

Wavelets als voorbeeld van recente geschiedenis van de wiskunde

Tom Koornwinder

Universiteit van Amsterdam, Korteweg-de Vries Instituut, T.H.Koornwinder@uva.nl

6 mei 2009

College Geschiedenis van de Wiskunde

(laatst gewijzigd 6 mei 2009)



Joseph Fourier, 1786–1830

THÉORIE

ANALYTIQUE

DE LA CHALEUR,

PAR M. FOURIER.



A PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS,
 LIBRAIRES POUR LES MATHÉMATIQUES, L'ARCHITECTURE HYDRAULIQUE
 ET LA MARINE, RUE JACOB, N° 24.

1822.

on parvient de cette manière à un résultat très-remarquable exprimé par l'équation suivante :

$$\frac{1}{2} \pi \varphi x = \sin. x S(\sin. x. \varphi x. dx) + \sin. 2x S(\sin. 2x \varphi x dx) + \sin. 3x S(\sin. 3x. \varphi x dx) \dots + \sin. ix S(\sin. ix \varphi x dx) + \text{etc.}; \quad (D)$$

le second membre donnera toujours le développement cherché de la fonction φx , si l'on effectue les intégrations depuis $x=0$, jusqu'à $x=\pi$.

On peut aussi vérifier l'équation précédente (D) (art. 220), en déterminant immédiatement les quantités $a, a, a, \dots a$, etc., dans l'équation

$$\varphi x = a, \sin. x + a, \sin. 2x + a, \sin. 3x + \dots a, \sin. jx + \dots \text{etc.};$$

pour cela on multipliera chacun des membres de la dernière équation, par $\sin. ix. dx$, i étant un nombre entier, et l'on prendra l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, on aura

$$S(\varphi x. \sin. ix. dx) = a, S(\sin. x \sin. ix dx) + a, S(\sin. 2x \sin. ix dx) + \dots a; S(\sin. jx \sin. ix dx) + \dots \text{etc.}$$

Or on peut facilement prouver, 1° que toutes les intégrales qui entrent dans le second membre, ont une valeur nulle, excepté le seul terme $a, S(\sin. ix. \sin. ix dx)$; 2° que la valeur de $S(\sin. ix. \sin. ix dx)$ est $\frac{1}{2} \pi$;

Een (voldoende gladde) 2π -periodieke functie f kan geschreven worden als **Fourier-reeks**

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}.$$

met **Fourier-coëfficiënten**

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

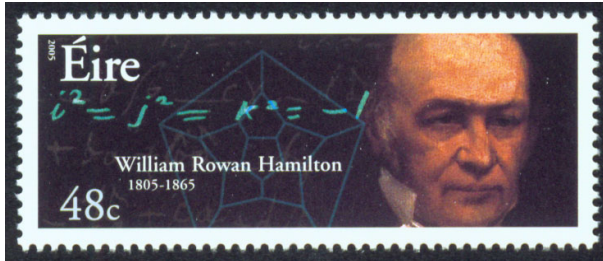
De functies $e_n(t) := e^{int}$ zijn *orthogonaal*:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_m(t) \overline{e_n(t)} dt = \delta_{m,n}.$$

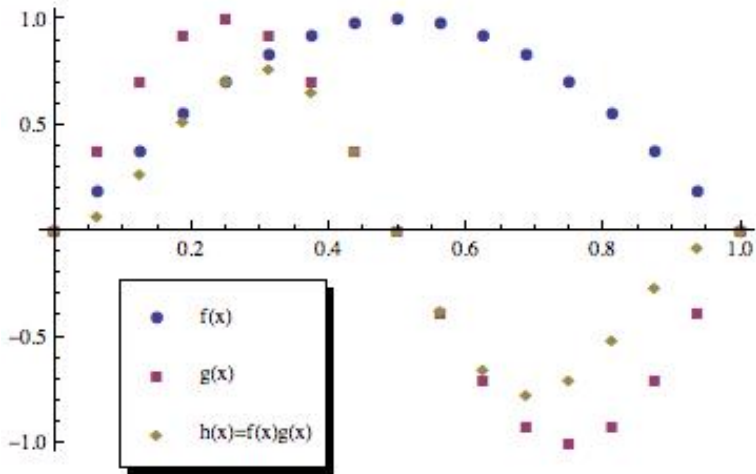
Inproduct gelijk nul betekent orthogonaliteit



Hermann Grassmann (1809–1877)

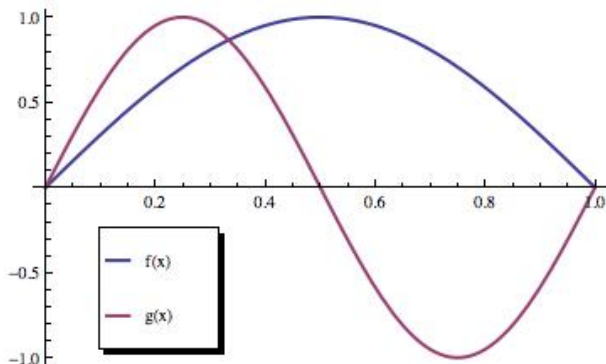


Orthogonaliteit van twee gesampled sinussen



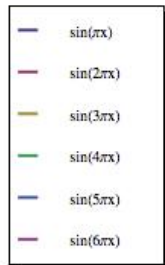
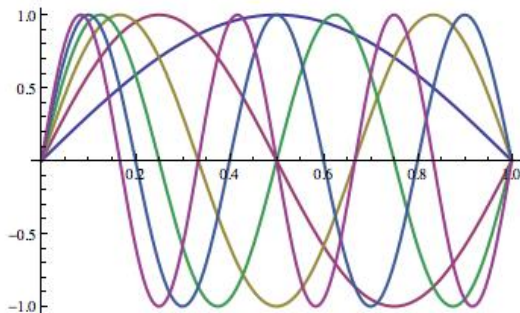
$$f \perp g \iff h(0) + h\left(\frac{1}{16}\right) + h\left(\frac{2}{16}\right) + \dots + h\left(\frac{15}{16}\right) + h(1) = 0$$

Orthogonaliteit van twee continue sinussen



$$f \perp g \iff \int_0^1 f(x) g(x) dx = 0$$

De elementaire trillingen van een snaar



Een (voldoende gladde en voldoende snel bij ∞ dalende) functie f op \mathbb{R} kan geschreven worden als **Fourier-integraal**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi$$

met **Fourier-getransformeerde**

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt.$$

Dan

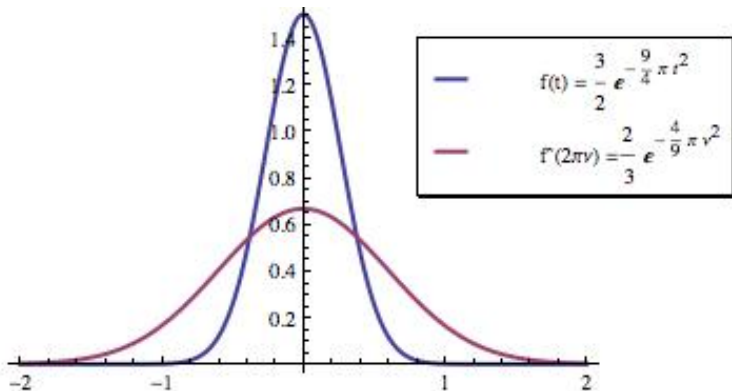
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(2\pi\nu)|^2 d\nu.$$

$|f(t)|^2$ is energiedichtheid van signaal op tijd t .

$|\widehat{f}(2\pi\nu)|^2$ is energiedichtheid van signaal bij frequentie ν .

Fourier-integraal van de Gaussiaan

$$f(t) = c^{\frac{1}{2}} e^{-\pi c t^2} \iff \widehat{f}(2\pi\nu) = c^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi c^{-1} \nu^2}.$$



Heisenberg's onzekerheidsrelatie



Werner Heisenberg
(1901–1976)

180

W. Heisenberg,

ermöglichen, als es der Gleichung (1) entspricht, so wäre die Quantenmechanik unmöglich. Diese Ungenauigkeit, die durch Gleichung (1) festgelegt ist, schafft also erst Raum für die Gültigkeit der Beziehungen, die in den quantenmechanischen Vertauschungsrelationen

$$pq - qp = \frac{\hbar}{2\pi i}$$

ihren prägnanten Ausdruck finden; sie ermöglicht diese Gleichung, ohne daß der physikalische Sinn der Größen p und q geändert werden mußte.

Für diejenigen physikalischen Phänomene, deren quantentheoretische Formulierung noch unbekannt ist (z. B. die Elektrodynamik), bedeutet Gleichung (1) eine Forderung, die zum Auffinden der neuen Gesetze nützlich sein mag. Für die Quantenmechanik läßt sich Gleichung (1) durch eine geringfügige Verallgemeinerung aus der Dirac-Jordanschen Formulierung herleiten. Wenn wir für den bestimmten Wert η irgend eines Parameters den Ort q des Elektrons zu q' bestimmen mit einer Genauigkeit ϵ_1 , so können wir dieses Faktum durch eine Wahrscheinlichkeitsamplitude $S(\eta, q)$ zum Ausdruck bringen, die nur in einem Gebiet der ungefähren Größe ϵ_1 um q' von Null merklich verschieden ist. Insbesondere kann man z. B. setzen

$$S(\eta, q) \text{ prop } e^{-\frac{(q-q')^2}{2\epsilon_1^2}} - \frac{2\pi i}{\hbar} p'(q-\epsilon) ; \text{ also } S\bar{S} \text{ prop } e^{-\frac{(q-q')^2}{\epsilon_1^2}}. \quad (3)$$

Zeitschr. Physik, 43 (1927), 172–198

Heisenberg's onzekerheidsrelatie

In de quantummechanica kunnen plaats en impuls van een deeltje niet tegelijk met willekeurige precisie gemeten worden.

$$\Delta p \Delta q \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi} \quad (h \text{ constante van Planck}). \quad (1)$$

Dit werd rigoureus bewezen door E. H. Kennard (1927) en Hermann Weyl (1928) als een ongelijkheid voor de varianties van kansmaten geassocieerd met een functie f en zijn Fourier-getransformeerde \hat{f} :

$$\sigma(f) \sigma(\hat{f}) \geq \frac{1}{2}. \quad (2)$$

De constante \hbar verschijnt in (1) omdat de kansmaat geassocieerd met de impuls p bepaald wordt door een functie $\phi(p) = \hat{\psi}(p/\hbar)$ als de kansmaat geassocieerd met de plaats x bepaald wordt door de functie ψ .

De interpretatie van (2) voor een geluidssignaal is dat de tijd waarop een toon klinkt en de frequentie van die toon niet tegelijk met willekeurige precisie gemeten kunnen worden.

Windowed Fourier transform



Dennis Gabor
(1900–1979)



Nobelprijs natuurkunde 1971
(voor zijn uitvinding van het hologram)

Bekeek als eerste de *windowed Fourier transform*, in artikel *Theory of communication*, J. IEEE 93 (1946), 429–457.

Windowed Fourier transform

We verfijnen de Fourier-transformatie van een functie f op \mathbb{R} door \hat{f} telkens alleen maar te berekenen als de Fourier-getransformeerde van f beperkt tot een interval van vaste lengte 2σ :

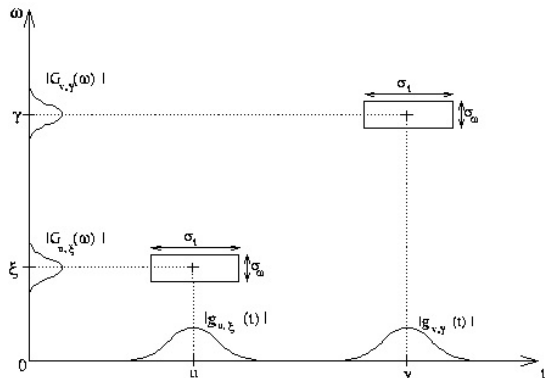
$$Sf(u, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 1_{[-\sigma, \sigma]}(t - u) e^{-i\xi t} dt.$$

Nog beter vervangen we de indicator-functie $1_{[-\sigma, \sigma]}$ door een gladdere positieve even *vensterfunctie* g met variantie $\sigma(g)$, en die snel naar 0 daalt:

$$Sf(u, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t - u) e^{-i\xi t} dt.$$

De functie $Sf(u, \cdot)$ geeft een indruk van de frequenties die klinken in het tijdsinterval $[u - \sigma(g), u + \sigma(g)]$.

Windowed Fourier transform



(deze en een paar volgende illustraties uit

http://cas.ensmp.fr/~chaplais/Wavetour_presentation/)

Het getal $|Sf(u, \xi)|$ geeft een indicatie van de sterkte van de frequenties in het frequentie-interval $[\xi - \sigma(\hat{g}), \xi + \sigma(\hat{g})]$ gedurende het tijdsinterval $[u - \sigma(g), u + \sigma(g)]$.

Windowed Fourier transform

Een rechthoek $[u - \sigma(g), u + \sigma(g)] \times [\xi - \sigma(\hat{g}), \xi + \sigma(\hat{g})]$ in het tijd-frequentievlak heet een **Heisenberg box** van g met centrum (u, ξ) . Alle Heisenberg boxes behorend bij g zijn congruent.

Het **spectrogram** van de windowed Fourier transform van het signaal f wordt gegeven door

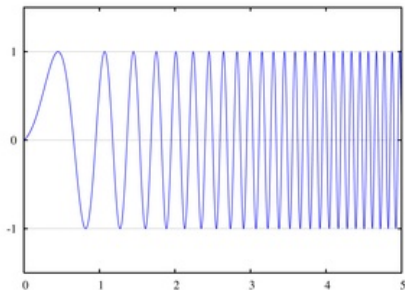
$$P_S f(u, \xi) := |Sf(u, \xi)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t - u) e^{-i\xi t} dt \right|^2.$$

Dit geeft de energiedichtheid van het signaal f in het punt (u, ξ) in het tijd-frequentievlak, of beter gezegd de gemiddelde energie aanwezig in de Heisenberg box met centrum (u, ξ) .

Windowed Fourier transform

Het Engelse woord *chirp* betekent in de gewone taal *gekwetter*, maar in de signaalanalyse is een **chirp** een signaal waarvan de frequentie toeneemt of afneemt met de tijd.

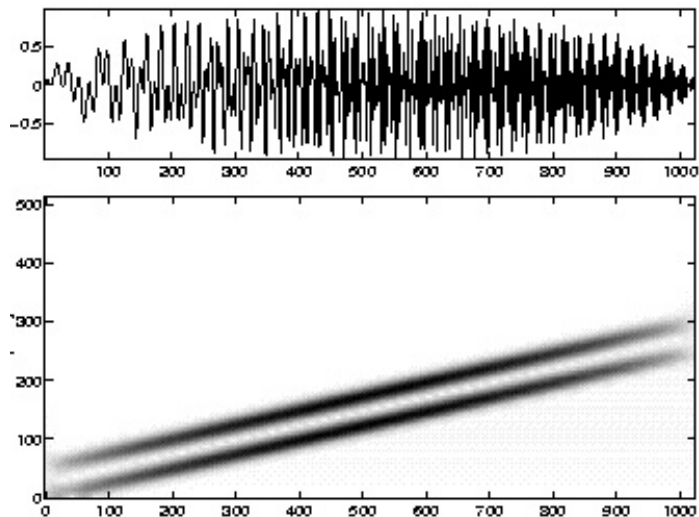
Bijv. in een *lineaire chirp* verandert de frequentie lineair met de tijd zoals in $f(t) := \sin(at^2)$ (met a een positieve constante).



Luister naar een lineaire chirp via

<http://en.wikipedia.org/wiki/Chirp>

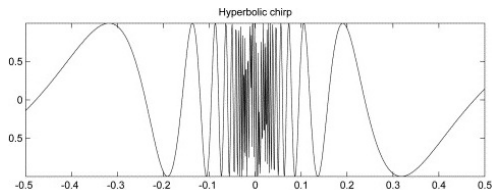
Windowed Fourier transform



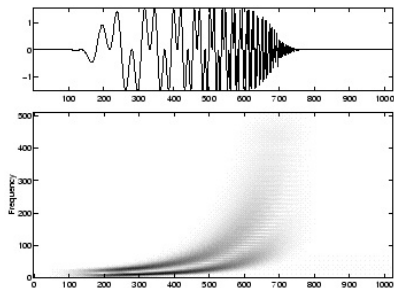
De som van twee parallele lineaire chirps en hun spectrogram.

Windowed Fourier transform

Een *hyperbolische chirp* wordt gegeven door $f(t) := \cos \frac{\alpha}{\beta-t}$:



Zie hier de som van twee hyperbolische chirps en hun spectrogram:



Sampling theorem



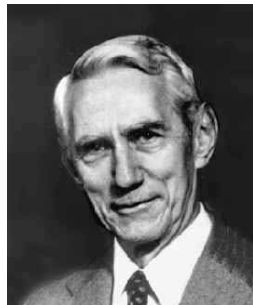
Edmund Whittaker
(1873–1956)

Proc. Royal Soc. Edinburgh,
1915



John Whittaker
(1905–1984)

Cambridge Univ. Press,
1935



Claude Shannon
(1916–2001)

Bell System Technical J.,
1948

Sampling theorem

Een signaal met maximale frequentie n kan volledig gereconstrueerd worden als we de amplitude van het signaal $2n$ keer per seconde meten.

Hierdoor kan men geluidsignalen digitaal opnemen en opslaan als CD of MP3 file, en ze ook weer redelijk natuurgetrouw weergeven.

Bijvoorbeeld voor een CD worden per stereo-geluidskanaal 44100 samples per seconde genomen, wat uitgaat van een maximale (voor mensen hoorbare) frequentie van 22050 Hz.

Fast Fourier transform (FFT)



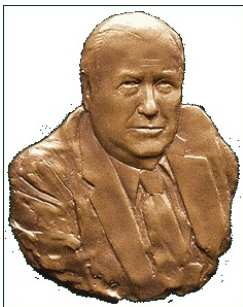
Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

ca. 1805,
posthuum gepubliceerd



John Tukey
(1915–2000)

*An algorithm for the machine calculation of complex
Fourier series*, Math. of Computation (1965)



James Cooley
(1926)

H. H. Goldstine, *A history of numerical analysis from the 16th through the 19th century*, Springer-Verlag, 1977.

Fast Fourier transform (FFT)

Het berekenen van de N Fourier-coëfficiënten c_m ($m = 0, 1, \dots, N - 1$) van de *eindige Fourier-transformatie* van een functie f gedefinieerd op $0, 1, \dots, N - 1$:

$$c_m := \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-2\pi i mn/N}$$

kost $\mathcal{O}(N^2)$ operaties, maar kan door een slimme truc (*divide and conquer*) teruggebracht worden tot $\mathcal{O}(N \log N)$ operaties.

Een *wavelet* is een functie ψ op \mathbb{R} met $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$.

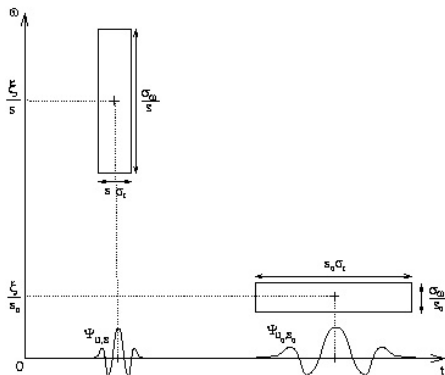
Transleren en dilateren geeft $\psi_{u,s}(t) := \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$.

De continue wavelet getransformeerde van een functie f op \mathbb{R} :

$$Wf(u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi_{u,s}(t)} dt \quad (u \in \mathbb{R}, s > 0).$$

Laat $C_\psi := \int_0^\infty |\hat{\psi}(\xi)|^2 \xi^{-1} d\xi$ en veronderstel dat ψ reëelwaardig en even is en dat $\int_0^\infty (\xi - 1) |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi = 0$.

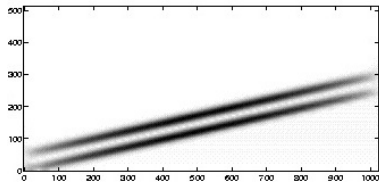
Het **scalogram** $P_W f(u, \xi) := |Wf(u, \xi^{-1})|^2$ geeft C_ψ keer de gemiddelde energie van het signaal f in de Heisenberg box $[u - \xi^{-1}\sigma(\psi), u + \xi^{-1}\sigma(\psi)] \times [\xi - \xi\sigma(\hat{\psi}_+), \xi + \xi\sigma(\hat{\psi}_+)]$.



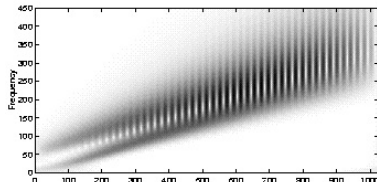
Voorbeeld van Heisenberg boxes geassocieerd met ψ

De breedte van de box in het tijdsdomein is omgekeerd evenredig met de frequentie ξ en de breedte in het frequentiedomein is evenredig met de frequentie ξ .

De som van twee parallelle lineaire chirps:



spectrogram

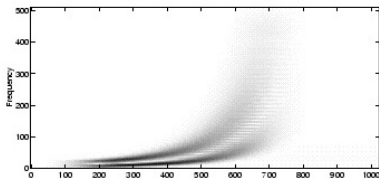


scalogram.

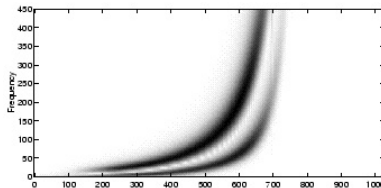
Hier doet het spectrogram het beter.

In het spectrogram is de frequentieresolutie onafhankelijk van de frequentie, in het scalogram neemt de frequentieresolutie af als de frequentie toeneemt.

De som van twee hyperbolische chirps:



spectrogram



scalogram.

Hier doet het scalogram het beter.

In het spectrogram is de tijdsresolutie onafhankelijk van de frequentie, in het scalogram neemt de tijdsresolutie toe als de frequentie toeneemt.

De grondleggers van de wavelet-theorie

- **Jean Morlet**, geofysicus bij Elf-Aquitaine, is niet tevreden met windowed Fourier transform; begint voornamelijk numeriek-experimenteel met wavelets.
- Morlet legt in 1981 contact met de fysicus **Alex Grossmann** in Marseille. Samen ontwikkelen ze de theorie verder, eerste artikel in 1984.
- Dit artikel komt onder ogen van de Parijse wiskundige **Yves Meyer**. Hij bezoekt Grossmann in 1985 en hij verbindt wavelet-theorie met eerdere resultaten uit de analyse, o.a. de *reproducing identity* van **Calderón**.
- **Stéphane Mallat** (had computer vision gestudeerd in Parijs) legt contact met Meyer. Mallat laat zien dat veel voorwerk aan wavelets al gedaan was door signaaltheoretici werkend met filters. Uit hun samenwerking onstond de theorie van de *multiresolutie-analyse* en het idee van de *discrete* (i.p.v. continue) wavelet-transformatie met behulp van *orthogonale* wavelets.

Orthogonale wavelets

We zagen al de formules $\psi_{u,s}(t) := \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$ en

$Wf(u, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi_{u,s}(t)} dt$. We discretiseren dit nu als volgt:

$$Wf(2^j, 2^j k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) 2^{-\frac{1}{2}j} \overline{\psi(2^{-j}t - k)} dt \quad (j, k \in \mathbb{Z}).$$

Als de functies $t \mapsto \psi(2^{-j}t - k)$ onderling orthogonaal zijn, d.w.z.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^{-j}t - k) \overline{\psi(2^{-j'}t - k')} dt = 0 \quad ((j, k) \neq (j', k')),$$

en als deze functies een z.g. orthogonale basis vormen van de ruimte van alle kwadratisch integreerbare functies op \mathbb{R} , dan spreken we van *orthogonale wavelets*.

Dan kan f gereconstrueerd worden uit de *wavelet-coëfficiënten* $Wf(2^j, 2^j k)$.



Alfréd Haar (1885–1933)

Oorspronkelijk was maar één voorbeeld van orthogonale wavelets bekend: het orthogonale stelsel van Haar uit 1910, waarbij

$$\psi(t) := \begin{cases} 1 & , 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & , \frac{1}{2} < t \leq 1, \\ 0 & , \text{andere gevallen.} \end{cases}$$



Ingrid Daubechies, geboren in 1954 in Houthalen, België.
Thans professor aan Princeton University, USA.

Daubechies vond in 1988 een oneindige serie families van orthogonale wavelets met *compacte drager*, d.w.z. identiek 0 buiten een begrensde interval.

Haar methode om de bijbehorende wavelet-coëfficiënten snel te berekenen, bleek eerder gegeven te zijn in het *pyramide-algoritme* van Burt & Adelson (1983).

Een paar toepassingen van wavelets

- Het compact opslaan van de vingerafdraken in het archief van de FBI.
- JPG2000, de opvolger van het bekende JPG protocol voor beeldcompressie.

Conclusie

- Bij de ontwikkeling van de Fourier-analyse in de 20e eeuw kwam het herhaaldelijk voor dat toegepaste wetenschappers vernieuwingen invoerden waarvan later bleek dat ze al eerder door meer zuivere wiskundigen gevonden waren.
- Wavelets werden eerst ontwikkeld door zeer toegepaste wetenschappers. Door contact met een zuiver wiskundige kwam de theorie tot wiskundige rijpheid. Details van de wiskundig ontwikkelde theorie bleken voorgangers te hebben, zowel in de zuivere wiskunde als in de toegepaste wetenschap. Door de verdere wiskundige ontwikkeling van de theorie kon tot nieuwe toepassingen gekomen worden.

Literatuur

- B. B. Hubbard, *The world according to wavelets*, A K Peters, 1998; geschreven voor de leek.
- Y. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, SIAM, 1992.
- S. Jaffard, Y. Meyer & R. D. Ryan, *Wavelets, Tools for science & technology*, SIAM, 2001; revised edition of Y. Meyer, *Wavelets, Algorithms & applications*, SIAM, 1993.
- T. H. Koornwinder (editor), *Wavelets: an elementary treatment of theory and applications*, World Scientific, 1993.

Zie ook de links in

www.science.uva.nl/~thk/links/wavelet.html

Verantwoording voor gebruikte illustraties

p.12: en.wikipedia.org/wiki/Chirp

pp. 13, 14, 21, 22: cas.ensmp.fr/~chaplais/Wavetour_presentation/transformees/Fourier_Fenetre/Spectrogram_Examples.html

p.14: dx.doi.org/10.1016/j.measurement.2005.11.021

p.15:

www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Whittaker.html,
www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Whittaker_John.html,
www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Shannon.html

p.17: www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Gauss.html,
www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Tukey.html,
www.engineering.manhattan.edu/na/cooley.html

p.20: cas.ensmp.fr/~chaplais/Wavetour_presentation/transformees/Ondelettes/Wavelet_Transform.html

pp. 21, 22: cas.ensmp.fr/~chaplais/Wavetour_presentation/transformees/Ondelettes/Scalogram_Examples.html

p.25: www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Haar.html

p.26:

www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Daubechies.htm