Wiskundige Methoden en Technieken voor Bèta-Gamma

Toets 2

Vrijdag 19 december 2008; 13:00 - 16:00

Er zijn drie opgaven met onderling gelijk gewicht.

Opgave 1

a) *Schrijf in Cartesische coördinaten (dus als $x + iy$) de volgende complexe getallen:* $2e^{\frac{3}{2}i\pi}$, $e^{\frac{3}{4}i\pi}$ *en* $3e^{3i\pi}$.

$2e^{\frac{3}{2}i\pi} = -2i\,; e^{\frac{3}{4}i\pi} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}\,; 3e^{3i\pi} = -3\,.$

Schrijf in de vorm $a + bi$: $1/i$, $3/(1 + 2i)$ en $(1 + i)/(1 - i)$.

$1/i = i/(-1) = -i\,; 3/(1 + 2i) = 3(1 - 2i)/(1 + 4) = 3/5 - (6/5)i\,;$
$(1 + i)/(1 - i) = (1 + i)^2/(1 + 1) = (1 + 2i - 1)/2 = i\,.$

b) *Beschouw het complexe getal $w = -1 + i$.*
Bereken $-w$, $\overline{w}$, $|w|$ en $\arg w$.
Schrijf w, $-w$ en $\overline{w}$ in poolcoördinaten.

$-w = 1 - i\,; \overline{w} = -1 - i\,; |w| = \sqrt{2}$ en $\arg w = \frac{3}{4}\pi\,.$
In poolcoördinaten: $w = \sqrt{2}e^{\frac{3}{4}i\pi}\,; -w = \sqrt{2}e^{\frac{7}{4}i\pi}\,; \overline{w} = \sqrt{2}e^{\frac{5}{4}i\pi}\,.$

c) *Los op (bepaal alle complexe getallen z waarvoor geldt):*

- $z^2 - 2z + 10 = 0\,;$

  Kwadraatafsplitsen levert $z^2 - 2z + 1 = -9 \Rightarrow (z - 1)^2 = (3i)^2 \Rightarrow z = 1 \pm 3i\,.$
  Mbv de $(a, b, c)-$formule wordt hetzelfde antwoord gevonden.

- *Re $z = -3$ en arg $z = \frac{3\pi}{4}$;*
  bestaat er een complex getal met Re $z = +3$ en arg $z = \frac{3\pi}{4}$?
  (Beargumenteer je antwoord).

  Het gezochte complexe getal is $-3 + 3i$. Een complex getal met het gegeven argument en positief reëel deel bestaat niet, want alle getallen met het argument $\frac{3\pi}{4}$ liggen in het tweede kwadrant en alle getallen in het tweede kwadrant hebben een negatief reëel deel.

- $|z + 3i| = 5$ *; maak een tekening van de oplossing.*

  Stel $z = x + iy$ dan geldt $|z + 3i| = \sqrt{x^2 + (y + 3)^2}$. De oplossing bestaat dus uit alle getallen waarvoor geldt $x^2 + (y + 3)^2 = 25\,.$
  Meetkundig stelt dat een cirkel voor in het complexe vlak met middelpunt in het punt $-3i$ en straal 5.

d) *Toon aan dat de volgende gelijkheden gelden voor elk willekeurig complex getal z:*

$$Re\ z = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad en \qquad Im\ z = \frac{z-\overline{z}}{2i}\,.$$

Stel $z = x + iy$ dan geldt Re $z = x$ en Im $z = y$.

$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{1}{2}(z+\overline{z}) = \frac{1}{2}(x+iy+x-iy) = \frac{1}{2}(x+x) = x\,.$$

$$\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{1}{2i}(x+iy-(x-iy)) = \frac{1}{2i}(iy+iy) = y\,.$$

Opgave 2

Los de hierna volgende differentiaalvergelijkingen op waarbij steeds y een functie van t is.

a) i) *Bepaal de algemene oplossing van* $y'' + 3y' - 10y = 0$.

Invullen van $y = e^{\alpha t}$ levert $\alpha^2 + 3\alpha - 10 = 0$. De wortels hiervan zijn -5 en 2. De algemene oplossing is dus

$$y = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{2t}\,.$$

ii) *Bepaal in de onder i) gevonden oplossing de constanten zo dat* $y(0) = 5$ *en* $y'(0) = -4$.

We berekenen eerst y'; er geldt: $y' = -5C_1 e^{-5t} + 2C_2 e^{2t}$ ..
Invullen van $y(0)$ en $y'(0)$ levert $C_1 + C_2 = 5$ en $-5C_1 + 2C_2 = -4$.
De oplossing is $C_1 = 2$ en $C_2 = 3$.

b) i) *Bepaal de algemene oplossing van* $y'' + 2y' + y = 0$.

Invullen van $y = e^{\alpha t}$ levert $\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$..
Deze vergelijking heeft een dubbele wortel $\alpha = -1$.
De algemene oplossing is dan zoals we weten: $y = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$.

ii) *Breid de onder i) gevonden oplossing uit tot de algemene oplossing van* $y'' + 2y' + y = t^2 + 1$.

We proberen een oplossing van de vorm $y = at^2 + bt + c$. Dan geldt $y' = 2at + b$ en $y'' = 2a$. Voor $y'' + 2y' + y$ krijgen we dan $at^2 + (b+2a)t + (c+b+2a)$ en dit moet gelijk zijn aan $t^2 + 1$. Hieruit volgt $a = 1\,; b = -2$ en $c = 1$.

c) i) *Bepaal de oplossing van* $y' = 1/y$ *die voldoet aan* $y(0) = 2$.

De vergelijking schrijven als $dy/dt = 1/y$ leidt tot $y\,dy = dt$.
Links en rechts integreren levert $(1/2)y^2 = t + C_1$. Dit geeft $y = \sqrt{2t + C_2}$.
Wegens de beginvoorwaarde wordt dit $y = \sqrt{2t+4}$.

ii) *Bepaal de oplossing van* $y' = t^2 y^2$ *die voldoet aan* $y(0) = -1/2$.

Dit leidt tot $(1/y^2)\,dy = t^2\,dt$ met als oplossing $-1/y = (1/3)t^3 + C_1$.
Dit herleiden we tot $y = -3/(t^3 + C_2)$. Vanwege de beginwaarde wordt dit $y = -3/(t^3 + 6)$.

Opgave 3

a) *Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de volgende matrices:*

$$i: \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad ii: \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}; \quad iii: \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matrix i): De karakteristieke vergelijking ($\det(A - \lambda I) = 0$) levert $\lambda^2 - 1 = 0$. Hieruit volgt $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$. Eigenvectoren oplossen uit de homogene vergelijking $(A - \lambda I)x = 0$, levert voor $\lambda = 1: \ x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en voor $\lambda = -1: \ x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Matrix ii): De karakteristieke vergelijking is: $\lambda^2 - 10\lambda = 0$.

Hieruit volgt $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 10$. Eigenvector bij $\lambda = 0 : x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Eigenvector bij $\lambda = 10 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Matrix iii): De karakteristieke vergelijking is: $(2 - \lambda)^2(3 - \lambda) = 0$. Hieruit volgen een eigenwaarde $\lambda_1 = 3$ en een dubbel tellende eigenwaarde $\lambda_2 = 2$. De eigenvector bij $\lambda = 3 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; voor $\lambda = 2$ moeten we oplossen het homogene stelsel

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Een eigenvector (oplossing van dit stelsel) spring direct in het oog: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Een daarvan onafhankelijke eigenvector wordt gevonden uit de andere oplossing van dit stelsel: $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) *Beschouw de volgende Mathematica sessie:*

$L = \{\{2, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1/2\}\}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$A = \{\{1, 1, -2\}, \{1, 0, -1\}, \{-2, -1, 4\}\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$B = \text{Inverse}[A]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$M = A.L.B$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix}$$

i) *Wat zijn de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van M?*
(Je hoeft hier niets voor te berekenen; de antwoorden staan al in de gegevens!)
Ga uit van $M = A.L.B$. Hierin geldt $B = A^{-1}$. Dan staat er $M = A.L.A^{-1}$. Dit komt overeen met $M.A = A.L$. waarin L een diagonaalmatrix is. Hierin herkennen we de ontbinding van de matrix M in factoren die overeenkomen met egenwaarden en eigenvectoren van M. De drie diagonaalelementen van L zijn de drie eigenwaarden van M. Er geldt dus $\lambda_1 = 2\,; \lambda_2 = 1$ en $\lambda_3 = 1/2$. De drie kolommen van A zijn de bijbehorende eigenvectoren; dus de eerste kolom van A is eigenvector van M bij λ_1, de tweede kolom van A is eigenvector van M bij λ_2 en de derde kolom van A is de eigenvector van M bij λ_3.

ii) *Voor verscheidene keuzes van x_0 onderzoeken we het iteratieve systeem*

$$x_{n+1} = Mx_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

De kolommen van matrix A noemen we opeenvolgend p, q en r, dus

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad r = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Beschrijf het gedrag van x_n bij toenemende waarde van n voor de hierna volgende keuzes van x_0; in het bijzonder: als x_n een limietwaarde heeft, welke is dat?

$$1)\quad x_0 = q\,; \qquad 2)\quad x_0 = q + r\,; \qquad 3)\quad x_0 = p + r\,.$$

Geval 1). q is eigenvector bij eigenwaarde $\lambda = 1$. Dat betekent dat de vermenigvuldiging $M.q$ asl resultaat weer q oplevert. Itereren met q levert dus een constante rij vectoren allemaal gelijk aan q. De limiet is dus q.

Geval 2). $x0 = q + r$. Vectoren q en r zijn eigenvector bij respectievelijk $\lambda = 1$ en $\lambda = 1/2$. Na elke matrix-vector vermenigvuldiging wordt de component in de richting van r met $1/2$ vermenigvuldigd, terwijl de component in de richting van q ongewijzigd blijft. Op de duur krijgen we dus vectoren die willekeurig dicht bij q liggen; de limiet van de rij is dus q.

Geval 3). $x0 = p + r$. De component in de richting van p wordt steeds met 2 vermenigvuldigd, terwijl de component in de richting van r juist steeds door 2 wordt gedeeld. Op den duur krijgen we een vector met steeds grotere componenten (steeds ongeveer het dubbele), maar steeds beter in de richting van p. Er is geen sprake van een limiet. We zouden wel kunnen spreken over een “limietrichting”, maar dat werd niet gevraagd.