Wiskundige Methoden en Technieken voor Bèta-Gamma

Toets 1

Dinsdag 20 oktober 2009; 13:00 - 16:00

Opgave 1:

a) *Laat de punten A en B gegeven worden door $A = (-2, 2, 1)$ en $B = (-3, 4, 0)$. Bereken de lengte van OA, OB en AB.*

$OA = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3; OB = \sqrt{9 + 16} = 5.$
De lengte van het lijnstuk AB is gelijk aan de lengte van de verschilvector $a - b$; dus gelijk aan de lengte van $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en die lengte is $\sqrt{6}$.

b) *Voor de cosinus van de hoek ϕ tussen twee vectoren a en b kennen we de volgende formule:*

$$\cos\phi = \frac{\langle a, b\rangle}{||a||\,||b||}\ .$$

Bereken de cosinus van de hoek tussen de vectoren $p = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *en* $q = \begin{pmatrix} -1 \\ 18 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Invullen en uitwerken levert: $\langle p, q\rangle = 2 + 0 + 0 - 2 = 0$.
Ten overvloede: $||p|| = 3$ en $||q|| = \sqrt{329}$. De gevraagde cosinus is dus 0.

Leg uit hoe je dit al direct had kunnen zien uit het inproduct van p en q.

Als het inproduct 0 is en de vectoren zijn geen van beide een nulvector, dan staan die vectoren loodrecht op elkaar en is dus de cosinus van de hoek die ze maken gelijk aan 0.

c) *Beschouw de vectoren* $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *en* $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Geef een vergelijking van het vlak opgespannen door* a *en* b *in termen van een parametervoorstelling en in termen van een enkele vergelijking.*

Een parametervoorstelling kunnen we direct opschrijven omdat a en b beide richtingsvectoren zijn; zo'n voorstelling is:

$$x = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Voor de coordinaten van het vlak vinden we de volgende drie vergelijkingen:
$x_1 = \lambda + \mu$; $\quad x_2 = \lambda + 2\mu$ en $x_3 = \lambda + 3\mu$.
Als we uit deze drie vergelijkingen λ en μ elimineren vinden we voor de vergelijking van het vlak:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 .$$

Opgave 2:

A: *Beschouw de volgende reeks:*
$-2000 + 400 - 80 + 16 \cdots$
Bepaal van deze reeks

- *de rede* r
  Er geldt $r = -\frac{1}{5}$.
- *de algemene term* a_n
  Hiervoor geldt $a_n = -2000\,(-\frac{1}{5})^{n-1}$.
- *de partiele som* S_n
  Dit levert
  $$S_n = -2000\,\frac{1 - (-\frac{1}{5})^n}{\frac{6}{5}} .$$
- *de limiet* $S := \lim_{n\to\infty} S_n$
  Voor de limiet geldt
  $$S = \frac{5}{6} \times (-2000) = -\frac{5000}{3} .$$

.

B: *Beschouw de functie* $g(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$,
waarmee dekpuntiteratie $x_{n+1} = g(x_n)$ *wordt uitgevoerd.*

i) *Toon aan dat g een dekpunt $s = 1$ heeft.*
Invullen levert $g(1) = 1$ waarmee dus $s = 1$ een dekpunt is.

ii) *Toon aan dat g nog twee andere dekpunten s heeft die voldoen aan $s^2 = 6$.*
Invullen van $\sqrt{6}$ levert $g(\sqrt{6}) = \sqrt{6}$ en
invullen van $-\sqrt{6}$ levert $g(-\sqrt{6}) = -\sqrt{6}$ waaruit het gevraagde blijkt.

iii) *Stel, we willen een benadering vinden voor $\sqrt{6}$. Laat zien dat $s = \sqrt{6}$ niet aantrekkend is.*
Daarvoor moeten we de afgeleide van g gebruiken.
Er geldt $g'(x) = 3x^2 - 2x - 5$.
Invullen van $s = \sqrt{6}$ levert $g'(\sqrt{6}) = 18 - 2\sqrt{6} - 5 = 13 - 2\sqrt{6}$.
Omdat $\sqrt{6}$ tussen 2 en 3 ligt, zal $2\sqrt{6}$ tussen 4 en 6 liggen, waarmee $13-2\sqrt{6}$ dus tussen 7 en 9 ligt en dat is groter dan 1. Dit betekent dat het dekpunt $s = \sqrt{6}$ afstotend is.

iv) *Geef een functie $h(x)$ zodanig dat dekpuntiteratie $x_{n+1} = h(x_n)$ wel leidt tot $\sqrt{6}$.*
Uitgaande van de functie $x^2 - 6$, die een nulpunt heeft in $\sqrt{6}$, zouden we aan de iteratiefunctie $h(x) = x - (x^2 - 6)$ kunnen denken. De afgeleide hiervan in $\sqrt{6}$ is $1 - 2\sqrt{6}$ en dat is kleiner dan -1 dus dat levert geen convergentie naar $\sqrt{6}$.
Dan kunnen we vervolgens kijken naar de functie $\frac{1}{6}x^2 - 1$ die ook een nulpunt heeft in $\sqrt{6}$. Hiermee construeren we de iteratiefunctie $h(x) = x - \frac{1}{6}(x^2 - 6)$. Nader onderzoek levert dat de afgeleide van deze functie in het dekpunt $\sqrt{6}$ de waarde $1 - \frac{1}{3}\sqrt{6}$ heeft en dat ligt tussen 0 en $\frac{1}{3}$ waaruit volgt dat dekpuntiteratie voor deze functie wel convergeert naar $\sqrt{6}$.

Opgave 3:

a) *Beschouw de vectoren $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$. Vormen deze vectoren een afhankelijk stelsel?*
De 3 vectoren van het stelsel identificeren we met s_1, s_2 en s_3.
We kunnen dan bijvoorbeeld inzien dat s_1 gelijk is aan $s_2 - \frac{1}{3}\, s_3$.
Er zijn verschillende manieren waarop we een van de drie vectoren in de twee andere vectoren kunnen uitdrukken. Al die relaties zijn te herleiden tot

$$3s_1 - 3s_2 + s_3 = 0 \ .$$

De conclusie luidt in elk geval dat de drie vectoren een afhankelijk vormen (waarin elke vector kan worden uitgedrukt in een lineaire combinatie van de beide andere)

Bepaal een basis van $L(S)$.

Op grond van de toevoeging die tussen haakjes staat bij de beantwoording hierboven, kunnen we concluderen dat elk tweetal vectoren uit de drie gegeven vectoren s_1, s_2 en s_3 als basis kan dienen voor $L(S)$.

b) *Definieer*

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bepaal S^{-1}.

Er geldt

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Succes !