Uitwerkingen van de opgaven voor Wiskundige Methoden en Technieken

Hoofdstuk 11, sectie 11.4; pagina's 178, 179; opgaven 1 t/m 4

1. *Beschouw een vectoriële grootheid* $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ *waarvan de verandering in de tijd gegeven is door de vergelijking* $\dfrac{dx}{dt} = Ax$ *met* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) *Schrijf de vergelijking uit als een stelsel van twee lineaire differentiaalvergelijkingen.*

$$\frac{dx_1}{dt} = 3x_1 \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_2$$

(b) *Wat is de algemene formule voor de oplossing* $x(t)$ *op een willekeurig tijdstip* t*?*

De eigenwaarden zijn 3 en -1 en de bijbehorende eigenvectoren zijn $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. De algemene oplossing is dus

$$x(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} \\ C_2 e^{-t} \end{pmatrix} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(c) *Wat zijn achtereenvolgens* $x(1), x(2), x(4)$ *en* $x(8)$ *bij* $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*?*

$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ houdt in $C_1 = 1$ en $C_2 = 0$. dus $x(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) *Hoe luiden de antwoorden bij (c) voor* $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$*?*

$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ dus $x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10e^{-t} \end{pmatrix}$. Merk op dat $x(8) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10e^{-8} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) *Hoe luiden de antwoorden bij (c) voor* $x(0) = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 10 \end{pmatrix}$*?*

$x(0) = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 10 \end{pmatrix}$ dus $x(t) = \begin{pmatrix} 0.01e^{3t} \\ 10e^{-t} \end{pmatrix}$.

In tegenstelling tot (d) hebben we nu $x(8) = \begin{pmatrix} 0.01e^{24} \\ 10e^{-8} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.65 \cdot 10^8 \\ 0 \end{pmatrix}$

(f) *Bij gegeven* $x(0)$ *ligt het verloop van* $x_1(t)$ *en* $x_2(t)$ *vast. De relatie tussen* x_1 *en* x_2 *kan grafisch worden weergegeven door een kromme in het* (x_1, x_2)*-vlak. Geef de algemene vergelijking voor een willekeurige keuze* $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Uit (b) zien we $C_1 = \alpha$ en $C_2 = \beta$. Voor $x_2 (= x_2(t))$ hebben we dan:
$x_2 = \beta e^{-t}$; links en rechts vermenigvuldigen met e^t en delen door x_2 levert $e^t = \beta / x_2$.
Voor $x_1 (= x_1(t))$ hebben we voor $\alpha \neq 0$: $x_1(t)/\alpha = e^{3t}$. Met $e^{3t} = (e^t)^3$ en de vergelijking $e^t = \beta / x_2$

vinden we hieruit $x_1(t)/\alpha = (\beta/x_2)^3$. Dit is equivalent met $x_1 = \alpha\beta^3 x_2^{-3}$, wat een soort hyperbool beschrijft. De gevallen $\alpha = 0$ of $\beta = 0$ leveren vijf banen die er echt anders uitzien: het zadelpunt $(0,0)^T$ en de positieve en negatieve helften van de x_1- en de x_2-as.

2. *Beschouw een vectoriële grootheid* $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ *waarvan de verandering in de tijd gegeven is door de vergelijking* $\frac{dx}{dt} = Ax$ *met* $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) *Bereken de eigenwaarden en de eigenvectoren van A.*

$\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(-1-\lambda)$, dus de eigenwaarden zijn $\lambda_1 = 3$ en $\lambda_2 = -1$.

De bijbehorende eigenvectoren zijn $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) *Wat is de algemene formule voor de oplossing $x(t)$ op een willekeurig tijdstip t?*

$$x(t) = \alpha v_1 e^{\lambda_1 t} + \beta v_2 e^{\lambda_2 t} = \alpha e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(c) *Wat zijn achtereenvolgens $x(1), x(2), x(4)$ en $x(8)$ bij $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?*

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x(0) = \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ 2\beta \end{pmatrix}$ dus $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ en $x(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) *Hoe luiden de antwoorden bij (c) voor $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$?*

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix} = x(0) = \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ 2\beta \end{pmatrix}$ dus $(\alpha, \beta) = (0, 1/3)$ en $x(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.
Merk op dat $\lim_{t\to\infty} x(t) = (0,0)^T$.

(e) *Hoe luiden de antwoorden bij (c) voor $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.666 \end{pmatrix}$?*

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.666 \end{pmatrix} = x(0) = \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ 2\beta \end{pmatrix}$ dus $(\alpha, \beta) = (0.001, 0.333)$ en $x(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 0.001 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 0.999 \\ 0.666 \end{pmatrix}$.
Er geldt nu bijvoorbeeld

$$x(8) = e^{24} \begin{pmatrix} 0.001 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-8} \begin{pmatrix} 0.999 \\ 0.666 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.65 \cdot 10^7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(f) *Hoe luiden de antwoorden bij (c) voor $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.668 \end{pmatrix}$?*

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.666 \end{pmatrix} = x(0) = \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ 2\beta \end{pmatrix}$ dus $(\alpha, \beta) = (-0.002, 0.334)$ en $x(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} -0.002 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 1.002 \\ 0.668 \end{pmatrix}$.
Nu hebben we op $t = 8$

$$x(8) = e^{24} \begin{pmatrix} -0.002 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-8} \begin{pmatrix} 1.002 \\ 0.668 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -5.3 \cdot 10^7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Als we de gevallen (d), (e) en (f) vergelijken zien we dat altijd $\lim_{t\to\infty} x_2(t) = 0$, maar dat $\lim_{t\to\infty} x_1(t)$ afhankelijk van een kleine verandering in de begintoestand gelijk kan zijn aan $\infty, -\infty$ of 0.

(g) *Geef een kwalitatieve beschrijving van de algemene oplossing. Hoe zien de banen van de oplossingen eruit? Wat is het karakter van het singuliere punt $(0,0)^T$?*

De algemene baan is een hyperbool die nadert aan de x_1-as als $t \to \infty$ en aan de lijn door $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ als $t \to -\infty$. Dit betekent dat het punt $(0,0)^T$ in één richting aantrekkend is en in andere richtingen afstotend, ofwel het is een zadelpunt.

3. *Geheel als opgave 2, maar dan met de matrix* $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

eigenwaarden: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$
eigenvectoren: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
algemene oplossing: $x(t) = \alpha e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
Als $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $x(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{pmatrix}$.
Als $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ dan $x(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.
Als $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.666 \end{pmatrix}$ dan $x(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 0.001 \\ 0 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0.999 \\ 0.666 \end{pmatrix}$.
Als $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.668 \end{pmatrix}$ dan $x(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} -0.002 \\ 0 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1.002 \\ 0.668 \end{pmatrix}$.
Merk op dat in de laatste twee gevallen voor grote t de eerste term overheerst, aangezien e^{3t} dan veel groter is dan e^t.
Het dekpunt $(0,0)^T$ is afstotend en alle banen die niet in de lijn door v_2 liggen zullen voor grote t naderen aan de x_1-as.

4. (Facultatief.) *Beschouw een vectoriële grootheid* $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ *waarvan de verandering in de tijd gegeven is door de vergelijking* $\frac{dx}{dt} = Ax$ *met* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) *Bereken de eigenwaarden en de eigenvectoren van A.*
$\det(A - \lambda I) = (-1-\lambda)^2$, dus de enige eigenwaarde is -1
De bijbehorende eigenvector is $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ is een gegeneraliseerde eigenvector, oftewel $(A + I)w = v$.

(b) *Wat is de algemene formule voor de oplossing* $x(t)$ *op een willekeurig tijdstip* t*?*

$$x(t) = \beta v e^{-t} + \alpha(tv + w)e^{-t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta e^{-t} \end{pmatrix} + \alpha e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(c) *Wat zijn achtereenvolgens* $x(1), x(2), x(4)$ *en* $x(8)$ *bij* $x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$*?*

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ dus $x(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 + 3t \end{pmatrix}$.

(d) *Hoe luiden de antwoorden bij (c) voor* $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*? Geef een vergelijking van de baan in het* (x_1, x_2)*-vlak.*
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ dus $x(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$. Een baanvergelijking kunnen we vinden door t te elimineren uit deze parametrisatie. Bijvoorbeeld $x_2/x_1 = t = -\ln(x_1)$, dus $x_2 = -x_1 \ln(x_1)$.

(e) *Hoe luiden de antwoorden bij (c) voor* $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*? Geef een vergelijking van de baan in het* (x_1, x_2)*-vlak.*

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ dus $x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$. De baanvergelijking is dan gewoon $x_1 = 0$, maar de baan beslaat daarvan alleen die punten waarvoor ook nog $x_2 > 0$.

(f) *Geef de baanvergelijking voor een willekeurige keuze* $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Uit onderdeel (b) kunnen we afleiden dat

$$\frac{x_2}{x_1} - \frac{\beta}{\alpha} = t = -\ln\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)$$

$$x_2 = \frac{\beta}{\alpha}x_1 - x_1 \ln\left(\frac{x_1}{\alpha}\right) = \frac{x_1}{\alpha}\left(\beta - \alpha \ln\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)\right)$$