

# Uitwerkingen van de opgaven voor Wiskundige Methoden en Technieken

## Hoofdstuk 9, sectie 9.6; pagina's 144 en 145; opgaven 1 t/m 9

1. Bepaal van elk van de volgende matrices de determinant:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 17 & 48 \\ 0 & 3 & 52 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bij matrix  $A$  ontwikkelen we de determinant naar de eerste kolom; we krijgen dan:

$$\det(A) = 2 \times \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = 2 \times (49 - 35) = 28.$$

Bij  $B$  krijgen we bij ontwikkeling naar de eerste kolom:  $\det(B) = 2 \times \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = 2 \times (49 - 49) = 0$ .

We hadden natuurlijk ook direct kunnen constateren dat  $B$  een matrix is met afhankelijke rijen (rijen 2 en 3 zijn gelijk) en dat daarom geldt  $\det(B) = 0$ .

Bij  $C$  zien we dat die matrix een nulrij bevat en dat daarom  $\det(C) = 0$ .

Voor  $D$  geldt:  $\det(D) = 2 \times 3 \times 1 = 6$ ; in de ontwikkeling van  $\det(D)$  naar de eerste kolom blijkt dit de enige term te zijn die ongelijk nul is.

2. Bepaal (indien mogelijk) de inverse van de eerste twee volgende matrices en laat van de derde matrix zien dat hij zijn eigen inverse is.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

De drie kolomvectoren van  $A^{-1}$  duiden we aan met opeenvolgend  $x$ ,  $y$  en  $z$ . Voor  $x$  moeten we oplossen de vergelijking  $Ax = e_1$ , voor  $y$  de vergelijking  $Ay = e_2$  en voor  $z$  de vergelijking  $Az = e_3$ .

Oplossen van deze drie vergelijkingen, steeds met 3 onbekenden levert

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad z = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{waarmee dus geldt} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bij  $B$  zien we dat de matrix afhankelijke kolommen heeft; de derde kolom is de som van de eerste twee kolommen. Daarom heeft deze matrix geen inverse. Als we deze afhankelijkheid niet direct gezien zouden hebben, hadden we dezelfde strategie kunnen volgen als voor het bepalen van  $A^{-1}$ . Direct al bij de berekening van de eerste kolom van de beoogde inverse van  $B$  zouden we dan ontdekken dat we een strijdig stelsel vergelijkingen hebben waar geen oplossing bij gevonden kan worden. De conclusie luidt ook in dat geval dat  $B$  geen inverse heeft.

Bij  $C$  is het een kwestie van ijverig doorrekenen van het product  $C \times C$  om te constateren dat het

antwoord gelijk is aan  $I$ . We hebben dan  $C \times C = I$  waaruit volgt  $C^{-1} = C$ .

**3. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Eerst bepalen we de wortels van *het karakteristieke polynoom*  $\det(A - \lambda I) = 0$  wat hier neerkomt op

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Uitwerken levert  $(2 - \lambda) \times (-1 - \lambda) - 4 = 0$ .

Verder uitwerken leidt tot  $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ . Dit kan gefactoriseerd worden als  $(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$ .

We vinden hieruit de twee eigenwaarden  $\lambda_1 = 3$  en  $\lambda_2 = -2$ .

Voor de twee eigenvectoren moeten we de vergelijking  $(A - \lambda I)x = 0$  oplossen.

Voor de eerste eigenvector, horende bij  $\lambda_1 = 3$  moeten we dus oplossen

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} x = 0 \text{ met als oplossing } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Voor de tweede eigenvector moeten we oplossen  $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x = 0$  met als oplossing  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

**4. Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van de volgende matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Voor  $A$  vinden we als karakteristiek polynoom:  $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ .

De wortels hiervan zijn  $\lambda_1 = 5$  en  $\lambda_2 = 1$ . Voor de eigenvector bij  $\lambda_1 = 5$  moeten we oplossen

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x = 0 \text{ met als oplossing } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Voor de andere eigenvector moeten we oplossen  $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} x = 0$  met als oplossing  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Voor  $B$  vinden we als karakteristiek polynoom:  $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ .

De wortels hiervan zijn  $\lambda_1 = 3$  en  $\lambda_2 = -1$ .

Voor de eerste eigenvector, horende bij  $\lambda_1 = 3$  moeten we wederom oplossen

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x = 0 \text{ met als oplossing } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Voor de tweede eigenvector moeten we weer  $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} x = 0$  oplossen, met als oplossing  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Voor  $C$  gaan we eerst controleren of  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  misschien ook hier een eigenvector is; we rekenen

daarvoor  $Cx$  uit. Dan blijkt  $Cx = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  waaruit we concluderen dat  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  wederom een eigenvector

is en de bijbehorende eigenwaarde is  $\lambda_1 = -1$ . Omdat het spoor van de matrix gelijk is aan  $-6$  vinden

we voor de andere eigenwaarde  $\lambda_2 = -5$ . Bij deze eigenwaarde vinden we eigenvector  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Voor  $D$  gaan we na of  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ook hier een eigenvector is; er blijkt  $Dx = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . De betekenis

daarvan is dat  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  wederom een eigenvector is en de bijbehorende eigenwaarde is  $\lambda_1 = 0$ . Merk op dat een eigenvector NIET de nulvector mag zijn; een eigenWAARDE mag echter wel gelijk aan 0 zijn (zoals hier dus). Omdat hier voor het spoor geldt  $\text{tr}(D) = -4$  vinden we voor de andere eigenwaarde  $\lambda_2 = -4$ . Bij deze eigenwaarde vinden we eigenvector  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Voor  $E$  gaan we ook na of  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  een eigenvector is; dit blijkt niet het geval te zijn. Er geldt  $Ex = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$  en dat is geen veelvoud van  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Voor het karakteristieke polynoom van  $E$  vinden we  $\lambda^2 - 8 = 0$  waaruit volgt  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$ . Invullen van  $\lambda = 2\sqrt{2}$  om de homogene vergelijking voor de bijbehorende eigenvector te bepalen levert:  $\begin{pmatrix} 2 - 2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & -2 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix} x = 0$ .

Omdat de twee vergelijkingen die hier staan afhankelijk zijn (wegens het feit dat de matrix  $(E - \lambda I)$  singulier is, of anders gezegd: afhankelijke kolommen heeft) kunnen we van de twee vergelijkingen er eentje weglaten. Voor het bepalen van de eigenvector kijken we dus maar naar een van de twee vergelijkingen, zeg de eerste. Dit is de vergelijking:

$$(2 - 2\sqrt{2})x_1 + 2x_2 = 0.$$

Een oplossing hiervan is  $x_2 = 2 - 2\sqrt{2}$  en  $x_1 = -2$ . We kunnen beide componenten delen door 2 en krijgen dan de eigenvector  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$ .

Voor de andere eigenvector, horende bij  $\lambda = -2\sqrt{2}$ , lossen we op:  $\begin{pmatrix} 2 + 2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & -2 + 2\sqrt{2} \end{pmatrix} x = 0$ .

De oplossing definieert de tweede eigenvector  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$ .

**5.** Zij  $A$  een matrix met eigenwaarden  $\lambda_n, n = 1, 2, \dots$  en bij behorende eigenvectoren  $v_n, n = 1, 2, \dots$ . Toon aan dat de eigenwaarden van de matrix  $A - I$  gelijk zijn aan  $(\lambda_n - 1), n = 1, 2, \dots$  en dat de eigenvectoren onveranderd zijn gebleven.

Een getal  $\mu$  is een eigenwaarde van  $A - I$  dan en slechts dan als er een (niet nul) vector  $v$  bestaat zodat  $(A - I)v = \mu v$ . Voor de bovengenoemde vectoren  $v_n$  geldt

$$(A - I)v_n = Av_n - v_n = \lambda_n v_n - v_n = (\lambda_n - 1)v_n$$

dus dit zijn eigenvectoren van  $A - I$  met eigenwaarden  $\lambda_n - 1$ . Anderzijds als  $(A - I)v = \mu v$  dan  $Av = (\mu + 1)v$  dus moet  $\mu + 1$  gelijk zijn aan een  $\lambda_n$ . Met andere woorden, de getallen  $\lambda_n - 1, n = 1, 2, \dots$  zijn precies alle eigenwaarden van  $A - I$ .

**6.** Laat  $A$  een niet-singuliere matrix zijn. Toon aan dat de eigenwaarden van  $A^{-1}$  de inverses zijn van de eigenwaarden van  $A$ , en dat de eigenvectoren onveranderd zijn gebleven.

Stel dat  $v$  een eigenvector van  $A$  is bij de eigenwaarde  $\lambda$  dan geldt  $Av = \lambda v$ . Omdat  $A$  niet singulier is, kunnen we linker- en rechterkant van deze gelijkheid met  $A^{-1}$  vermenigvuldigen.

Dit levert  $A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v$  wat ook geschreven kan worden als  $\lambda A^{-1}v = v$ . Links en rechts door  $\lambda$  delen, geeft  $A^{-1}v = (1/\lambda)v$ . Dus  $v$  is ook een eigenvector van  $A^{-1}$ , maar nu bij de eigenwaarde  $\lambda^{-1}$ .

Net zo volgt dat als  $w$  een eigenvector van  $A^{-1}$  bij de eigenwaarde  $\mu$  is, het ook een eigenvector van  $A$  met eigenwaarde  $\mu^{-1}$  is.

**7.** Neem  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  en bepaal  $A^n$  op dezelfde manier als in voorbeeld (9.4.1).

Eerst moeten we de eigenwaarden en eigenvectoren van  $A$  bepalen. Het loont altijd de moeite om bij een  $2 \times 2$  matrix even te kijken of  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  een eigenvector is; en jawel, het is een eigenvector bij eigenwaarde  $\lambda_1 = -1$ . Omdat het spoor gelijk is aan  $-4$ , geldt voor de andere eigenwaarde  $\lambda_2 = -3$ . Bij de eigenwaarde  $-3$  vinden we via de bekende oplossingsmethode de eigenvector  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

In het voorbeeld in de syllabus wordt de matrix van eigenvectoren  $B$  genoemd. We gebruiken de uitdrukking  $A = BAB^{-1}$  en moeten daarvoor  $B^{-1}$  uitrekenen.

$$\text{Bij } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ geldt } B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hieruit volgt:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Voor  $A^n$  levert dit

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n \\ (-3)^n & -(-3)^n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n + (-3)^n & (-1)^n - (-3)^n \\ (-1)^n - (-3)^n & (-1)^n + (-3)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**8.** *Wat zijn de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren van de projector*

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Een projector heeft als eigenwaarden uitsluitend nullen en enen. De som van de eigenwaarden is gelijk aan  $\text{tr}(P)$  en is dus gelijk aan de multipliciteit van de eigenwaarde 1; hoe vaak 1 dus als eigenwaarde geteld moet worden. Hier geldt  $\text{tr}(P) = 1$ , dus 1 is een enkelvoudige eigenwaarde.

Bij elke eigenwaarde 1 hoort een vector uit de beeldruimte van  $P$ . Alle eigenvectoren bij eigenwaarde 1 vormen een basis voor de beeldruimte.

In dit geval heeft de beeldruimte dimensie 1 en wordt opgespannen door  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Bij elke eigenwaarde 0 hoort een eigenvector uit de nulruimte van de matrix. Alle eigenvectoren bij eigenwaarde 0 vormen een basis voor de nulruimte. De nulruimte staat bij (orthogonale) projectoren loodrecht op de beeldruimte. In dit geval heeft de nulruimte dimensie 2 en kunnen we dus als eigen-

vectoren 2 onafhankelijke vectoren (een basis) uit die nulruimte kiezen. We kiezen  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

**9.** *Dezelfde vraag voor de projector  $I - P$ .*

De projector  $I - P$  heeft dezelfde eigenvectoren als de projector  $P$  met dien verstande dat de eigenvectoren bij eigenwaarde 1 van  $P$  nu de eigenvectoren zijn die bij de eigenwaarde 0 van  $I - P$  horen en vice versa. Dit volgt uit het feit dat de beeldruimte van  $P$  gelijk is aan de nulruimte van  $I - P$  en vice versa.

Ofschoon het niet gevraagd wordt, ziet de projector  $I - P$  er uit als  $I - P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

De beeldruimte van  $I - P$  heeft dimensie 2, en wordt opgespannen door  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ , 2 eigenvectoren bij eigenwaarde 1. De nulruimte heeft dimensie 1 en wordt opgespannen door eigenvector  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  bij de eigenwaarde 0.