Wiskundige Methoden en Technieken voor Bèta-Gamma

Toets 2

Vrijdag 18 december 2009; 9:00 - 12:00

Er zijn drie opgaven met onderling gelijk gewicht.

Opgave 1

Los de hierna volgende differentiaalvergelijkingen op waarbij steeds y een functie van t is.

a) i) *Bepaal de algemene oplossing van $y'' - 5y' + 6y = 0$.*
Probeer een oplossing van de gedaante $y = e^{pt}$. Invullen levert $p^2 - 5p + 6 = 0$.
De wortels zijn $p_1 = 2$ en $p_2 = 3$.
De algemene oplossing wordt dus $y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$.

ii) *Bepaal in de onder i) gevonden oplossing de constanten zo dat $y(0) = 2$ en $y''(0) = 13$.*
Invullen $y(0) = 2$ levert $C_1 + C_2 = 2$. Voor de tweede afgeleide in 0 geldt: $y''(0) = 4C_1 + 9C_2 = 13$. Samen levert dit $C_1 = C_2 = 1$.

b) i) *Laat zien dat Ce^t een oplossing is van $y''' - y' = 0$.*
Invullen laat zien dat het klopt.

ii) *Breid de onder i) gevonden oplossing uit tot de algemene oplossing van $y''' - y' = 0$.*
Invullen van $y = e^{pt}$ levert $p^3 - p = 0$ waaruit volgt $p_1 = 1; p_2 = -1$ en $p_3 = 0$.
Dit leidt tot de algemene oplossing $y = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3$
(de laatste term ontstaat wegens $p_3 = 0$ en $C_3e^{0t} = C_3$).

iii) *Breid de onder ii) gevonden oplossing uit tot de algemene oplossing van $y''' - y' = t$.*
We proberen een oplossing van de gedaante $y = at^2 + bt + c$.
Hiervoor vinden we $y''' - y' = -2at - b$. Dit levert de gevraagde waarde t voor $a = -\frac{1}{2}$ en $b = 0$ (c is onbepaald, maar we hadden al een onbepaalde constante C_3 uit de oplossing van het homogene deel.) De algemene oplossing is dus
$y = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3 - \frac{1}{2}t^2$.

c) *Bekijk de differentiaalvergelijking $y' = y^2 - y$.*

i) *Teken het lijnelementenveld.*
Het $t - y$-vlak is gevuld met horizontale lijnen waarlangs y' constant is; langs de lijnen $y = 1$ en $y = 0$ geldt kennelijk $y' = 0$. Op horizontale lijnen boven $y = 1$ geldt kennelijk $y' > 0$; een oplossing die zich hier bevindt zal alleen maar groeien bij toenemende t. Tussen $y = 1$ en $y = 0$ geldt op elke horizontale lijn

y' constant en kleiner dan 0. Elke oplossing die zich hier bevindt zal naar 0 toe gaan. Op horizontale lijnen met $y < 0$ geldt steeds $y' > 0$; een oplossing die zich hier bevindt zal naar 0 toe stijgen.

ii) *Geef, met behulp van het lijnelementenveld, aan hoe de oplossing zich ontwikkelt voor* $y(0) = -0.1$, $y(0) = 0.9$ *en* $y(0) = 1.1$.
In overeenstemming met de analyse die hierboven gehouden is geldt dus:
$y(0) = -0.1$: oplossing stijgend met als limiet $y = 0$.
$y(0) = 0.9$: oplossing dalend met als limiet $y = 0$.
$y(0) = 1.1$: oplossing stijgend onbegrensd; limiet oneindig.

Opgave 2

a) *Los op:* $x^2 + 5x + \frac{13}{2} = 0$.
Toepassen van de $a - b - c$-formule voor het bepalen van de wortels van een vierkantsvergelijking levert $x_{1,2} = (-5 \pm \sqrt{25 - 26}\,)/2 = -5/2 \pm 1/2\, i$.

b) *Schrijf de volgende complexe getallen in de vorm $a + bi$ en als poolcoördinaten:*
i) $\frac{-2}{i-1}$;
Deze expressie vermenigvuldigen met $\frac{i+1}{i+1}$ levert als resultaat $\frac{-2(i+1)}{-1-1} = 1 + i$
In poolcoördinaten is dat $\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$.
ii) $\frac{5}{1+2i}$.
Vermenigvuldigen met $\frac{1-2i}{1-2i}$ levert $\frac{5-10i}{1+4} = 1 - 2i$.
In poolcoördinaten is dat $\sqrt{5}e^{i\phi}$ waarin ϕ een hoek in het vierde kwadrant is met $\tan\phi = -2$ dwz. $\phi = -\arctan 2 + 2\pi$ waarmee dus ϕ in kwadrant vier is gekomen.

c) Laat zien dat $\arg z^2 = 2 \arg z$.
Stel $z = re^{i\phi}$ waarmee dus geldt $\arg z = \phi$.
$z^2 = (re^{i\phi})^2 = r^2 e^{2i\phi}$.
Het argument hiervan is kennelijk 2ϕ waarmee we dus hebben aangetoond:

$$\arg z^2 = 2\phi = 2 \arg z$$

d) *We weten uit de syllabus dat*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

We bekijken nu de Taylorreeks van e^{x^2} in plaats van die van e^x, die we weergeven met

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

Bepaal a_0, a_1, a_2, a_3 *en* a_4.
Om de Taylorreeks van e^{x^2} te vinden moeten we kennelijk in de Taylorreeks van e^x het argument x vervangen door x^2. Dit levert

$$e^{(x^2)} = 1 + (x^2) + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{6} + \frac{(x^2)^4}{24} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x^2)^i}{i!}.$$

Uitwerken levert

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{i!}.$$

Als we dit opvatten als de reeks $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ dan vinden we dat hier voor geldt: $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0$ en $a_4 = 1/2$.

Opgave 3

a) i) *Bepaal de nulruimte van*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

We zien dat hierin drie maal de eerste kolom minus de tweede kolom gelijk is aan de derde kolom en dit betekent

$$M \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ is dus een basis voor de nulruimte van M.

ii) *Bepaal alle oplossingen van*

$$Mx = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

We zien dat het rechterlid gelijk is aan vier maal de eerste kolom; hiermee is dus een particuliere oplossing gegeven door: $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De algemene oplossing is dan $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ met λ willekeurig reëel.

b) i) *Bepaal de inverse van*

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

De inverse van een 2×2-matrix (voorzover die bestaat) schrijven we direct op:

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) *Bepaal de vector* $\vec{x}$ *waarvoor* $N\vec{x} = \vec{b}$, *met*

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Gebruik makend van de inverse van N vinden we dat de oplossing van $N\vec{x} = \vec{b}$ gegeven wordt door $\vec{x} = N^{-1}\vec{b}$. Dit levert dus

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) *Definieer*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stel dat we het stelsel differentiaalvergelijkingen $\vec{x}'(t) = B\vec{x}(t)$ *willen oplossen.*

i) *Bepaal de eigenwaarden van* B.
Bij een driehoeksmatrix (zoals hier het geval is) staan de eigenwaarden op de diagonaal. Die eigenwaarden zijn hier dus $\lambda_1 = 2$ en $\lambda_2 = 1$.

ii) *Wat is*

$$\lim_{t\to\infty} |x_1(t)| \;\; en \;\; \lim_{t\to\infty} |x_2(t)|?$$

Motiveer je antwoord.
Er zijn hier in de oplossing alleen maar positieve reele eigenwaarden; dat betekent dat alle componenten voor toenemende t onbegrensd zijn. De limieten zijn beide ∞.
Bovendien kunnen we in hier de oplossing eenvoudig expliciet geven.
De eigenvector bij eigenwaarde 2 is de vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en de eigenvector bij de eigenwaarde 1 is de vector $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. De algemene oplossing is nu

$$\vec{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t}$$

De optredende coefficienten die van t afhangen zijn alleen maar positieve $e-$machten en nemen bij groeiende t alleen maar toe. De moduli van zowel $|x_1|$ als van $|x_2|$ zullen dus ook alleen maar toenemen.