t \in Ter_{\mathcal{F}(X)}$ met behulp van de volgende inductie:

basisstap In het basisgeval is t een atomaire term; we onderscheiden twee gevallen:

$$[\![t]\!]^{\mathbb{M},b} := \begin{cases} c^I & \text{als } t \text{ de constante } c \text{ is,} \\ b(x) & \text{als } t \text{ de variabele } x \text{ is.} \end{cases}$$

inductiestap In het inductieve geval mogen we aannemen dat t van de vorm $f(t_1, ..., t_n)$ is voor zekere termen $t_1, ..., t_n$ waarvan we de betekenis al kennen. We definiëren nu

$$[\![t]\!]^{\mathbb{M},b} := f^I([\![t_1]\!]^{\mathbb{M},b}, ..., [\![t_n]\!]^{\mathbb{M},b}).$$

$\triangleleft$

Het komt er dus op neer dat de betekenis van variabelen gegeven wordt door de bedeling, die van constantes door de interpretatie, en die van samengestelde termen door 'uitrekenen'. Kortweg hadden we deze definitie ook als volgt kunnen geven:

$$\begin{aligned} [\![x]\!]^{\mathbb{M},b} &:= b(x) \\ [\![c]\!]^{\mathbb{M},b} &:= c^I \\ [\![f(t_1, ..., t_n)]\!]^{\mathbb{M},b} &:= f^I([\![t_1]\!]^{\mathbb{M},b}, ..., [\![t_n]\!]^{\mathbb{M},b}). \end{aligned}$$

Voorbeeld 8.5 Stel dat we in de structuur $\mathbb{M}_1$ van Voorbeeld 8.2 de betekenis van de term $S(x + 0)$ uitrekenen onder een bedeling b die de variabele x afbeeldt op het getal vijf. We vinden dan: $[\![x]\!]^{\mathbb{M},b} = 5$, $[\![0]\!]^{\mathbb{M},b} = 13$, dus $[\![x + 0]\!]^{\mathbb{M},b} = 65$ en $[\![S(x + 0)]\!]^{\mathbb{M},b} = 64$.

We kunnen nu inductief definiëren wanneer een formule φ *waar* is in een model $\mathbb{M}$ onder een bedeling b, notatie: $\mathbb{M}, b \models \varphi$.

Definitie 8.6 Gegeven is een taal $(\mathcal{F}, \mathcal{R})$. Met inductie naar de complexiteit van formules in deze taal definiëren we de *waarheidsrelatie* $\models$ tussen enerzijds een structuur $\mathbb{M}$ voor deze taal en bedelingen op $\mathbb{M}$, en anderzijds formules in deze taal:

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{M}, b \models R(t_1, ..., t_n) & \iff & ([\![t_1]\!]^{\mathbb{M},b}, ..., [\![t_n]\!]^{\mathbb{M},b}) \in R^I \\
\mathbb{M}, b \models t_1 = t_2 & \iff & [\![t_1]\!]^{\mathbb{M},b} = [\![t_2]\!]^{\mathbb{M},b} \\
\mathbb{M}, b \models \neg\varphi & \iff & \mathbb{M}, b \not\models \varphi \\
\mathbb{M}, b \models \varphi \wedge \psi & \iff & \mathbb{M}, b \models \varphi \text{ en } \mathbb{M}, b \models \psi \\
\text{etc.} & & \\
\mathbb{M}, b \models \forall x\, \varphi & \iff & \mathbb{M}, b[x \mapsto d] \models \varphi \text{ voor elke } d \in D \\
\mathbb{M}, b \models \exists x\, \varphi & \iff & \mathbb{M}, b[x \mapsto d] \models \varphi \text{ voor minstens één } d \in D
\end{array}$$

Als $\mathbb{M}, b \models \varphi$ zeggen we dat φ *waar is* in de structuur $\mathbb{M}$ onder de bedeling b. $\lhd$

De atomaire formule $t_1 = t_2$ is dus waar als de termen t_1 en t_2 hetzelfde betekenen, en om dat te bepalen hebben we (in principe) zowel de structuur als de bedeling nodig. Analoog is de formule $R(t_1, \ldots, t_n)$ waar precies als de objecten $[\![t_1]\!]^{\mathbb{M},b}, \ldots, [\![t_n]\!]^{\mathbb{M},b}$ in de 'echte' relatie R^I tot elkaar staan.

Opmerking 8.7 We hadden de bovenstaande definitie ook kunnen geven in de vorm van een functie $[\![\cdot]\!]^{\mathbb{M},b} : For_{\mathcal{F},\mathcal{R}} \to \{0, 1\}$, die de *betekenis* $[\![\varphi]\!]^{\mathbb{M},b} \in \{0, 1\}$ van een formule $\varphi \in For_{\mathcal{F},\mathcal{R}}$ geeft:

$$\begin{array}{rcl}
[\![R(t_1, ..., t_n)]\!]^{\mathbb{M},b} = 1 & \iff & ([\![t_1]\!]^{\mathbb{M},b}, ..., [\![t_n]\!]^{\mathbb{M},b}) \in R^I \\
[\![t_1 = t_2]\!]^{\mathbb{M},b} = 1 & \iff & [\![t_1]\!]^{\mathbb{M},b} = [\![t_2]\!]^{\mathbb{M},b} \\
[\![\neg\varphi]\!]^{\mathbb{M},b} & := & 1 - [\![\varphi]\!]^{\mathbb{M},b} \\
[\![\varphi \wedge \psi]\!]^{\mathbb{M},b} & := & \min([\![\varphi]\!]^{\mathbb{M},b}, [\![\psi]\!]^{\mathbb{M},b}) \\
[\![\varphi \vee \psi]\!]^{\mathbb{M},b} & := & \max([\![\varphi]\!]^{\mathbb{M},b}, [\![\psi]\!]^{\mathbb{M},b}) \\
\text{etc.} & & \\
[\![\forall x\, \varphi]\!]^{\mathbb{M},b} = 1 & := & \min\{[\![\varphi]\!]^{\mathbb{M},b[x \mapsto d]} \mid d \in D\} \\
[\![\exists x\, \varphi]\!]^{\mathbb{M},b} = 1 & := & \max\{[\![\varphi]\!]^{\mathbb{M},b[x \mapsto d]} \mid d \in D\}
\end{array}$$

We laten het aan de lezer om te laten zien dat het verband tussen deze twee definities is gelegen in het feit dat $\mathbb{M}, b \models \varphi \iff [\![\varphi]\!]^{\mathbb{M},b} = 1$ voor alle $\mathbb{M}, b$ en φ.

Voorbeeld 8.8 In Voorbeeld 8.2 geldt $\mathbb{M}_1, b \models S(x) < S(0)$ voor elke bedeling b zó dat $b(x)$ het getal vijf is: het getal vier is immers een deler van het getal twaalf.

Eindigheid

De volgende stelling wordt wel de *Eindigheidsstelling* genoemd. Hij zegt dat de betekenis van een formule alleen afhangt van de verzameling vrije variabelen in die formule.

Stelling 8.9 *Gegeven is een structuur $\mathbb{M} = (D, I)$ voor een predicaatlogische taal, een formule φ in die taal, en twee bedelingen, b en b'. Als $b(x) = b'(x)$ voor elke $x \in VV(\varphi)$, dan geldt*

$$\mathbb{M}, b \models \varphi \iff \mathbb{M}, b' \models \varphi.$$

Bewijs. Deze stelling kan worden bewezen met inductie naar de complexiteit van φ. QED

Als gevolg van deze stelling hoeven we niet heel precies te zijn over het *domein* van een bedeling: het is voldoende om de bedeling te definiëren voor de variabelen die er toe doen. In het bijzonder volgt dat de waarheid van *zinnen* helemaal niet afhangt van de bedeling.

Definitie 8.10 Een structuur $\mathbb{M}$ is een *model voor een zin* φ, notatie: $\mathbb{M} \models \varphi$, als $\mathbb{M}, b \models \varphi$ voor elke bedeling b (of, en dat is equivalent, als $\mathbb{M}, b \models \varphi$ voor een bedeling b). Een structuur is een *model voor een verzameling zinnen* als het een model is voor elke zin uit die verzameling. $\lhd$

8.2 Semantische begrippen in de predicatenlogica

Definitie 8.11 Een formule φ is een *geldig gevolg* van een verzameling formules Σ, notatie $\Sigma \models \varphi$, als voor elke structuur $\mathbb{M}$ en elke bedeling b geldt dat *als* elke formule in Σ waar is in $\mathbb{M}$ onder b, dan is ook φ waar in $\mathbb{M}$ onder b. In het geval Σ een singleton is, vereenvoudigen we de notatie: in plaats van $\{\sigma\} \models \varphi$ schrijven we meestal $\sigma \models \varphi$. $\lhd$

Nota bene: als Σ een verzameling *zinnen* is, en φ is ook een zin, dan doen bedelingen er niet toe, en geldt $\Sigma \models \varphi$ desda elk model voor Σ ook een model is voor φ.

Voorbeeld 8.12 Voor alle formules φ (en ψ) geldt:

$$\begin{array}{rcl} \{\forall x(\varphi \to \psi), \forall x\varphi\} & \models & \forall x\psi. \\ \{\exists x(\varphi \to \psi), \exists x\varphi\} & \not\models & \exists x\psi. \\ \varphi & \models & \exists x\varphi \\ \exists x \forall y\, \varphi & \models & \forall y \exists x\, \varphi. \\ \forall y \exists x\, \varphi & \not\models & \exists x \forall y\, \varphi. \end{array}$$

Definitie 8.13 Twee formules φ en ψ heten *equivalent*, notatie: $\varphi \equiv \psi$ als $\varphi \models \psi$ en $\psi \models \varphi$. $\lhd$

Voorbeeld 8.14 Voor alle formules φ (en ψ) geldt:

$$\begin{array}{rcl} \neg\exists x\, \varphi & \equiv & \forall x\, \neg\varphi \\ \neg\forall x\, \varphi & \equiv & \exists x\, \neg\varphi \\ \exists x\, (\varphi \vee \psi) & \equiv & \exists x\varphi \vee \exists x\psi \\ \forall x\, (\varphi \wedge \psi) & \equiv & \forall x\varphi \wedge \forall x\psi \end{array}$$

Maar het is bijvoorbeeld niet zo dat de formules $\forall x\, (\varphi \vee \psi)$ en $\forall x\, \varphi \vee \forall x\, \psi$ equivalent zijn, omdat

$$\forall x\, (\varphi \vee \psi) \not\models \forall x\varphi \vee \forall x\psi.$$

Neem bijvoorbeeld de structuur $\mathbb{M} = (D, I)$ waarbij D de verzameling natuurlijke getallen is, en de éénplaatsige predicaatletter E wordt geïnterpreteerd als de verzameling *even getallen*. Dan geldt in deze structuur wel $\mathbb{M} \models \forall x(Ex \vee \neg Ex)$, maar niet $\mathbb{M} \models \forall x\, Ex$ of $\mathbb{M} \models \forall x\, \neg Ex$.

Definitie 8.15 Een formule φ heet *geldig*, notatie: $\models \varphi$, als φ waar is in elke structuur, onder elke bedeling. Een formule heet *vervulbaar* als er een structuur $\mathbb{M}$ en een bedeling b is zó dat $\mathbb{M}, b \models \varphi$. $\lhd$

Tussen de bovenstaande begrippen bestaan natuurlijk allerlei verbanden.

Voorbeeld 8.16 Een formule φ is vervulbaar dan en slechts dan als de negatie $\neg\varphi$ ongeldig (dwz niet geldig) is. Twee formules φ en ψ zijn equivalent dan en slechts dan als de formule $\varphi \leftrightarrow \psi$ geldig is.

Als voorbeeld van een niet-triviaal resultaat over de semantische gevolgrelatie noemen we de *Compactheidsstelling*. Deze zegt, net als bij de propositielogica, dat als φ een semantisch gevolg is van een verzameling formules Σ, dan is φ al een gevolg van een eindige deelverzameling van Σ. We komen hier in Hoofdstuk 11 nog even op terug.

8.3 Definieerbaarheid, theorieën en axiomatiseringen

Definitie 8.17 Een verzameling zinnen noemen we wel een *theorie*. Voor een theorie Σ definiëren we $\mathsf{Mod}(\Sigma)$ als de collectie modellen van Σ, dat wil zeggen: de klasse van alle structuren waarin alle formules in Σ waar zijn. In het geval Σ een singleton is, zeg $\Sigma = \{\sigma\}$, schrijven we $\mathsf{Mod}(\sigma)$ in plaats van $\mathsf{Mod}(\{\sigma\})$. $\lhd$

Voorbeeld 8.18 Een *partiële ordening* is een relatie $<$ die irreflexief, transitief en asymmetrisch is. (Eigenlijk is het voldoende om te zeggen dat de relatie transitief en asymmetrisch is.) Al deze drie eigenschappen kunnen worden uitgedrukt in de predicatenlogica, en we kunnen de theorie *SPO* definiëren als

$$SPO := \Big\{ \forall x \neg Rxx,\ \forall x \forall y \forall z\, ((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz),\ \forall x \forall y\, (Rxy \to \neg Ryx) \Big\}.$$

SPO bestaat dus uit zinnen die aangeven dat de betreffende tweeplaatsige relatie respectievelijk irreflexief, transitief en asymmetrisch is.

De structuren $\mathbb{N} = (N, <)$, $\mathbb{Z} = (Z, <)$ en $\mathbb{Q} = (Q, <)$ (waarin steeds $<$ de standaard 'kleiner dan' relatie is) behoren dus alledrie tot de klasse $\mathsf{Mod}(SPO)$, evenals, voor een willekeurige verzameling S, de structuur $(\wp(S), \subset)$ bestaande uit alle deelverzamelingen van S, geordend met de (strikte) deelverzamelingsrelatie $\subset$.

Voorbeeld 8.19 Een *graaf*[5] is een (niet noodzakelijkerwijs eindige) structuur van de vorm $\mathbb{G} = (G, E)$ waarbij G een verzameling objecten is die we *knopen* of *punten* noemen, en $E \subseteq G \times G$ een irreflexive en symmetrische relatie is op G.

We kunnen grafen dus beschouwen als de modellen voor de theorie $\{\forall x\, \neg Rxx, \forall x \forall y\, (Rxy \to Ryx)\}$.

Definitie 8.20 Een klasse K van structuren (voor een bepaalde predicaatlogische taal) heet *eerste-orde definieerbaar* als er een predicaatlogische zin φ bestaat zó dat $\mathsf{K} = \mathsf{Mod}(\varphi)$. Op

[5]We beschouwen hier alleen ongerichte grafen.

dezelfde manier zeggen we dat een bepaalde eigenschap P eerste-orde definieerbaar is als er een predicaatlogische zin φ bestaat zó dat $\mathsf{Mod}(\varphi)$ bestaat uit precies de structuren die aan de eigenschap P voldoen.

Een klasse of eigenschap heet *eerste-orde definieerbaar* als er een predicaatlogische zin is die de klasse danwel eigenschap definieert. $\lhd$

Voorbeeld 8.21 De eigenschappen reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit worden gedefinieerd door respectievelijk de formules $\forall x\, Rxx$, $\forall x \forall y\, (Rxy \to Ryx)$, en $\forall x \forall y \forall z\, ((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz)$. De klasse van alle grafen wordt gedefinieerd door de formule $\forall x\, \neg Rxx \wedge \forall x \forall y\, (Rxy \to Ryx)\}$.

Verderop in deze paragraaf zullen we een aantal eigenschappen tegenkomen die *niet* eerste-orde definieerbaar zijn.

Opmerking 8.22 De naam 'eerste-orde' verwijst naar het feit dat we in de predicatenlogica alleen mogen kwantificeren over elementen van de 'eerste orde', dat wil zeggen: elementen van het domein. In de *tweede-orde* logica mag je ook kwantificeren over (onder andere) *deelverzamelingen* van het domein; er zijn allerlei eigenschappen die je wel in de tweede-orde logica, maar niet in de eerste-orde logica uit kunt drukken.

In veel gevallen zijn we geïnteresseerd in *relatieve* definieerbaarheid, dat wil zeggen: definieerbaarheid binnen een bepaalde omgeving C die bijvoorbeeld kan bestaan uit alle lineaire ordeningen, alle eindige structuren, of alle grafen.

Definitie 8.23 Gegeven zijn twee klassen van structuren, C en K. Als een willekeurige structuur $\mathbb{M}$ in C de formule φ waar maakt precies als $\mathbb{M}$ tot K behoort, dat wil zeggen als $\mathsf{C} \cap \mathsf{K} = \mathsf{C} \cap \mathsf{Mod}(\varphi)$, dan zeggen we dat de zin φ de klasse K *definieert binnen de omgeving* C. Op vergelijkbare wijze zeggen we dat φ *een eigenschap P definieert in de omgeving* C als een willekeurige structuur $\mathbb{M}$ in C de formule φ waar maakt precies als $\mathbb{M}$ aan de eigenschap P voldoet. Een klasse of eigenschap is *eerste-orde definieerbaar in* C als er een predicatenlogische zin φ is deze klasse of eigenschap definieert binnen C. $\lhd$

Voorbeeld 8.24 Binnen de klasse van partiële ordeningen wordt de eigenschap *lineariteit* (ook wel genoemd: *totaliteit*) gedefinieerd door de formule $\forall x \forall y\, (Rxy \vee Ryx \vee x = y)$. Binnen de klasse van lineaire ordeningen wordt de eigenschap *dichtheid* gedefinieerd door de formule $\forall x \forall y\, (Rxy \to \exists z (Rxz \wedge Rzy))$.

De omgeving C kan een subtiele maar belangrijke rol spelen bij het begrip definieerbaarheid.

Voorbeeld 8.25 Noem een relatie R *noetheriaans* of *welgefundeerd* als er geen oneindige rij $(a_n)_{n \in N}$ bestaat zó dat $Ra_{n+1}a_n$ voor elke n. De ordening $\mathbb{N} = (N, <)$ voldoet dus wel aan deze eigenschap, de ordeningen $\mathbb{Z} = (Z, <)$ en $\mathbb{Q} = (Q, <)$ niet.

Voor een *eindige* transitieve structuur $\mathbb{M} = (M, R)$ kun je vrij eenvoudig bewijzen dat $\mathbb{M}$ een 'foute' rij bevat (dat wil zeggen een oneindige rij $(a_n)_{n \in N}$ met $Ra_{n+1}a_n$ voor elke n)

precies als $\mathbb{M}$ een reflexief punt heeft. Maar dat betekent dat de formule $\neg\exists x Rxx$ de klasse van noetheriaanse relaties definieert binnen de klasse van eindige transitieve relaties.

De genoemde equivalentie geldt echter niet voor alle structuren: beschouw als voorbeeld de ordening $\mathbb{Z}$ van de gehele getallen: deze bevat wel 'foute' rijen (zoals $\cdots < -2 < -1 < 0$), maar geen reflexief punt. Het feit dat de formule $\neg\exists x Rxx$ de klasse van noetheriaanse relaties definieert, geldt dus niet in zijn algemeenheid. We kunnen zelfs laten zien dat, binnen de klasse van alle structuren, er geen enkele eerste-orde zin is die de eigenschap 'noetheriaans' defineert (zie Opgave 11.3).

Waar we een theorie hebben gedefinieerd als een verzameling zinnen, zijn we vaak geïnteresseerd in bijzondere theorieën, zoals de verzameling van alle zinnen die waar zijn in een bepaalde structuur of klasse van structuren.

Definitie 8.26 Laat $\mathbb{M}$ een structuur zijn voor een bepaalde predicaatlogische taal. De *theorie* van $\mathbb{M}$ is de verzameling zinnen uit die taal die waar zijn in $\mathbb{M}$, notatie: $\mathit{Th}(\mathbb{M})$. De *theorie* van een klasse K van modellen, notatie: $\mathit{Th}(\mathsf{K})$, is de verzameling zinnen die waar zijn in elk model in K. $\lhd$

Voorbeeld 8.27 Alle ware stellingen uit de rekenkunde behoren tot de theorie van de structuur bestaande uit de natuurlijke getallen met de bijbehorende rekenkundige operaties.

De operaties Th en Mod verhouden zich tot elkaar als een zogenaamde *Galois connectie*:

Stelling 8.28 *Voor elke verzameling zinnen* Σ *en elke klasse van structuren* K *geldt:*

$$\Sigma \subseteq \mathit{Th}(\mathsf{K}) \iff \mathsf{K} \subseteq \mathsf{Mod}(\Sigma).$$

Definitie 8.29 Een verzameling zinnen Σ *axiomatiseert* een klasse K van modellen als $\mathit{Th}(\mathsf{K}) = \{\varphi \mid \Sigma \models \varphi\}$. $\lhd$

Als K geaxiomatiseerd wordt door Σ, dan betekent dat dus twee dingen: elke zin in Σ is waar in K, en elke formule in $\mathit{Th}(\mathsf{K})$ volgt uit Σ.

Voorbeeld 8.30 De ordening der rationale getallen wordt geaxiomatiseerd door de theorie *SPO* van strikt partiële ordeningen, tezamen met de volgende zinnen:

$$\begin{array}{ll}
\forall x \forall y\,(Rxy \vee Ryx \vee x = y) & \text{(lineariteit)} \\
\forall x \exists y\, Rxy \wedge \forall x \exists y\, Ryx & \text{(serialiteit)} \\
\forall x \forall y\,(Rxy \to \exists z(Rxz \wedge Rzy)) & \text{(dichtheid)}
\end{array}$$

Voorbeeld 8.31 Een interessante vraag is of we een eenvoudige axiomatisering kunnen vinden voor de theorie van de *rekenkunde van de natuurlijke getallen*, dat wil zeggen de verzameling formules die waar zijn in het standaard model $\mathbb{N}$ van de natuurlijke getallen. We beperken ons hierbij tot een taal die beschikt over de constante 0 (voor het getal 'nul'), een éénplaatsig functiesymbool S (dat staat voor de opvolgerfunctie), en twee tweeplaatsige functiesymbolen $+$ en $*$ (die staan voor respectievelijk de optelling en de vermenigvuldiging). De *Peano rekenkunde PA* is de verzameling bestaande uit de volgende axioma's:

- $\forall x\,(0 \neq Sx)$
- $\forall x \forall y\,(Sx = Sy \to x = y)$
- $\forall x\,(x + 0 = x)$
- $\forall x \forall y\,(x + Sy = S(x + y))$
- $\forall x\,(x * 0 = 0)$
- $\forall x \forall y\,(x * Sy = (x * y) + x)$,

tezamen met het volgende *inductie-schema*, dat een axioma geeft voor elke formule φ met vrije variabelen $x, y_1, \ldots, y_k$ (in het vervolg gebruiken we $\bar{y}$ als afkorting: $\bar{y} = y_1, \ldots, y_k$):

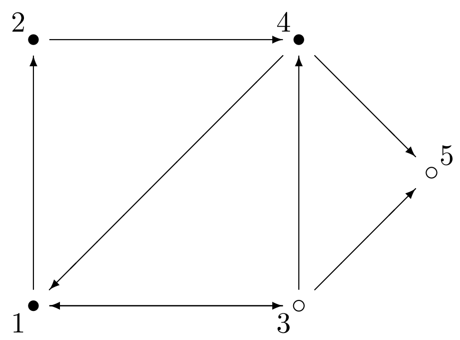
- $\forall \bar{y}\,\Big(\big(\varphi(0, \bar{y}) \wedge \forall x\,(\varphi(x, \bar{y}) \to \varphi(Sx, \bar{y}))\big) \;\to\; \forall x\,\varphi(x, \bar{y})\Big)$

Als gevolg van Kurt Gödel's *Onvolledigheidsstelling*, één van de belangrijkste wiskundige resultaten van de 20e eeuw, is de Peano rekenkunde echter onvolledig: er bestaat een formule φ die wel *waar* is voor de natuurlijke getallen: $\mathbb{N} \models \varphi$, maar niet *bewijsbaar* in de Peano rekenkunde: $PA \nvdash \varphi$.

8.4 Opgaven

Opgave 8.1 Beschouw de structuur $\mathbb{M} = (D, I)$ gegeven door onderstaand plaatje, met

$$\begin{array}{lcl} D & = & \{1,2,3,4,5\} \\ c_i^I & = & i \text{ voor } i = 1,2,\ldots 5 \\ A^I & = & \{i \mid i \text{ is een zwarte cirkel } (\bullet)\} \\ R^I & = & \{(i,j) \mid \text{ er loopt een pijl van } i \text{ naar } j\} \end{array}$$



Welke van de volgende zinnen zijn waar in deze structuur?

a. Rc_3c_4

b. Ac_5

c. Rc_1c_1

d. $Rc_3c_5 \wedge Rc_1c_2$

e. $(Rc_1c_3 \vee Rc_5c_5) \to Ac_4$

f. $\exists x Rxc_2$

g. $\forall x(\exists y Ryx \vee Ax)$

h. $\forall z(Az \to \forall u(Au \leftrightarrow (Rzu \vee Ruz)))$

i. $\exists x Ax \wedge \forall z(Rzz \vee \exists x Rxz)$

j. $\exists x \exists y(Rxy \to \exists z Ryz)$

k. $\exists x(\exists y Ryx \to \exists z Rxz)$

l. $\forall x Ax \vee \exists y \exists z(Ryz \wedge Rzy \wedge \neg\exists u(\neg u = y \wedge \neg u = z \wedge Ryu))$

m. $\forall x(Ax \vee \exists y \exists z(Ryz \wedge Rzy \wedge \neg\exists u(\neg u = y \wedge \neg u = z \wedge Ryu)))$

Opgave 8.2 We werken weer met de structuur van opgave 8.1. Geef voor elk van de onderstaande formules zo mogelijk een bedeling voor de *vrije* variabelen zodat de formule waar is in de structuur onder die bedeling. Als voor een bepaalde formule zo'n bedeling niet bestaat, leg dan uit waarom niet.

a. $Ax \wedge Rxy \wedge \neg Ryx \wedge \neg Ay$

b. $\neg\exists y Rxy$

c. $\neg Ax \wedge \exists y(Rxy \wedge \neg Ay \wedge \exists z(Ryz \wedge \neg Az))$

d. $\neg Ax \wedge \exists y \exists z(Rxy \wedge Ryz \wedge Rzx)$

e. $\forall y(Rxy \to Ay) \wedge \forall y(Ryx \to Ay)$

f. $\forall y Ryx \vee \forall y Rxy$

g. $\forall y(Ryx \to Ryy)$

h. $\exists y \exists z(Rxy \wedge Ryx \wedge Rxz \wedge \forall w \neg Rzw)$

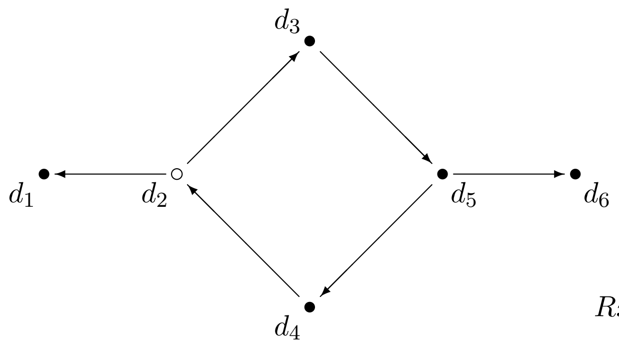
i. $\forall y(Rxy \to \forall z \neg Ryz)$

j. $\forall u \forall v((Rxu \wedge Rxv) \to (Au \leftrightarrow Av))$

Opgave 8.3 We werken nogmaals met de structuur van opgave 8.1, maar met de aantekening dat we de taal beperken tot de relatiesymbolen A en R (dat wil zeggen: u mag geen gebruik meer maken van de constantes c_i). Wel mag u gebruik maken van het identiteitssymbool '='.

Geef voor elk van de punten i een karakteriserende formule $\varphi_i(x)$ (dat wil zeggen, een formule die in deze structuur alleen waar is onder bedelingen b waarvoor geldt $b(x) = i$).

Opgave 8.4 In de onderstaande figuur worden de predicaatsymbolen A en R als volgt geïnterpreteerd:



Rxy : er loopt een pijl van x naar y,

Ax : x is een dichte cirkel: $\bullet$.

Geef voor elk van de punten d_i een karakteriserende formule $\varphi_i(x)$ (dat wil zeggen, een formule die in dit model alleen waar is onder bedelingen b waarvoor geldt $b(x) = d_i$). Nota bene: u moet het met de predicaatsymbolen A en R doen — u kunt de namen $d_1, \ldots, d_6$ dus niet als constantes gebruiken!

Opgave 8.5 Geef, in het inductieve bewijs van de *Eindigheidsstelling*, het geval van de inductieve stap waar φ een disjunctie is.

Opgave 8.6 Gegeven is een structuur $\mathbb{M}$ en een bedeling b op $\mathbb{M}$.

a. Laat zien dat voor alle formules φ en ψ het volgende geldt:

$$\text{als } \mathbb{M}, b \models \exists x\, \varphi \to \psi, \text{ dan } \mathbb{M}, b \models \forall x\, (\varphi \to \psi), \tag{8}$$

mits x geen vrije variabele is van ψ.

b. Laat door middel van een voorbeeld zien dat (8) niet hoeft te gelden als $x \in VV(\psi)$.

Opgave 8.7 Toon aan dat voor elke verzameling zinnen Σ, en elke klasse van modellen K geldt dat

$$\Sigma \subseteq \mathit{Th}(\mathsf{K}) \text{ desda } \mathsf{K} \subseteq \mathsf{Mod}(\Sigma).$$

9 Expressiviteit via spelen

Hoe ingewikkeld is het om de verschillen tussen twee gegeven structuren te formuleren? Welke eigenschappen van structuren kun je wel, en welke kun je niet uitdrukken in de taal van de predicatenlogica? Deze vragen kun je benaderen met behulp van *speltheorie*.

In deze paragraaf beperken we ons tot een taal die bestaat uit slechts één tweeplaatsig relatiesymbool R. Een structuur voor deze taal bestaat dus uit een verzameling met daarop een tweeplaatsige relatie; zo'n structuur geven we hier voor het gemak weer als een paar $\mathbb{M} = (M, R)$, of $\mathbb{M} = (M, <)$ als het om een ordening gaat.

Voorbeeld 9.1 In deze paragraaf zullen we regelmatig de ordeningen van verschillende getallenverzamelingen als voorbeelden gebruiken; het gaat dan om de structuren $\mathbb{N} = (N, <)$, $\mathbb{Z} = (Z, <)$, $\mathbb{Q} = (Q, <)$ en $\mathbb{R} = (R, <)$ van respectievelijk de natuurlijke, gehele, rationale en reële getallen.

Om het spel te definiëren hebben we de volgende definitie nodig.

Definitie 9.2 Gegeven zijn twee structuren $\mathbb{M} = (M, R)$ en $\mathbb{M}' = (M', R')$, en twee rijtjes, $a_1 \cdots a_n$ en $a'_1 \cdots a'_n$, van elementen uit respectievelijk $\mathbb{M}$ en $\mathbb{M}'$. Stel dat voor alle i, j met $0 < i, j \leq n$ geldt dat

$$a_i = a_j \text{ dan en slechts dan als } a'_i = a'_j,$$

en

$$Ra_ia_j \text{ dan en slechts dan als } R'a'_ia'_j,$$

dan noemen we de twee rijtjes *isomorf*. Als bijzonder geval zeggen we dat de lege rijtjes $(n = 0)$ altijd isomorf zijn. $\lhd$

Voorbeeld 9.3 Bekijk de ordeningen $\mathbb{Q} = (Q, <)$ en $\mathbb{Z} = (Z, <)$ van de rationele en de gehele getallen. De rijtjes $\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 100$ en $-2 \cdot -3 \cdot -1$ zijn isomorf, de rijtjes $0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 100$ en $3 \cdot 2 \cdot 4$ zijn dat niet.

Definitie 9.4 Voor twee structuren $\mathbb{M} = (M, R)$ en $\mathbb{M}' = (M', R')$ en een gegeven natuurlijk getal n definiëren we het volgende *Ehrenfeucht-Fraïssé spel* $\mathcal{E}_n(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$.

Er zijn twee spelers, de *initiator* I en de *duplicator* D; het is handig om aan te nemen dat I vrouwelijk is en D mannelijk. Het spel verloopt in n *rondes*; aan het begin van elke ronde kiest de initiator één van de twee structuren (bijvoorbeeld $\mathbb{M}'$), en een element uit die structuur (bijvoorbeeld a'); als tegenzet moet de duplicator dan een element uit de *andere* structuur kiezen (bijvoorbeeld a), en met deze zet wordt de ronde afgesloten.

Na k rondes hebben de spelers samen dus twee rijtjes gekozen van elk k elementen uit de beide structuren, zeg $a_1 \cdots a_k$ in $\mathbb{M}$ en $a'_1 \cdots a'_k$ in $\mathbb{M}'$. Na afloop van de wedstrijd roepen we de *duplicator* uit tot de winnaar als de rijtjes $a_1 \cdots a_n$ en $a'_1 \cdots a'_n$ isomorf zijn; zo niet, dan wint de initiator. (In het speciale geval waar $n = 0$ wint de duplicator dus elke wedstrijd.) $\lhd$

Het idee achter dit spel is dat de initiator de (eventuele) verschillen tussen de twee structuren wil laten zien, terwijl de duplicator juist moet aantonen dat de structuren op elkaar lijken.

Voorbeeld 9.5 Stel dat we het Ehrenfeucht-Fraïssé spel van lengte 4 spelen tussen $\mathbb{Q} = (Q, <)$ en $\mathbb{Z} = (Z, <)$, en dat er na drie rondes de rijtjes $3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0$ en $7 \cdot 3 \cdot 2$ zijn gevormd. Dan kan de initiator winnen door in $\mathbb{Q}$ bijvoorbeeld het element $\frac{1}{3}$ te kiezen; om te winnen zou de duplicator dan een geheel getal tussen de getallen 2 en 3 moeten kiezen, en dat is natuurlijk niet mogelijk.

Als de initiator vanaf het begin van de wedstrijd slim speelt, wint ze gegarandeerd: ze kiest dan bijvoorbeeld eerst de getallen 0 en 1 in $\mathbb{Z}$; stel dat de duplicator daar de getallen q_0 en q_1 in $\mathbb{Q}$ tegenoverstelt. We mogen aannemen dat $q_0 < q_1$ (anders heeft de duplicator meteen verloren); nu kiest de initiator een rationaal getal tussen q_0 en q_1, en de duplicator kan daar geen geheel getal tussen 0 en 1 tegenoverstellen.

De initiator heeft dus maar drie rondes nodig om een verschil te laten zien tussen $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Z}$.

Definitie 9.6 We zeggen dat een speler een *winnende strategie* heeft in het spel $\mathcal{E}_n(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$ als zij/hij een manier van spelen heeft die winst voor haar/hem garandeert, ongeacht de zetten van de tegenspeler. We noteren $\mathbb{M} \sim_n \mathbb{M}'$ om aan te geven dat de duplicator een winnende strategie heeft in $\mathcal{E}_n(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$. $\lhd$

Voorbeeld 9.7 De initiator heeft een winnende strategie in $\mathcal{E}_3(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$, maar niet in $\mathcal{E}_2(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$. Er geldt dus $\mathbb{Q} \sim_2 \mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q} \not\sim_3 \mathbb{Z}$.

Nog eenvoudiger is het om te laten zien dat $\mathbb{N} \sim_1 \mathbb{Z}$ maar $\mathbb{N} \not\sim_2 \mathbb{Z}$.

Stilzwijgend zullen we soms de eigenschap gebruiken dat deze spelen *gedetermineerd* zijn:

Stelling 9.8 (Determinisme) *Voor elk natuurlijk getal n en elk paar structuren $\mathbb{M}$ and $\mathbb{M}'$ geldt dat precies één van beide spelers een winnende strategie heeft in het Ehrenfeucht-Fraïsé spel $\mathcal{E}_n(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$.*

We laten het bewijs van deze Stelling achterwege.

Propositie 9.9 *Voor elke n geldt $\mathbb{Q} \sim_n \mathbb{R}$.*

Bewijs. Om de propositie te bewijzen gaan we een winnende strategie definiëren voor de duplicator die werkt voor *iedere* n; we bewijzen dus eigenlijk een sterkere versie van de propositie. Het idee van deze winnende strategie is heel eenvoudig: D hoeft er alleen maar voor te zorgen dat na afloop van iedere ronde k de rijtjes $q_1 \cdots q_k$ en $r_1 \cdots r_k$ isomorf zijn. Met een inductief argument laten we zien dat dit inderdaad mogelijk is.

Voor de inductiestap van dit bewijs stellen we dat er na afloop van ronde k de rijtjes $q_1 \cdots q_k$ en $r_1 \cdots r_k$ isomorf zijn. We moeten laten zien dat de duplicator op iedere zet van de initiator een antwoord heeft zó dat de nieuwe rijtjes $q_1 \cdots q_k \cdot q_{k+1}$ en $r_1 \cdots r_k \cdot r_{k+1}$ opnieuw isomorf zijn. Voor het gemak nemen we even aan dat $q_1 < q_2 < \cdots < q_k$, en dus ook $r_1 < r_2 < \cdots < r_k$. (Dit is alleen om de natatie te vereenvoudigen, het algemene geval wordt volledig analoog bewezen.) We maken nu een gevalsonderscheiding.

Geval 1 Speler I kiest een element uit $\mathbb{Q}$. We maken een verdere gevalsonderscheiding:

Geval 1a Speler I kiest een element $q_{k+1} < q_1$. Dan kiest D het element $r_{k+1} := r_1 - 1$.

Geval 1b Speler I kiest een element $q_{k+1} > q_k$. Dan kiest D het element $r_{k+1} := r_k + 1$.

Geval 1c Speler I kiest een element dat al eerder gekozen was, zeg $q_{k+1} = q_i$. Dan kiest D het element $r_{k+1} := r_i$.

Geval 1d Speler I kiest een element tussen twee al eerder gekozen getallen, zeg $q_{k+1} \in \langle q_i, q_{i+1}\rangle$. Dan kiest D het element $r_{k+1} := (r_i + r_{i+1})/2$.

Geval 2 Speler I kiest een element uit $\mathbb{R}$. We maken nu de analoge gevalsonderscheiding als bij geval 1, en we definiëren ook het antwoord van speler D op dezelfde manier als hierboven.

Het is nu in al deze gevallen heel eenvoudig om te laten zien dat het antwoord van de duplicator er inderdaad voor zorgt dat de rijtjes $q_1 \cdots q_k \cdot q_{k+1}$ en $r_1 \cdots r_k \cdot r_{k+1}$ opnieuw isomorf zijn. Dit volstaat om de Propositie te bewijzen. QED

Tussen deze Ehrenfeucht-Fraïssé spelen en de predicatenlogica bestaat een nauw verband. Om dit te formuleren maken we gebruik van het begrip *kwantordiepte*, zie Definitie 7.3.

Zonder bewijs vermelden we de volgende stelling.

Stelling 9.10 (Adequaatheid) *Voor elke n, en voor elk paar structuren $\mathbb{M}$ en $\mathbb{M}'$ geldt*

$$\mathbb{M} \equiv_n \mathbb{M}' \iff \mathbb{M} \sim_n \mathbb{M}'.$$

Voorbeeld 9.11 Voor het verschil tussen de structuren $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Z}$ is de formule $\forall x_0 x_1 \big(Rx_0x_1 \to \exists y(Rx_0y \wedge Ryx_1)\big)$, van kwantordiepte 3, een getuige. Uit Propositie 9.9 volgt dat $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ precies dezelfde predicatenlogische zinnen waar maken.

Voorbeeld 9.12 Een wat lastiger voorbeeld laat zien dat de predicatenlogica het verschil niet kan uitdrukken tussen $\mathbb{Z}$ en de ordening $\mathbb{X}$ die je krijgt door twee kopieën van $\mathbb{Z}$ achter elkaar te zetten. Preciezer gedefinieerd: $\mathbb{X}$ is de structuur $(X, <)$ met

$$\begin{array}{lcl} X & := & \{\ell, r\} \times Z \\ < & := & \big\{\big((\ell,y),(r,z)\big) \mid y,z \in Z\big\} \cup \big\{\big((\ell,y),(\ell,z)\big) \mid y < z\big\} \cup \big\{\big((r,y),(r,z)\big) \mid y < z\big\} \end{array}$$

Onze claim is dat

$$\mathbb{Z} \sim_n \mathbb{X}, \text{ voor alle } n. \tag{9}$$

Om deze claim te bewijzen definiëren we, voor een gegeven n, een winnende strategie voor de duplicator in $\mathcal{E}_n(\mathbb{Z}, \mathbb{X})$.

Voor de formulering van deze strategie hebben we de volgende begrippen nodig. De *afstand* tussen twee getallen y en z in $\mathbb{Z}$ definiëren we als $d(y,z) := |y - z|$; de afstand tussen twee elementen (g,y) en (h,z) in $\mathbb{X}$ definiëren we als $d'\big((g,y),(h,z)\big) := \infty$ als $g \neq h$ en $d'\big((g,y),(h,z)\big) := |y - z|$ als $g = h$. We zeggen dat twee rijtjes $\overline{a} = a_1 \cdots a_m$ in $\mathbb{Z}$ en $\overline{a}' = a'_1 \cdots a'_m$ in $\mathbb{X}$ *overeenkomen tot niveau k*, notatie: $\overline{a} \simeq_k \overline{a}'$, als $\overline{a}$ en $\overline{a}'$ isomorf zijn en voor alle i, j geldt dat (1) $d(a_i, a_j) = d'(a'_i, a'_j) < k$ of (2) $d(a_i, a_j), d'(a'_i, a'_j) \geq k$. In woorden: $d(a_i, a_j)$ en $d'(a'_i, a'_j)$ zijn óf allebei relatief klein en dan precies gelijk, óf allebei relatief groot.

De strategie van de duplicator in $\mathcal{E}_n(\mathbb{Z},\mathbb{X})$ is nu als volgt: hij moet er voor zorgen dat na afloop van iedere ronde k, de rijtjes $\overline{a}$ en $\overline{a}'$ overeenkomen tot niveau 2^{n-k}. We laten het als een opgave voor de lezer om na te gaan dat het inderdaad mogelijk is voor D om deze strategie te volgen. De sleutelstap in dit bewijs wordt gegeven door de volgende observatie, voor een willekeurig getal l en twee willekeurige rijtjes $\overline{a} = a_1 \cdots a_m$ in $\mathbb{Z}$ en $\overline{a}' = a'_1 \cdots a'_m$ in $\mathbb{X}$:

$$\text{als } \overline{a} \simeq_{2^{l+1}} \overline{a}' \text{ dan is er voor elke } a \in Z \text{ een } a' \in X \text{ zó dat } \overline{a} \cdot a \simeq_{2^l} \overline{a}' \cdot a', \tag{10}$$

en, vice versa:

$$\text{als } \overline{a} \simeq_{2^{l+1}} \overline{a}' \text{ dan is er voor elke } a' \in X \text{ een } a \in Z \text{ zó dat } \overline{a} \cdot a \simeq_{2^l} \overline{a}' \cdot a', \tag{11}$$

Om (10) te bewijzen veronderstellen we dat $\overline{a} \simeq_{2^{l+1}} \overline{a}'$ en nemen we een willekeurig element $a \in Z$. We moeten dan een $a' \in X$ vinden zodanig dat $\overline{a} \cdot a \simeq_{2^l} \overline{a}' \cdot a'$. We maken een gevalsonderscheiding, gebaseerd op de relatieve positie van a temidden van $a_1, \ldots, a_k$, en concentreren ons op het geval waarin a gesitueerd ligt tussen twee getallen a_i and a_j (in de zin dat a_i en a_j de dichtstbijzijnde getallen in $\overline{a}$ zijn die respectievelijk links en rechts van a liggen). We maken nu een verdere gevalsonderscheiding:

1. Als $d(a_i, a_j) < 2^{l+1}$ dan geldt $d(a_i, a_j) = d(a'_i, a'_j)$. Er is dan een $a' \in X$ zodanig dat $d(a_i, a) = d(a'_i, a')$ en $d(a, a_j) = d(a', a'_j)$. Het is daarmee niet moeilijk in te zien dat $\overline{a} \cdot a \simeq_{2^l} \overline{a}' \cdot a'$.

2. Als $d(a_i, a_j) \geq 2^{l+1}$ dan is ook $d(a'_i, a'_j) \geq 2^{l+1}$, terwijl er voor de positie van a drie mogelijkheden zijn:

   (a) $d(a_i, a) < 2^l$ en $d(a, a_j) \geq 2^l$. Laat nu a' het element van X zijn dat even ver rechts van a'_i ligt als a rechts van a_i. Dan geldt $d(a_i, a) = d(a'_i, a')$ en $d(a', a'_j) \geq 2^l$, waarmee je eenvoudig kunt laten zien dat $\overline{a} \cdot a \simeq_{2^l} \overline{a}' \cdot a'$.

   (b) $d(a_i, a) \geq 2^l$ en $d(a, a_j) \geq 2^l$. Omdat $d(a'_i, a'_j) \geq 2^{l+1}$ is er dan een $a' \in X$ zó dat $d(a'_i, a') \geq 2^l$ en $d(a', a'_j) \geq 2^l$, waarmee inderdaad $\overline{a} \cdot a \simeq_{2^l} \overline{a}' \cdot a'$.

   (c) $d(a_i, a) \geq 2^l$ en $d(a, a_j) < 2^l$. Dit geval verloopt analoog aan (a).

Dit eindigt onze bewijsschets van (10). Het bewijs van (11) verloopt analoog.

Het is niet moeilijk om te laten zien dat deze strategie winnend is voor D: stel maar dat hij deze strategie gevolgd heeft in een wedstrijd van $\mathcal{E}_n(\mathbb{Z},\mathbb{X})$. Na de laatste ronde van deze wedstrijd geldt dan dat de twee gevormde rijtjes $\overline{a} = a_1 \cdots a_n$ in $\mathbb{Z}$ en $\overline{a}' = a'_1 \cdots a'_n$ in $\mathbb{X}$ overeenkomen tot niveau $2^{n-n} = 2^0 = 1$. In het bijzonder betekent dit dat de twee rijtjes isomorf zijn, waarmee D de winnaar van de wedstrijd is, zoals verlangd.

Als toepassing van Stelling 9.10 kunnen we laten zien dat sommige eigenschappen van structuren al dan niet eerste-orde definieerbaar zijn.

Stelling 9.13 *Gegeven zijn twee klassen van structuren,* C *en* K*. De volgende twee uitpraken zijn equivalent:*

(1) K *is eerste-orde definieerbaar binnen* C*.*

(2) Er is een natuurlijk getal n *zó dat voor elk paar* $(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$ *van structuren in* C *met* $\mathbb{M} \sim_n \mathbb{M}'$ *geldt dat* $\mathbb{M}$ *en* $\mathbb{M}'$ *of allebei wel, of allebei niet tot* K *behoren.*

Opmerking 9.14 Contrapositief geformuleerd is deze stelling misschien beter te begrijpen. In het bijzonder is het, om aan te tonen dat K *niet* eerste-orde definieerbaar is binnen C, voldoende om voor elke natuurlijk getal n twee structuren $\mathbb{M}_n$ en $\mathbb{M}'_n$ in C te vinden zó dat $\mathbb{M}_n$ wel en $\mathbb{M}'_n$ niet tot K behoort, terwijl $\mathbb{M}_n \sim_n \mathbb{M}'_n$.

Definitie 9.15 Een *pad* door een graaf $\mathbb{G}$ is een eindig rijtje $v_0 \cdot v_1 \cdots v_n$ zó dat $n \leq 0$ en Ev_iv_{i+1} voor alle i met $0 \leq i < n$. Een graaf is *samenhangend* als er bij elk paar knopen u en v een pad is dat begint in u en eindigt in v. $\lhd$

Propositie 9.16 *De klasse van samenhangende grafen is niet eerste-orde definieerbaar.*

Bewijs. Op grond van Stelling 9.13 volstaat het om twee grafen $\mathbb{G}$ en $\mathbb{G}'$ te vinden zó dat $\mathbb{G}$ samenhangend is en $\mathbb{G}'$ niet, terwijl $\mathbb{G} \sim_n \mathbb{G}'$ voor elk natuurlijk getal n.

Voor $\mathbb{G}$ en $\mathbb{G}'$ nemen we structuren die geïnspireerd zijn op de ordeningen $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{X}$ uit Voorbeeld 9.12. We definiëren $\mathbb{G}$ als de graaf (Z, E) waarbij Z de verzameling gehele getallen is en E de 'directe buur' relatie is, dat wil zeggen Eyz geldt als $z = y - 1$ of $z = y + 1$. De graaf $\mathbb{G}' = (X, E')$ is op analoge wijze gedefinieerd op de verzameling X uit Voorbeeld 9.12. Met andere woorden: de graaf $\mathbb{G}'$ bestaat uit twee losse kopieën van de graaf $\mathbb{G}$.

We laten het aan de lezer als opgave om te laten zien dat $\mathbb{G} \sim_n \mathbb{G}'$ voor iedere n. QED

Definitie 9.17 Noem een eindige structuur *(on)even* als het domein een (on)even aantal elementen heeft. $\lhd$

Propositie 9.18 *De eigenschap 'even' is niet eerste-orde definieerbaar (binnen de klasse van eindige structuren).*

Bewijs. Definieer, voor ieder natuurlijk getal $n > 0$, de graaf $\mathbb{H}_n$ als de structuur $\mathbb{H}_n := (\{1, 2, \ldots, n\}, \varnothing)$. In woorden: $\mathbb{H}_n$ is de totaal onsamenhangende graaf met n knopen ('totaal onsamenhangend' wil zeggen dat geen enkel paar knopen door een zijde wordt verbonden). Het is niet moeilijk om te laten zien dat $\mathbb{H}_n \sim_n \mathbb{H}_{n+1}$, voor iedere $n > 0$. Met behulp van Stelling 9.13 volgt de Propositie dan onmiddellijk. QED

9.1 Opgaven

Opgave 9.1 Laat zien dat $\mathbb{H}_n \sim_n \mathbb{H}_{n+1}$, voor iedere n (waarbij $\mathbb{H}_n$ en $\mathbb{H}_{n+1}$ zijn gedefinieerd in Propositie 9.18).

Opgave 9.2 Laat zien dat $\mathbb{Z} \sim_n \mathbb{X}$, voor iedere n (waarbij $\mathbb{X}$ is gedefinieerd in Voorbeeld 9.12).

Opgave 9.3 Laat zien dat $\mathbb{G} \sim_n \mathbb{G}'$, voor iedere n (waarbij $\mathbb{G}$ en $\mathbb{G}'$ zijn gedefinieerd in Propositie 9.16).

Opgave 9.4 a. Laat zien dat $\sim_n$ een equivalentierelatie is, voor iedere n.

b. (*) Laat zien dat deze relatie van eindige index is (dat wil zeggen dat er slechts eindig veel $\sim_n$-equivalentieklassen zijn).

Opgave 9.5 Laat zien dat de eigenschap 'even' niet eerste-orde definieerbaar is binnen de klasse van eindige samenhangende grafen.

(Hint: definieer voor elk natuurlijk getal de *cirkel* $\mathbb{C}_n$ als de graaf $\mathbb{C}_n := (\{1, \ldots, n\}, E_n)$, waarbij

$$E_n := \big\{(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \mid i =_n j - 1 \text{ of } i =_n j + 1\big\}.$$

Hier schrijven we "$=_n$" om aan te geven dat twee getallen gelijk zijn, *modulo* n.)

10 Natuurlijke Deductie

Net als voor de propositielogica is er voor de predicatenlogica een aantal afleidingssystemen ontwikkeld, waaronder natuurlijke deductie.

10.1 Afleidingen

Afleidingen voor de predicatenlogica lijken erg op die van de propositielogica, en naast de al bekende regels zullen we voor beide kwantoren eliminatie- en introductieregels toevoegen. Er zijn twee verschillen:

1. We mogen nu ook een deelbewijs openen door het introduceren van een *variabele* in plaats van een hypothese, of samen met een hypothese. Deze variabele moet dan wel *vers* zijn, dat wil zeggen: hij mag niet voorkomen in de eerdere formules van de afleiding.
2. Er zijn *voorwaarden* verbonden aan de toepassing van de regels voor de kwantoren. Deze zijn nodig om de correctheid van het systeem te garanderen.

De afleidingsregels

Zoals gezegd is er voor elke kwantor een eliminatie- en een introductieregel. In de formulering van deze regels gebruiken we de letter t voor termen, en de letters $x, y, u, \dots$ voor variabelen.

$\boxed{\forall\text{E}}$ De eliminatieregel voor $\forall$:

$$\begin{array}{r|lll}
\vdots & \vdots & & \\
k & \forall x\,\varphi & & \\
\vdots & \vdots & & \\
l & \varphi[t/x] & \qquad & \forall\text{E},\ k
\end{array}$$

VOORWAARDE: t is vrij voor x in φ.

$\boxed{\forall\text{I}}$ De introductieregel voor $\forall$:

$$\begin{array}{r|lll}
\vdots & \vdots & & \\
k & u & \begin{array}{|l} \\ \hline \vdots \\ \varphi[u/x] \end{array} & (\text{V}) \\
\vdots & & & \\
l & & & \\
\vdots & \vdots & & \\
m & \forall x\,\varphi & & \forall\text{I},\ k\text{–}l
\end{array}$$

VOORWAARDE: u is een *verse* variabele, dat wil zeggen: u komt niet voor in de formules in de regels 1 t/m $k-1$.

$\boxed{\exists\mathrm{I}}$ De introductieregel voor $\exists$:

$$\begin{array}{l|ll}
\vdots & \vdots & \\
k & \varphi[t/x] & \\
\vdots & \vdots & \\
l & \exists x\, \varphi & \exists\mathrm{I},\ k
\end{array}$$

VOORWAARDE: t is vrij voor x in φ.

$\boxed{\exists\mathrm{E}}$ De eliminatieregel voor $\exists$:

$$\begin{array}{l|lll}
\vdots & \vdots & & \\
k & \exists x\, \varphi & & \\
\vdots & \vdots & & \\
l & u & \varphi[u/x] & (\mathrm{V/H}) \\
\vdots & & \vdots & \\
m & & \psi & \\
\vdots & \vdots & & \\
n & \psi & & \exists\mathrm{E},\ k,\ l\text{–}m
\end{array}$$

VOORWAARDE: u is een *verse* variabele, en u is niet vrij in ψ.

10.2 Voorbeelden

Bij alle onderstaande voorbeelden laten we het aan u om te controleren of bij elke toepassing van een regel voor de kwantoren aan de voorwaarden is voldaan.

Voorbeeld 10.1 Als eerste voorbeeld laten we zien dat $\forall x\,(Px \to Qx), \forall x\, Px \vdash \forall x\, Qx$:

$$\begin{array}{r|lll}
1 & \forall x\,(Px \to Qx) & & (\mathrm{P}) \\
2 & \forall x\, Px & & (\mathrm{P}) \\
3 & u & & (\mathrm{V}) \\
4 & & Pu \to Qu & \forall\mathrm{E},\ 1 \\
5 & & Pu & \forall\mathrm{E},\ 2 \\
6 & & Qu & {\to}\mathrm{E},\ 4,\ 5 \\
7 & \forall x\, Qx & & \forall\mathrm{I},\ 3\text{–}6
\end{array}$$

Voorbeeld 10.2 Een korte afleiding laat zien dat $\forall x\, Px \vdash \exists x\, Px$:

1	$\forall x\, Px$	(P)
2	Px	$\forall$E, 1
3	$\exists x\, Px$	$\exists$I, 2

Voorbeeld 10.3 Een aspect van de Boolese dualiteit van de twee kwantoren is dat $\forall x \neg Px \vdash \neg\exists y\, Py$:

1	$\forall x \neg Px$	(P)
2	$\quad \exists y\, Py$	(H)
3	$\quad u \quad Pu$	(V/H)
4	$\quad\quad \neg Pu$	$\forall$E, 1
5	$\quad\quad \bot$	$\neg$E, 2
6	$\quad \bot$	$\exists$E, 2, 3–5
7	$\neg\exists y\, Py$	$\neg$I, 2–6

Voorbeeld 10.4 Zonder de voorwaarden op het gebruik van de regels komt de correctheid van het systeem in het geding. Bijvoorbeeld, zonder de voorwaarde op de regel $\forall$E zouden we de formule $\exists y\, Ryy$ in één stap kunnen afleiden uit $\forall x \exists y\, Rxy$.

Voorbeeld 10.5 Hier is een voorbeeld van de interactie tussen de kwantoren: $\exists x \forall y\, Rxy \vdash \forall y \exists x Rxy$.

1	$\exists x \forall y\, Rxy$	(P)
2	$u \quad$	(V)
3	$\quad v \quad \forall y\, Rvy$	(V/H)
4	$\quad\quad Rvu$	$\forall$E, 3
5	$\quad\quad \exists x\, Rxu$	$\exists$I, 4
6	$\quad \exists x\, Rxu$	$\exists$E, 1, 3–5
7	$\forall y \exists x\, Rxy$	$\forall$I, 2–6

Het is vaak overzichtelijker om variabelen $x_0, x_1, \ldots$ te gebruiken als instantiatie van x, $y_0, y_1, \ldots$ voor y, enz:

1	$\exists x \forall y\, Rxy$	(P)
2	y_0	(V)
3	$x_0 \quad \forall y\, Rx_0y$	(H)
4	Rx_0y_0	$\forall$E, 3
5	$\exists x\, Rxy_0$	$\exists$I, 4
6	$\exists x\, Rxy_0$	$\exists$E, 1, 3–5
7	$\forall y \exists x\, Rxy$	$\forall$I, 2–6

Voorbeeld 10.6 Afleidingen hoeven niet beperkt te blijven tot zinnen: $\forall\, x Px \wedge Qy \vdash \forall x\, (Px \wedge Qy)$.

1	$\forall x Px \wedge Qy$	(P)
2	$\forall x Px$	$\wedge$E, 1
3	Qy	$\wedge$E, 1
4	x_0	(V)
5	Px_0	$\forall$E, 2
6	$Px_0 \wedge Qy$	$\wedge$I, 5, 3
7	$\forall x\, (Px \wedge Qy)$	$\forall$I, 4–6

10.3 Opgaven

Opgave 10.1 Geef ND-afleidingen voor de volgende beweringen:

a. $\exists x\, (Ax \vee Bx) \vdash \exists x Ax \vee \exists x Bx$

b. $\exists x\, Ax, \forall x \forall y\, (Ax \to By) \vdash \forall y\, By$

c. $\forall x \exists y\, (Rxy \vee Ryx), \forall x \forall y\, (Rxy \to Ay) \vdash \forall x\, (Ax \vee \exists y(Rxy \wedge Ay))$

d. $\exists x Ax \to By \vdash \forall x\, (Ax \to By)$

e. $\vdash \neg \exists x \forall y\, ((Rxy \to \neg Ryy) \wedge (\neg Ryy \to Rxy))$

f. $\forall x\, (Ax \to By) \vdash \exists x Ax \to By$

g. $\exists x \exists y\, (Rxy \wedge Ay), \forall x \forall y\, (Ay \to Rxy) \vdash \exists y \forall x Rxy$.

Opgave 10.2 Bewijs of ontkracht de volgende beweringen:

a. $\forall x\, Ax, \exists y\, (Ay \to By) \models \exists y\, By$

b. $\exists x\,(Ax \land Bx) \equiv \exists x\,Ax \land \exists x\,Bx$

c. $\models \neg\exists x\forall y\,\big((Rxy \to \neg Ryy) \land (\neg Ryy \to Rxy)\big)$

d. $\exists x\,Ax, \exists x\forall y\,(Ax \to By) \models \forall y\,By$

11 Theorie van de predicatenlogica

In dit laatste hoofdstuk noemen we kort een paar belangrijke stellingen over de predicatenlogica, en gaan we nader in op de Compactheidsstelling.

We beginnen met Correctheid & Volledigheid. Net als bij de propositielogica beschikken we nu over twee in principe heel verschillende begrippen van geldig gevolg: een semantische ($\models$) en een syntactische ($\vdash$). Maar opnieuw kunnen we laten zien dat deze begrippen toch op het zelfde neer komen.

Stelling 11.1 (Correctheid en Volledigheid voor de Predicatenlogica) *Als Γ een verzameling formules is, en φ een formule, dan geldt:*

$$\Gamma \models \varphi \textit{ dan en slechts dan als } \Gamma \vdash \varphi.$$

De bovenstaande stelling is van fundamenteel belang in de logica. Als voorbeeld van een interessant, niet-triviaal gevolg noemen we de *Compactheidsstelling.*

Stelling 11.2 (Compactheid voor de Predicatenlogica) *Laat Γ een verzameling formules zijn, en φ een formule.*

$$\textit{Als } \Gamma \models \varphi \textit{ dan is er een } \text{eindige} \textit{ verzameling } \Pi_{\mathcal{D}} \subseteq \Gamma \textit{ zó dat } \Pi_{\mathcal{D}} \models \varphi.$$

Bewijs. Stel dat $\Gamma \models \varphi$. Dan geldt wegens de Volledigheidsstelling dat $\Gamma \vdash \varphi$, dat wil zeggen: er is een afleiding $\mathcal{D}$ van φ uit Γ. De cruciale observatie is nu dat afleidingen *eindige objecten* zijn. In het bijzonder geldt dat $\mathcal{D}$ slechts eindig veel premissen uit Γ gebruikt. Laat $\Pi_{\mathcal{D}} \subseteq \Gamma$ de verzameling van premissen zijn die worden gebruikt in $\mathcal{D}$. Dan is φ dus afleidbaar uit $\Pi_{\mathcal{D}}$, en op grond van de Correctheidsstelling mogen we uit $\Pi_{\mathcal{D}} \vdash \varphi$ concluderen dat $\Pi_{\mathcal{D}} \models \varphi$. Maar omdat $\Pi_{\mathcal{D}} \subseteq \Gamma$ geldt dan natuurlijk zeker dat $\Gamma \models \varphi$. QED

Als laatste voorbeeld noemen we (zonder bewijs) de onbeslisbaarheid van de predicatenlogica. De volgende stelling beweert dat er geen algoritme bestaat dat als input een formule van de predicatenlogica neemt en altijd (1) termineert en (2) correct berekent of de ingevoerde formule geldig is of niet.

Stelling 11.3 (Onbeslisbaarheid) *Het probleem, of een gegeven formule φ van de predicatenlogica geldig is of niet, is niet beslisbaar.*

11.1 Compactheid

De compactheidsstelling is zonder twijfel het meest gebruikte resultaat over de predicatenlogica. Vaak gebruikt men een iets andere versie, die wordt geformuleerd in termen van het begrip *vervulbaarheid.*

Definitie 11.4 Een verzameling formules Γ heet *vervulbaar* als Γ een model heeft, en *eindig vervulbaar* als elke eindige deelverzameling van Γ vervulbaar is. $\triangleleft$

Stelling 11.5 *Elke eindig vervulbare verzameling formules is vervulbaar.*

Opmerking 11.6 In het vervolg zullen de term 'compactheidsstelling' ook gebruiken voor Stelling 11.5. Gelukkig is er geen reden voor verwarring omdat de twee versies van de compactheidsstelling (Stelling 11.2 en Stelling 11.5) equivalent zijn, dat wil zeggen: we kunnen ze uit elkaar afleiden.

Neem eerst aan dat de bewering in Stelling 11.2 waar is, en laat Δ een eindig vervulbare verzameling formules zijn. Stel dat Δ niet vervulbaar is, dan geldt dus $\Delta \models \bot$. Wegens (de bewering in) Stelling 11.2 is er dan dus een eindige $\Delta_0 \subseteq \Delta$ zó dat $\Delta_0 \models \bot$. Maar dan is deze Δ_0 onvervulbaar, wat in tegenspraak is met de aanname. Δ is dus wél vervulbaar, en dat is hetgeen we moesten bewijzen.

Voor de tegenovergestelde implicatie nemen we aan dat Stelling 11.5 waar is. Stel nu dat Γ een verzameling predicatenlogische formules zijn, en φ een semantisch gevolg van Γ. Dan is de verzameling $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ onvervulbaar, zodat er wegens de aanname een eindige deelverzameling $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ is zó dat $\Gamma_0 \cup \{\neg\varphi\}$ onvervulbaar is. Maar dan geldt dat $\Gamma_0 \models \varphi$.

In de resterende deel van deze paragraaf geven we een aantal voorbeelden van toepassingen van de compactheidsstelling.

Propositie 11.7 *Laat T een verzameling zinnen zijn in een predicaatlogische taal $\mathcal{L}$, en veronderstel dat T eindige modellen heeft van willekeurige grootte. Dan heeft T ook een oneindig model.*

Bewijs. Voeg aan de taal $\mathcal{L}$ een oneindige verzameling $\{c_n \mid n \in N\}$ van constantes toe, en bekijk de verzameling

$$T' := T \cup \{\neg(c_n = c_m) \mid m, n \in N, m < n\}.$$

Onze claim is als volgt:

$$T' \text{ is eindig vervulbaar.} \tag{12}$$

Om (12) te bewijzen beschouwen we een willekeurige eindige deelverzameling $U \subseteq T'$. Laat k het grootste natuurlijke getal zijn zó dat c_k voorkomt in (een formule in) U. Volgens onze aanname heeft T een (eindig) model $\mathbb{M} = (D, I)$ zó dat $|D| \geq k$. Het is dus eenvoudig om de interpretatie I uit te breiden tot een interpretatie I' die de constanten c_i met $0 \leq i \leq k$ als verschillende objecten interpreteert. Er geldt dan dat $(D, I') \models T \cup \{\neg(c_n = c_m) \mid m < n \leq k\}$ en dus zeker $(D, I') \models U$. Dit bewijst (12).

Maar uit (12) volgt met compactheid dat de theorie T' een model $\mathbb{M} = (D, I')$ heeft; dit model moet de constanten c_n als verschillende objecten interpreteren, en kan dus geen eindig domein hebben. Als we nu de interpretatie I' beperken tot de taal $\mathcal{L}$ verkrijgen we dus het gewenste oneindige model voor T. QED

In paragraaf 8.3 bespraken we het begrip *eerste-orde definieerbaarheid* (zie Definitie 8.23). Een klasse van structuren K heet *eerste-orde* definieerbaar als er een zin φ is zó $\mathsf{K} = \mathsf{Mod}(\varphi)$. We generaliseren dit begrip nu als volgt.

Definitie 11.8 Een klasse van structuren K heet *elementair* als er een theorie T is zodanig dat $\mathsf{K} = \mathsf{Mod}(T)$. $\triangleleft$

Een onmiddellijk gevolg van Propositie 11.7 is de volgende observatie.

Gevolg 11.9 *De klasse van eindige structuren is niet elementair.*

Bewijs. Stel dat T een theorie is zdát $\mathsf{Mod}(T)$ precies de klasse van eindige structuren is. Dan heeft T dus eindige modellen van willekeurige grootte, en wegens Propositie 11.7 dus ook een oneindig model. Dit geeft direct een contradictie. QED

Propositie 11.10 *Elke partiële ordening $\mathbb{P} = (P, <)$ kan worden uitgebreid tot een totale ordening $(P, \prec)$ (in de zin dat $< \subseteq \prec$).*

Bewijs. Eerst beperken we onze aandacht tot *eindige* structuren. Met behulp van natuurlijke inductie naar het aantal elementen $|P|$ van het domein van de partiële ordening kunnen we bewijzen dat

elke *eindige* partiële ordening $\mathbb{P}$ kan worden uitgebreid tot een totale ordening. (13)

Het bewijs van deze bewering is niet heel ingewikkeld, maar valt buiten het bereik van de logica; we beperken ons daarom tot een korte schets.

In het geval $|P| = 1$ valt er niets te bewijzen. Stel nu dat $\mathbb{P} = (P, <)$ een partiële ordening is met $k + 1$ elementen. Neem een element $p_0 \in P$, en definieer $P' := P \setminus \{p_0\}$ en $<' := < \cap (P' \times P')$ (dat wil zeggen: we beperken de ordening $<$ tot de verzameling P'. Dan is $(P', <')$ een partiële ordening van k elementen. Volgens de inductiehypothese is er dus een totale ordening $\prec'$ van P' zó dat $<' \subseteq \prec'$. Zet

$$X := \{p \in P' \mid p \prec' q \text{ voor zekere } q < p_0\}.$$

Nu kunnen we de relatie $\prec$ als volgt definiëren:

$$\prec \ := \ \prec' \ \cup \ \{(x, p_0) \mid x \in X\} \ \cup \ \{(p_0, q) \mid q \notin X, q \neq p_0\}.$$

We laten het over aan de lezer om te laten zien dat deze relatie $\prec$ aan de gestelde voorwaarden voldoet, en eindigen hier de bewijsschets van (13).

Stel nu dat $\mathbb{P} = (P, <)$ oneindig is. Laat $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}$ de taal zijn die naast het tweeplaatsige symbool R (voor de ordening) een aparte constante c_p bevat voor ieder element $p \in P$. Definieer

$$T_{\mathbb{P}} := TOT \cup \{Rc_pc_q \mid p < q\} \cup \{\neg(c_p = c_q) \mid p \neq q\},$$

waarbij $TOT := SPO \cup \{\forall x \forall y\, (Rxy \vee Ryx \vee x = y)\}$ een axiomatizering is van de klasse van totale ordeningen (zie Voorbeeld 8.18).

We bewijzen nu eerst het volgende:

$$T_{\mathbb{P}} \text{ is eindig vervulbaar.} \quad (14)$$

Het bewijs van (14) volgt uit (13), als een variatie op het bewijs van (12) in het bewijs van Propositie 11.7.

Maar als $T_{\mathbb{P}}$ eindig vervulbaar is, heeft $T_{\mathbb{P}}$ op grond van de compactheidsstelling een model, zeg $\mathbb{M} = (D, I)$. Definieer nu

$$\prec := \big\{(p,q) \in P \times P \mid (I(c_p), I(c_q)) \in I(R)\big\},$$

en we beweren het volgende:

$$\prec \text{ is een totale ordening van de verzameling } P, \tag{15}$$

en

$$< \subseteq \prec. \tag{16}$$

Van deze twee beweringen schetsen we hier alleen het bewijs van (15). We moeten dan laten zien dat de relatie $\prec$ respectievelijk irreflexief, transitief, asymmetrisch, en totaal is.

Voor irreflexiviteit nemen we een willekeurig element $p \in P$. Stel nu dat $p \prec p$, dan geldt dus dat $\mathbb{M} \not\models \forall x \neg Rxx$, wat in tegenspraak is met de aanname dat $\mathbb{M}$ een model is voor de theorie TOT van totale ordeningen. Voor de andere eigenschappen van $\prec$ gebruiken we een vergelijkbaar argument. QED

11.2 Opgaven

Opgave 11.1 Een graaf $\mathbb{G} = (G, E)$ is *k-kleurbaar* (voor zeker natuurlijk getal $k > 1$) als er een partitie $\{C_1, \dots, C_k\}$ van G bestaat zó dat aangrenzende knopen tot verchillende cellen van de partitie behoren (verschillende "kleuren" hebben).

Laat zien dat een graaf $\mathbb{G} = (G, E)$ k-kleurbaar is dan en slechts dan als elke eindige deelgraaf van $\mathbb{G}$ k-kleurbaar is.

Opgave 11.2 Bewijs *König's Lemma*: elke oneindige, eindig vertakkende boom $\mathbb{T} = (T, E)$ heeft een oneindig pad.

Opgave 11.3 Een lineaire ordening $\mathbb{P} = (P, <)$ is een *welordening* als $\mathbb{P}$ geen oneindig dalende reeks $\cdots < p_2 < p_1 < p_0$ bevat.

a. Laat zien dat de klasse van welordeningen niet elementair is.

   Hint: voeg constantes $\{c_n \mid n \in N\}$ toe aan de taal. Stel, om een tegenspraak af te leiden, dat de theorie W de klasse van alle welordeningen definieert, en laat zien dat de theorie $W \cup \{c_m < c_n \mid m, n \in N, n < m\}$ eindig vervulbaar is.

b. Leidt hieruit af dat de eigenschap *noetheriaans* (Voorbeeld 8.25) niet eerste-orde definieerbaar is.

Opgave 11.4 Laat zien met behulp van een compactheidsargument dat de klasse van samenhangende grafen niet elementair is.