

# Wiskundige Methoden en Technieken voor Bèta-Gamma

## Toets 2

Vrijdag 19 december 2008; 13:00 - 16:00

Er zijn drie opgaven met onderling gelijk gewicht.

### Opgave 1

- a) Schrijf in Cartesische coördinaten (dus als  $x + iy$ ) de volgende complexe getallen:  
 $2e^{\frac{3}{2}i\pi}$ ,  $e^{\frac{3}{4}i\pi}$  en  $3e^{3i\pi}$ .

Schrijf in de vorm  $a + bi$ :  $1/i$ ,  $3/(1 + 2i)$  en  $(1 + i)/(1 - i)$ .

- b) Beschouw het complexe getal  $w = -1 + i$ .

Bereken  $-w$ ,  $\bar{w}$ ,  $|w|$  en  $\arg w$ .

Schrijf  $w$ ,  $-w$  en  $\bar{w}$  in poolcoördinaten.

- c) Los op (bepaal alle complexe getallen  $z$  waarvoor geldt):

- $z^2 - 2z + 10 = 0$ ;

- $\operatorname{Re} z = -3$  en  $\arg z = \frac{3\pi}{4}$ ;

bestaat er een complex getal met  $\operatorname{Re} z = +3$  en  $\arg z = \frac{3\pi}{4}$ ?  
(Beargumenteer je antwoord).

- $|z + 3i| = 5$ ; maak een tekening van de oplossing.

- d) Toon aan dat de volgende gelijkheden gelden voor elk willekeurig complex getal  $z$ :

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{en} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

### Opgave 2

Los de hierna volgende differentiaalvergelijkingen op waarbij steeds  $y$  een functie van  $t$  is.

- a) i) Bepaal de algemene oplossing van  $y'' + 3y' - 10y = 0$ .  
ii) Bepaal in de onder i) gevonden oplossing de constanten zo dat  $y(0) = 5$  en  $y'(0) = -4$ .
- b) i) Bepaal de algemene oplossing van  $y'' + 2y' + y = 0$ .  
ii) Breid de onder i) gevonden oplossing uit tot de algemene oplossing van  $y'' + 2y' + y = t^2 + 1$ .
- c) i) Bepaal de oplossing van  $y' = 1/y$  die voldoet aan  $y(0) = 2$ .  
ii) Bepaal de oplossing van  $y' = t^2 y^2$  die voldoet aan  $y(0) = -1/2$ .

### Opgave 3

a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de volgende matrices:

$$\text{i: } \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad \text{ii: } \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}; \quad \text{iii: } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Beschouw de volgende Mathematica sessie:

$$L = \{\{2, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1/2\}\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \{\{1, 1, -2\}, \{1, 0, -1\}, \{-2, -1, 4\}\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \text{Inverse}[A]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = A.L.B$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix}$$

- i) Wat zijn de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van  $M$ ?  
(Je hoeft hier niets voor te berekenen; de antwoorden staan al in de gegevens!)
- ii) Voor verscheidene keuzes van  $x_0$  onderzoeken we het iteratieve systeem

$$x_{n+1} = Mx_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

De kolommen van matrix  $A$  noemen we opeenvolgend  $p$ ,  $q$  en  $r$ , dus

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad r = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Beschrijf het gedrag van  $x_n$  bij toenemende waarde van  $n$  voor de hierna volgende keuzes van  $x_0$ ; in het bijzonder: als  $x_n$  een limietwaarde heeft, welke is dat?

$$1) \quad x_0 = q; \quad 2) \quad x_0 = q + r; \quad 3) \quad x_0 = p + r.$$