

# Wiskundige Methoden en Technieken voor Bèta-Gamma

## Herkansing

Wie alleen Toets 1 wil herkansen maakt opgaven 1, 2 en 3;

Wie alleen Toets 2 wil herkansen maakt opgaven 4, 5 en 6.

Wie een tentamen wil doen over de hele stof ter vervanging van toets 1 EN toets 2, maakt opgaven 3, 5, 6 en de onderdelen c en d van opgave 4.

woensdag 3 februari 2010; 13:00 - 16:00

### Opgave 1:

**A:** Beschouw de volgende twee reeksen:

a.  $3 - 9 + 27 - 81 + \dots$

b.  $\frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \dots$

Bepaal van beide reeksen

- de rede  $r$
- de algemene term  $a_n$
- de partiële som  $S_n$

Voor a) geldt:  $r = -3$ ;  $a_n = 3 \times (-3)^{n-1}$ ;  $s_n = \frac{3}{4}(1 - (-3)^n)$ .

Voor b) geldt:  $r = 1/2$ ;  $a_n = \frac{3}{4}(\frac{1}{2})^{n-1}$ ;  $s_n = \frac{3}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n)$ .

**B:** Beschouw de functie  $g(x) = x^3 - 2x^2 - 6x + 14$

waarmee dekpuntiteratie  $x_{n+1} = g(x_n)$  wordt uitgevoerd.

i) Toon aan dat  $g$  een dekpunt  $s = 2$  heeft.

Invullen levert:  $g(2) = 8 - 8 - 12 + 14 = 2$  waarmee het gevraagde is aangetoond.

ii) Toon aan dat  $g$  nog twee andere dekpunten  $s$  heeft die voldoen aan  $s^2 = 7$ .

Dat moet dus inhouden een dekpunt  $\sqrt{7}$  en een dekpunt  $-\sqrt{7}$ .

Voor  $\sqrt{7}$  geldt:  $g(\sqrt{7}) = (\sqrt{7})^3 - 2 \times 7 - 6\sqrt{7} + 14 = 7\sqrt{7} - 6\sqrt{7} = \sqrt{7}$

en analoog geldt  $g(-\sqrt{7}) = -\sqrt{7}$  waarmee het gevraagde is aangetoond.

iii) Bepaal voor de drie dekpunten van welke aard ze zijn: aantrekkend, afstotend of onbekend.

Er is sprake van een aantrekkend dekpunt  $s$  als geldt  $|g'(s)| < 1$  en afstotend als  $|g'(s)| > 1$ ; indien zou gelden  $|g'(s)| = 1$  kan er vooralsnog geen uitspraak gedaan worden.

Voor de afgeleide van  $g$  geldt  $g'(x) = 3x^2 - 4x - 6$ .

Hiermee vinden we  $g'(2) = -2$ ;  $g'(\sqrt{7}) = 15 - 4\sqrt{7}$  en  $g'(-\sqrt{7}) = 15 + 4\sqrt{7}$ .

We zien direct dat de dekpunten 2 en  $-\sqrt{7}$  dus afstotend zijn.

Omdat  $\sqrt{7} < 3$  geldt dus  $15 - 4\sqrt{7} > 15 - 12$  en omdat dat groter is dan 1, is het dekpunt  $-\sqrt{7}$  ook afstotend.

## Opgave 2:

- a) Bereken de afstand tussen de punten  $A$  en  $B$  met  $A = (1, -1, 1)$  en  $B = (6, 11, 1)$ . Die afstand is de lengte van de verschilvector  $v$  met  $v = a - b$  waarin  $a$  de vector naar punt  $A$  en  $b$  de vector naar punt  $B$ .

$$\text{Voor } v \text{ vinden we } v = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De lengte hiervan is  $\sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$ .

- b) Voor de cosinus van de hoek  $\phi$  tussen twee vectoren  $a$  en  $b$  kennen we de volgende formule:

$$\cos \phi = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}.$$

$$\text{Bereken de cosinus van de hoek tussen de vectoren } p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ en } q = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

De gevraagde cosinus is dus de uitkomst van

$$\frac{\langle p, q \rangle}{\|p\| \|q\|}$$

bij de gegeven vectoren  $p$  en  $q$ . We berekenen  $\langle p, q \rangle = 4 + 0 + 0 + 8 = 12$ ;

$\|p\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$  en  $\|q\| = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6$ .

Voor de gevraagde cosinus levert dit  $12/18 = 2/3$ .

- c) Met vectoren  $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  en  $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  en een willekeurige constante  $\lambda$  kijken we

naar de lineaire combinatie  $p = \lambda a + b$ .

Voor welke waarde van  $\lambda$  staan  $a$  en  $p$  loodrecht op elkaar?

Hoe ziet vector  $p$  er uit voor deze waarde van  $\lambda$ ?

Wegens  $\lambda a = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ -2\lambda \end{pmatrix}$  geldt  $p = \begin{pmatrix} \lambda - 1 \\ 2\lambda + 3 \\ -2\lambda + 1 \end{pmatrix}$ . Orthogonaliteit geldt als  $\langle a, p \rangle = 0$ .

Met  $\langle a, p \rangle = 1 \times (\lambda - 1) + 2 \times (2\lambda + 3) + (-2) \times (-2\lambda + 1) = 9\lambda + 3$

levert dit dus  $9\lambda + 3 = 0$  hetgeen leidt tot  $\lambda = -1/3$ . Hiermee geldt  $p = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 7/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$

en we kunnen door een eenvoudige berekening van het inproduct  $\langle a, p \rangle$  controleren dat deze vector inderdaad loodrecht op  $a$  staat.

### Opgave 3:

- a) Geef voor het vlak  $V : 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 9$  een parametervoorstelling van de vorm  $x = p + \lambda a + \mu b$  waarbij  $a$  en  $b$  richtingsvectoren van  $V$  zijn en  $p$  een plaatsvector is.

Voor  $a$  en  $b$  kunnen we willekeurige (mits onafhankelijke) vectoren kiezen die evenwijdig lopen aan  $V$ ; dat zijn dus vectoren die voldoen aan  $3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0$ .

We kiezen  $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  en  $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Voor  $p$  kunnen we een vector kiezen die naar een

willekeurig punt in  $V$  wijst; we kiezen  $p = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

waarmee een parametervoorstelling van  $V$  dus gegeven wordt door

$$V : x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

- b) Geef een vergelijking voor het vlak  $W$  dat in een parametervoorstelling gegeven is door

$$W : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Een willekeurige vector  $x$  in  $W$  is kennelijk gegeven door  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + \lambda \\ 1 - \mu \\ 2 + \lambda + 2\mu \end{pmatrix}$ .

Hier staan in feite 3 vergelijkingen voor  $x_1, x_2$  en  $x_3$  waaruit we de onbekenden  $\lambda$  en  $\mu$  moeten elimineren. Als we dit zorgvuldig doen krijgen we als resultaat een vergelijking voor het vlak  $W$ :

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

- c) Hoe groot is de hoek tussen de vlakken  $V$  en  $W$  uit het voorafgaande?  
(Aanwijzing: de hoek tussen twee vlakken is gelijk aan de hoek tussen de normaalvectoren op die vlakken.)

Een vector loodrecht op  $V$ , in de richting van de normaalvector is  $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

We zouden net zo goed  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  mogen beschouwen, want voor hoeken tussen vec-

toren is alleen de richting van belang. Een vector loodrecht op  $W$  is  $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Het inwendig product tussen  $v$  en  $w$  is 0, dus de vectoren  $v$  en  $w$  staan loodrecht op elkaar, waaruit volgt dat de vlakken  $V$  en  $W$  loodrecht op elkaar staan.

## Opgave 4

- a) Schrijf in Cartesische coördinaten (dus als  $x + iy$ ) de volgende complexe getallen:  
 $e^{\frac{17}{4}i\pi}$ ,  $\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}i\pi}$  en  $3e^{12i\pi}$ .

De 3 antwoorden zijn:  $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$ ;  $-1 + i$  en 3.

Schrijf in de vorm  $a + bi$ :  $-1/i$ ,  $3/(1 - 3i)$  en  $1/(1 + i)$ .

De 3 antwoorden zijn:  $i$ ;  $\frac{3}{10} + \frac{9}{10}i$  en  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ .

- b) Beschouw het complexe getal  $w = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ .

Bereken  $-w$ ,  $\bar{w}$ ,  $|w|$  en  $\arg w$ .

Schrijf  $w$ ,  $-w$  en  $\bar{w}$  in poolcoördinaten.

Tot onze spijt was  $i$  weggefallen bij de definitie van  $w$ ; bedoeld was  $w = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ . Sommigen hebben het zo opgevat en hebben de opgave gemaakt met toevoeging van de imaginaire eenheid  $i$ . Anderen die dat niet gedaan hebben, konden de opgave ook maken; het getal  $w$  is dan een complex getal met imaginair deel 0 en alle vragen kunnen ook in die situatie beantwoord worden. In beide gevallen is het mogelijk om de vragen correct te beantwoorden.

Eerst de beantwoording voor de 'gecorrigeerde waarde'  $w = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ .

Dan geldt:  $-w = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ ;  $\bar{w} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ ;  $|w| = 1$  en  $\arg w = \frac{5}{3}\pi$ .

Voor de poolcoördinaten geldt:  $w = e^{\frac{5}{3}\pi}$ ;  $-w = e^{\frac{2}{3}\pi}$  en  $\bar{w} = e^{\frac{1}{3}\pi}$ .

Dan de beantwoording voor  $w = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ .

Dan geldt  $-w = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ;  $\bar{w} = w = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ .

Let op!  $w$  is negatief, dus  $|w| = -w = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$  en  $\arg w = \pi$ .

Voor de poolcoördinaten geldt:  $w = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3})e^{i\pi}$ ;  $-w = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3})$  (daar hoeft niet achter te staan  $\times e^0$ ) en  $\bar{w} = w = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3})e^{i\pi}$ .

- c) Los op (bepaal alle complexe getallen  $z$  waarvoor geldt):

- $z^2 - z + \frac{5}{2} = 0$ ;

Toepassen van de a,b,c-formule levert  $z = \frac{1 \pm \sqrt{1-10}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$ .

- $\operatorname{Re} z = 3$  en  $\arg z = \frac{7\pi}{4}$ ;

Het bedoelde getal is  $z = 3 - 3i$

bestaat er een complex getal met  $\operatorname{Re} z = -3$  en  $\arg z = \frac{7\pi}{4}$ ?  
(Beargumenteer je antwoord).

Een complex getal met negatief reeel deel kan alleen maar in het tweede of derde kwadrant liggen. Als het argument gelijk is aan  $\frac{7\pi}{4}$  moet het in het vierde kwadrant liggen en dat valt niet met elkaar te verenigen.

- $|z - 1 - i| = |z + 1 - i|$ ; maak een tekening van de oplossing.

Kies het onbekende getal  $z$  met onbekend reeel deel  $x$  en onbekend imaginair deel  $y$ , dan geldt dus  $z = x + iy$ .

$z - 1 - i = (x - 1) + i(y - 1)$  en  $z + 1 - i = (x + 1) + i(y - 1)$ .

Dan geldt dus  $|z - 1 - i| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$  en  $|z + 1 - i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}$ .

De twee absolute waarden zijn gelijk als geldt:  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (x + 1)^2 + (y - 1)^2$ . Merk op dat  $y$  uit deze vergelijking weg valt. We houden over

$(x - 1)^2 = (x + 1)^2$ ; uitwerken levert:  $x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1$  hetgeen uiteindelijk neerkomt op  $x = 0$ . Dit zijn precies alle complexe getallen  $z$  met reeel deel  $x$  gelijk aan 0, of anders gezegd: zuiver imaginaire getallen.  
 Conclusie: de vergelijking heeft als oplossing elk willekeurig imaginair getal.

- d) • *Beschouw het getal  $u = 1 + i\sqrt{3}$ . Bereken de voorstelling van  $u$  in poolcoördinaten en bereken dan  $u^6$ ; schrijf de uitkomst zowel in poolcoördinaten als in Cartesische coördinaten.*  
 Er geldt  $u = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{1}{3}i\pi}$ . Dan blijkt  $u^6 = (2e^{\frac{1}{3}i\pi})^6 = 2^6 e^{\frac{6}{3}i\pi} = 64e^{2i\pi} = 64$ .
- *Bereken de twee mogelijke uitkomsten van  $\sqrt{i}$  en geef de antwoorden in poolcoördinaten en Cartesische coördinaten.*  
 $\sqrt{i} = i^{1/2} = (1e^{\frac{1}{2}i\pi})^{1/2} = e^{\frac{1}{4}i\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{2}$ .  
 Dit was een antwoord.  
 Het andere antwoord krijgen we indien we starten met  $i = e^{\frac{5}{2}i\pi}$  Dan volgt:  
 $\sqrt{i} = i^{1/2} = (1e^{\frac{5}{2}i\pi})^{1/2} = e^{\frac{5}{4}i\pi} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}$ .

## Opgave 5

- a) *Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de volgende matrices:*

$$i: \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad ii: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad iii: \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bij i): eigenwaarden 3 en -2 en bijbehorende eigenvectoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

Bij ii): eigenwaarden 7 en 0 en bijbehorende eigenvectoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Bij iii) eigenwaarden 3 (dubbel tellend) en 2.

Bij de eigenwaarde 3 bestaat een vlak van eigenvectoren; elke lineaire combinatie van  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  is een eigenvector. Bij eigenwaarde 2 hoort eigenvector  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- b) *Gegeven is  $A = \begin{pmatrix} 1 & -0.01 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$ .*

- i) *Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van  $A$*

De eigenwaarden zijn  $\frac{4}{5}$  en  $\frac{1}{5}$ .

De bijbehorende eigenvectoren zijn resp.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 20 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 1 \\ 80 \end{pmatrix}$ .

*Voor een gegeven vector  $x_0$  wordt een rij vectoren  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  gedefinieerd door  $x_i = Ax_{i-1}; i = 1, 2, 3, \dots$ .*

*Voor  $x_n$  uit de rij iteranden geldt  $x_n = Ax_{n-1} = A.Ax_{n-2} = \dots = A^n x_0$ .*

Laat  $X$  de matrix van eigenvectoren zijn en  $\Lambda$  de (diagonaal-)matrix van eigenwaarden. De volgorde der eigenvectoren in  $X$  moet overeenkomen met de ordening van de eigenwaarden langs de diagonaal van  $\Lambda$ . Dan geldt voor machten van  $A$ :  $A^n = X\Lambda^n X^{-1}$ . Omdat de diagonaalelementen van  $\Lambda$  allemaal kleiner zijn dan 1 geldt dat  $\Lambda^n$  voor toenemende  $n$  steeds meer op de nulmatrix gaat lijken. Dit betekent voor elke vector  $x_0$  dat  $A^n x_0 = X\Lambda^n X^{-1}x_0$  steeds meer op de nulvector gaat lijken.

- ii) *Als de iteratie wordt gestart met  $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  wat je kun je dan zeggen over  $x_n$  bij toenemende waarden van  $n$ ?*  
 Volgens de redenering hierboven (geldig voor elke vector) zal  $x_n$  steeds meer op de nulvector gaan lijken.
- iii) *Wat kun je zeggen over  $x_n$  bij toenemende waarde van  $n$  indien de iteratie wordt gestart met een vector  $x_0$  die willekeurig gekozen is?*  
 Zie het antwoord hierboven; ongeacht de startvector zal  $x_n$  steeds dichterbij de nulvector komen te liggen.

### Opgave 6

Los de hierna volgende differentiaalvergelijkingen op waarbij steeds  $x$  een functie van  $t$  is.

- a) i) *Bepaal de algemene oplossing van  $x'' - 7x' + 12x = 0$ .*  
 Invullen van  $e^{\alpha t}$  levert  $\alpha^2 - 7\alpha + 12 = 0$ . Oplossingen  $\alpha_1 = 4; \alpha_2 = 3$ .  
 De algemene oplossing is dus:  $x = C_1 e^{4t} + C_2 e^{3t}$ .
- ii) *Bepaal in de onder i) gevonden oplossing de constanten zo dat  $x(0) = 2$  en  $x'(0) = 7$ .*  
 Invullen van  $t = 0$  levert  $x(0) = C_1 + C_2 = 2$ . Wegens  $x' = 4C_1 e^{4t} + 3C_2 e^{3t}$  geldt  $x'(0) = 4C_1 + 3C_2 = 7$ . Hieruit volgt  $C_1 = C_2 = 1$ .
- b) i) *Bepaal de oplossing van  $x' = 1/x^2$  die voldoet aan  $x(0) = 1$ .*  
 Uit  $dx/dt = 1/x^2$  volgt  $x^2 dx = dt$ .  
 Links en rechts integreren levert  $1/3 x^3 = t + C$ .  
 Via  $x^3 = 3t + 3C$  levert dit  $x = \sqrt[3]{3t + 3C}$ . Invullen van de beginvoorwaarde leert  $3C = 1$ , dus de oplossing is  $x = \sqrt[3]{3t + 1}$ .
- ii) *Bepaal de oplossing van  $x' = -tx^4/3$  die voldoet aan  $x(0) = 1$ .*  
 Uit  $dx/dt = -tx^4/3$  volgt  $\frac{-3}{x^4} dx = t dt$ .  
 Links en rechts integreren levert  $\frac{1}{x^3} = 1/2 t^2 + C$ . Hieruit volgt  $x^3 = \frac{2}{t^2 + 2C}$  wat neerkomt op  $x = \sqrt[3]{2/(t^2 + 2C)}$ . Invullen van de beginvoorwaarde leidt tot  $2C = 2$  waarmee de oplossing gegeven wordt door  $x = \sqrt[3]{2/(t^2 + 2)}$ .
- c) *Van matrix  $A$  zijn de eigenwaarden en eigenvectoren gegeven:  $\lambda_1 = -1$  met bijbehorende eigenvector  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ;  $\lambda_2 = -2$  met bijbehorende eigenvector  $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .*  
 Beschouw voor matrix  $A$  en een gegeven vector  $w \in \mathbf{R}^2$  de differentiaalvergelijking  $\frac{dx}{dt} = Ax$ ,  $x(0) = w$ .

- i) *Wat is de algemene formule voor de oplossing en van welk type is het punt  $(0, 0)$ ?*

Met de gegeven eigenwaarden en -vectoren kunnen we de algemene vorm van de vergelijking opstellen:

$$x = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}. \text{ De oorsprong is een aantrekkende knoop.}$$

- ii) *Bepaal de algemene vergelijking van de baankromme voor een oplossing van de differentiaalvergelijking.*

Benoem de twee componenten van  $x$  door te stellen  $x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ . Dan geldt

$$x(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-t} \\ -C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

In feite staan hier 2 vergelijkingen:  $u = C_1 e^{-t}$  en  $v = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$ . Uit deze 2 vergelijkingen moeten we  $t$  elimineren om de baanvergelijking te krijgen. Uit de eerste vergelijking vinden we  $e^{-t} = u/C_1$ . Dit vullen we in in de tweede vergelijking en we realiseren ons dat  $e^{-2t} = (e^{-t})^2$ .

Dat levert  $v = -u + C_2(u/C_1)^2$ . Met invoering van de nieuwe constante  $C_3 = C_2/C_1^2$  leidt dit tot  $v = -u + C_3 u^2$ .

Dat stelt een familie van parabolen voor die allemaal door de oorsprong gaan en afhankelijk van het teken van  $C_3$  dus bergparabolen of dalparabolen zijn.

- iii) *Wat is voor elk van de drie hierna genoemde beginsituaties het gedrag van de oplossing voor  $t$  gaat naar oneindig:*

$$1) \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 2) \quad w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 3) \quad w = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In situatie 1) geldt in de algemene oplossing  $C_1 = 0$ . Als we ons de oplossing voorstellen als een deeltje dat zich door het  $u, v$ -vlak beweegt, hebben we hier de situatie dat het deeltje vanuit het punt  $(0,1)$  zich in rechte lijn naar  $(0,0)$  beweegt.

In situatie 2) geldt in de algemene oplossing  $C_2 = 0$ . Het deeltje beweegt zich nu in rechte lijn vanuit het punt  $(-1,1)$  naar de oorsprong.

In situatie 3) beweegt het deeltje zich langs een van de parabolen uit de hiervoor geschetste familie, startende in  $(-2,1)$  langs een baan van een bergparabool naar de oorsprong en langs een weg die in de oorsprong raakt aan de vector  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Succes!**