$A = B$, identiteiten in de wiskunde

Tom Koornwinder

Korteweg-de Vries Instituut, Universiteit van Amsterdam

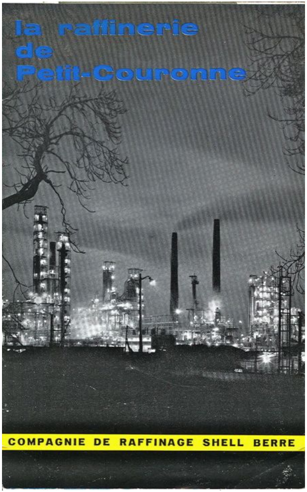
Tom.Koornwinder@uva.nl

http://www.science.uva/nl/~thk/

De Leidsche Flesch, lunchlezing, 16 april 2009

laatst gewijzigd 17 april 2009

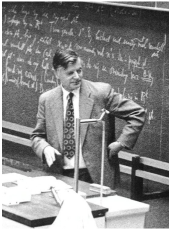
oud-lid Leidsche Flesch

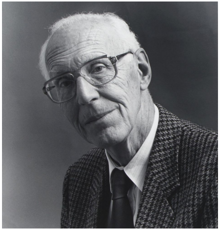


- aangekomen in Leiden: 1961
- studie wis- en natuurkunde
- ergens in 1962–1964: excursie Leidsche Flesch naar regio Parijs, o.a. de Shell-raffinaderij te Petit-Couronne

hoogleraren in jaren ’60

Wiskunde:
o.a. prof. Visser en


Zaanen


van Est


Murre


van Zwet

Natuurkunde:
o.a. prof. van den Handel, prof. Gorter en prof. Kasteleijn

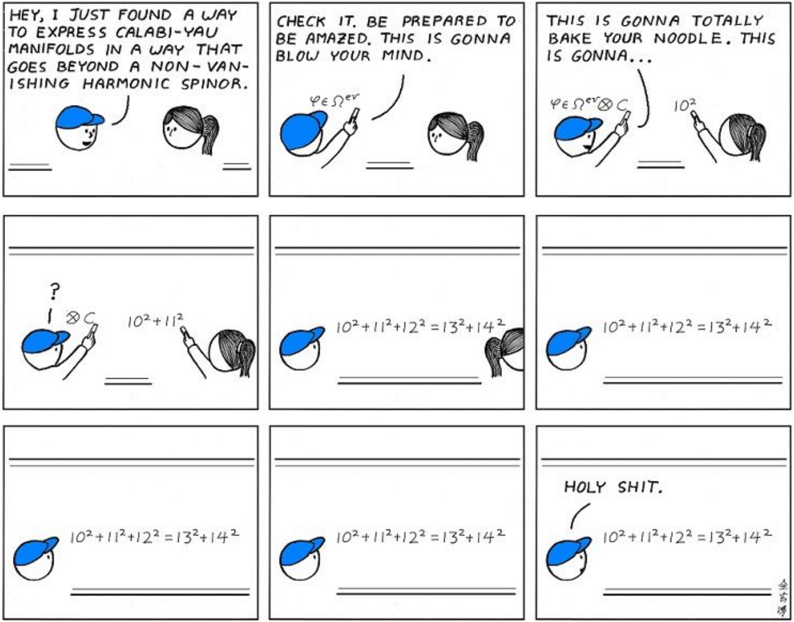
Sterrenkunde:
o.a. prof. Oosterhoff en prof. van der Hulst

Leidsche Flesch Courant, 5e jaargang, no. 3, januari 1965

HET COLLEGE ALS VORM VAN KENNISOVERDRACHT EN MOGELIJKE ALTERNATIEVEN

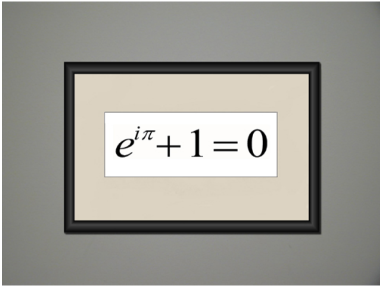
door T. H. Koornwinder

In onderstaand artikel zal ik het collegestelsel, zoals wij dat kennen, aan een kritisch onderzoek onderwerpen en mij daarbij beperken tot de prekandidaatscolleges in de wis- en natuurkunde. Het lijkt me goed dat dit onderwerp in de L.F.C. aan de orde komt. Er worden jaarlijks vele uiterst kostbare hoogleraarsuren en nog veel meer — wat minder kostbare — studentenuren in de colleges gestoken en beide partijen zijn er dus bij gebaat om te onderzoeken of colleges wel de beste vorm van kennisoverdracht zijn.



met dank aan Abstruse Goose en de Wiskundemeisjes

Een mooie identiteit



Beauty--Euler's relation

by Justin Mullins 1998

Size: 84 x 59 cm (34 x 23 inches)

Usually ships in 24 hours

FREE SHIPPING

UK & Eur
Price: £23.99

US & RoW
Price: $39.99

Een afschrikwekkende identiteit

equals ${}_{10}W_9\,(a;b,c,d,e,f,g,h;q,q)$ which is, of course, balanced by virtue of (2.12.4). Equating the expression in (2.12.2) with the sum of those in (2.12.5) and (2.12.8), and simplifying the coefficients, we finally obtain Bailey's [1947b] four-term transformation formula

$$
\begin{aligned}
&{}_{10}\phi_9\left[\begin{matrix} a, qa^{\frac12}, -qa^{\frac12}, b, c, d, e, f, g, h \\ a^{\frac12}, -a^{\frac12}, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq/f, aq/g, aq/h \end{matrix}; q, q\right] \\
&\quad + \frac{(aq, b/a, c, d, e, f, g, h, bq/c, bq/d; q)_\infty}{(b^2q/a, a/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq/f, aq/g, aq/h, bc/a, bd/a; q)_\infty} \\
&\quad \times \frac{(bq/e, bq/f, bq/g, bq/h; q)_\infty}{(be/a, bf/a, bg/a, bh/a; q)_\infty} \\
&\quad \times {}_{10}\phi_9\left[\begin{matrix} b^2/a, qba^{-\frac12}, -qba^{-\frac12}, b, bc/a, bd/a, be/a, bf/a, bg/a, bh/a \\ ba^{-\frac12}, -ba^{-\frac12}, bq/a, bq/c, bq/d, bq/e, bq/f, bq/g, bq/h \end{matrix}; q, q\right] \\
&= \frac{(aq, b/a, \lambda q/f, \lambda q/g, \lambda q/h, bf/\lambda, bg/\lambda, bh/\lambda; q)_\infty}{(\lambda q, b/\lambda, aq/f, aq/g, aq/h, bf/a, bg/a, bh/a; q)_\infty} \\
&\quad \times {}_{10}\phi_9\left[\begin{matrix} \lambda, q\lambda^{\frac12}, -q\lambda^{\frac12}, b, \lambda c/a, \lambda d/a, \lambda e/a, f, g, h \\ \lambda^{\frac12}, -\lambda^{\frac12}, \lambda q/b, aq/c, aq/d, aq/e, \lambda q/f, \lambda q/g, \lambda q/h \end{matrix}; q, q\right] \\
&\quad + \frac{(aq, b/a, f, g, h, bq/f, bq/g, bq/h, \lambda c/a, \lambda d/a; q)_\infty}{(b^2q/\lambda, \lambda/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq/f, aq/g, aq/h, bc/a, bd/a; q)_\infty} \\
&\quad \times \frac{(\lambda e/a, abq/\lambda c, abq/\lambda d, abq/\lambda e; q)_\infty}{(be/a, bf/a, bg/a, bh/a; q)_\infty} \\
&\quad \times {}_{10}\phi_9\left[\begin{matrix} b^2/\lambda, qb\lambda^{-\frac12}, -qb\lambda^{-\frac12}, b, bc/a, bd/a, be/a, bf/\lambda, bg/\lambda, bh/\lambda \\ b\lambda^{-\frac12}, -b\lambda^{-\frac12}, bq/\lambda, abq/c\lambda, abq/d\lambda, abq/e\lambda, bq/f, bq/g, bq/h \end{matrix}; q, q\right].
\end{aligned}
\tag{2.12.9}
$$

die komt uit het boek van Gasper & Rahman

ENCYCLOPEDIA OF MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

BASIC HYPERGEOMETRIC SERIES

Second Edition

GEORGE GASPER
Northwestern University, Evanston, Illinois, USA

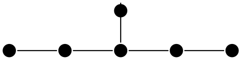
MIZAN RAHMAN
Carleton University, Ottawa, Canada

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

maar aanleiding geeft tot . . .

een symmetriegroep van orde 51840

(de Weyl-groep van wortelsysteem E_6)



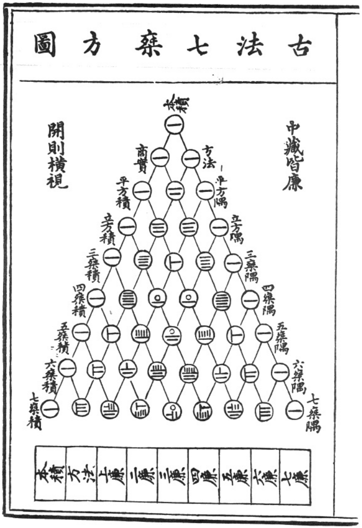
Een zeer oude identiteit

De binomiaalformule:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Veel ouder dan Newton of Pascal. Gaat terug tot:

- India vanaf 250 v. Chr.
- Iran, ca. 1100
- China, ca. 1250



Chinese “driehoek van Pascal” uit 1300

Vandermonde's identiteit

$$(x+y)^l = \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} x^i y^{l-i},$$

$$(x+y)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^j y^{m-j},$$

$$(x+y)^{l+m} = \sum_{i=0}^{l} \sum_{j=0}^{m} \binom{l}{i} \binom{m}{j} x^{i+j} y^{l+m-i-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{l+m} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{l}{k-j} \binom{m}{j} \right) x^k y^{l+m-k},$$

$$(x+y)^{l+m} = \sum_{k=0}^{l+m} \binom{l+m}{k} x^k y^{l+m-k},$$

$$\binom{l+m}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{l}{k-j} \binom{m}{j}.$$

Chu-Vandermonde identiteit

De identiteit van Vandermonde (1772) was al bekend aan de Chinese wiskundige Chu Shi-Chieh (1303).

Pochhammer-symbool

$$(a)_k := a(a+1)\dots(a+k-1) \quad (k = 1, 2, \dots),$$
$$(a)_0 := 1.$$

(illustreert ook de identiteit als definitie)

Dus $\quad k! = (1)_k$

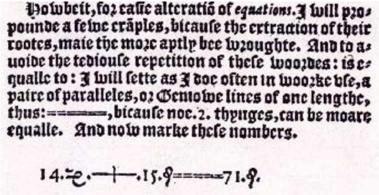
Hypergeometrische reeks van Gauss

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k$$

Chu-Vandermonde herschreven

Voor $n = 0, 1, 2, \dots \quad {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, b \\ c \end{matrix}; 1\right) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k (b)_k}{(c)_k k!} = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}.$

De oorsprong van het gelijkteken



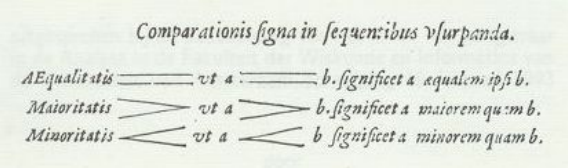
Howbeit, for easie alteratiō of *equations*. I will pro-
pounde a fewe exāples, bicause the extraction of their
rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to a-
uoide the tediouse repetition of these woordes: is e-
qualle to: I will sette as I doe often in woorke use, a
paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe,
thus: ═══════, bicause noe. 2. thynges, can be moare
equalle. And now marke these nombers.

14.ꝛ.—|—.15.ꝭ═══════71.ꝭ.

"I will sette as I doe often in woorke use, a paire of parralles, or Gemowe lines of one lengthe, thus : ==, bicause noe 2, thynges, can be moare equalle."

Robert Recorde in 1557 in *The Whetstone of Witte*

De oorsprong van het ongelijkteken


Comparationis ſigna in ſequentibus vſurpanda.

AEqualitatis $=$ vt $a = b$. ſignificet a æqualem ipſi b.
Maioritatis $>$ vt $a > b$. ſignificet a maiorem quam b.
Minoritatis $<$ vt $a < b$ ſignificet a minorem quam b.

T. Harriot, *Artis analyticae praxis ad aequationes resolvendas*,
ed. W. Warner, 1631.

Gelijkheid kan ongelijkheid impliceren.

$$\text{Bijv.} \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \implies |\sin\theta| \le 1.$$

Twee ongelijkheden impliceren gelijkheid:

$$a \le b \;\&\; b \le a \implies a = b.$$

In analyse veel meer ongelijkheden dan gelijkheden.

$$\text{Bijv.} \quad \forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Een identiteit uit de populaire psychologie

$$\text{Geluk} = P + (5 \times E) + (3 \times H)$$

Uit interviews met meer dan duizend mensen beweren de Britse psychologe Carol Rothwell en 'life coach' Pete Cohen de geluksformule te hebben gedestilleerd. Geluk is een combinatie van:

P (Personal characteristics) = persoonlijke eigenschappen: je flexibiliteit, veerkracht, de manier waarop je het leven bekijkt.

E (Existence) = basale levensomstandigheden: je gezondheid, familiesituatie, gevoel van veiligheid en financiële positie. E telt het zwaarst: zonder dak boven je hoofd en ten minste een droge boterham kom je aan gelukkig zijn niet toe.

H (Higher order needs) = hogere behoeften: zelfwaardering, gevoel voor humor, en de mate waarin je je ambities en verwachtingen hebt bevredigd.

uit Psychologie Magazine, juli 2003

Een identiteit uit de financiële wiskunde

crisisnieuws

25 Woensdag Maart 2009

De Pers

ooo Dagblad

WWW.DEPERS.NL

GRATIS, MAAR NIET GOEDKOOP

$$P=\phi(A,B,\gamma)$$

Dit is'm dan. Althans, de verkorte versie. Met deze formule berekenden banken en verzekeraars hoeveel geld ze konden verdienen met hun bij elkaar gepropte hypotheken. Maar helaas, de formule deugt niet. De gevolgen kennen we.

Lees meer op pagina 2

Formule van David Li:
“De schuldigen zijn degenen die er roekeloos mee omgingen” ?

Een identiteit uit de natuurkunde

$$E = mc^2$$

"De schuldigen zijn degenen die er roekeloos mee omgingen" ?

Meer identiteiten uit de natuurkunde

$$\mathcal{L}_{E\text{-}W} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_m$$

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G^a_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_f = \sum_i \bar{\Psi}_{Li} (i\not\partial + g' \not W^a t_a + g \not B y)\, \Psi_{Li} + \sum \bar{\Psi}_{Ri} (i\not\partial + g \not B y)_{Ri}$$

$$\mathcal{L}_H = -\,(D_\nu \phi)^\dagger (D^\nu \phi) - \mu^2 (\phi^\dagger \phi) + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

$$\mathcal{L}_m = -\sum_{i,j} (c_{ij} \bar{\Psi}_{Li} \phi \Psi'_{Rj})$$

Elektrozwakke wisselwerking

(Het Glashow-Weinberg-Salam-model)

uit *De Natuurwetten* van Sander Bais

Een identiteit uit de meetkunde

$$V - E + F = 2$$

Voor een convex veelvlak is het aantal hoekpunten min het aantal ribben plus het aantal zijvlakken gelijk aan twee.

Euler, ca. 1750

Geldt ook voor vlakke grafen.

De q-binomiaalformule

Zij $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$.

Bekijk variabelen x, y zo dat $xy = qyx$.

Dus ieder product van factoren x en y, in willekeurige volgorde, kan herschreven worden als een product van een aantal factoren y maal een product van een aantal factoren x met een coëfficiënt die een bepaalde macht van q is. Bijv.

$$x^2yxy = xxyxy = qxyxxy = q^2yxxxy = q^5yyxxx = q^5y^2x^3.$$

Nu kunnen we bijv. ook $(x+y)^2$ en $(x+y)^3$ uitwerken:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= (x+y)(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2\\ &= x^2 + (1+q)yx + y^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)^2 = (x+y)\big(x^2 + (1+q)yx + y^2\big)\\ &= x^3 + (1+q)xyx + xy^2 + yx^2 + (1+q)y^2x + y^3\\ &= x^3 + (1+q+q^2)yx^2 + (1+q+q^2)y^2x + y^3.\end{aligned}$$

De q-binomiaalformule (vervolg)

Algemeen:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q y^{n-k} x^k \qquad (xy = qyx),$$

waarbij de *q-binomiaalcoëfficient* gedefinieerd wordt door:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\ldots(1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^k)}\,.$$

Hypergeometrische functies

Definitie

Een *hypergeometrische reeks* is een reeks $\sum_{k=0}^{\infty} t_k$ zo dat $t_0 = 1$ en t_{k+1}/t_k is een rationale functie in k.

Zo'n t_k heet een *hypergeometrische term*.

Dus

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{P(k)}{Q(k)} \quad (P \text{ en } Q \text{ polynomen})$$

$$= \frac{(a_1+k)\dots(a_r+k)}{(b_1+k)\dots(b_s+k)} \, \frac{z}{1+k} \,.$$

Dus

$$t_k = \frac{(a_1)_k \dots (a_r)_k}{(b_1)_k \dots (b_s)_k} \, \frac{z^k}{k!},$$

waarbij

$$(a)_k := a(a+1)\dots(a+k-1) \qquad \text{(Pochhammer-symbool).}$$

Hypergeometrische functies (vervolg)

Dus de algemene hypergeometrische reeks kan geschreven worden als:

$$ {}_rF_s\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix}; z\right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \ldots (a_r)_k}{(b_1)_k \ldots (b_s)_k} \, \frac{z^k}{k!} \, . $$

Afbrekende hypergeometrische reeks:

Als $a_1 = -n \quad (n - 0, 1, 2, \ldots)$, dan $(-n)_k = 0$ als $k > n$, dus dan breekt de hypergeometrische reeks af na de term met $k = n$.

Algemene les

Als je een (eindige of oneindige) reeks $\sum_{k=0}^{\infty} t_k$ hebt waarbij de termen t_k zijn uitgedrukt in bijv. binomiaalcoëfficiënten, ga dan na of de reeks te herschrijven is als hypergometrische reeks, dus of t_{k+1}/t_k rationaal is in k.
Van duizenden verschillende mogelijkheden tot een beperkt aantal waarover gestandaardiseerde literatuur is.

Hypergeometrische functies (voorbeelden)

- $r = s = 0$, exponentiële reeks:

$$ {}_0F_0\left(\begin{matrix} - \\ - \end{matrix}; z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. $$

- $r = 1$, $s = 0$, binomiale reeks:

$$ {}_1F_0\left(\begin{matrix} a \\ - \end{matrix}; z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k z^k}{k!} = (1-z)^{-a}\,. $$

  Voor $a = 1$ krijgen we de *geometrische reeks* $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$.

- $r = 2$, $s = 1$, de hypergeometrische reeks van Gauss:

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k z^k}{(c)_k k!}\,. $$

  Bijv. $\quad z\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 1 \\ 2 \end{matrix}; -z\right) = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k+1} = \log(z+1).$

Sommeerbare hypergeometrische reeksen (voorbeelden)

- Chu-Vandermonde:

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, b \\ c \end{matrix}; 1\right) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n} \,. $$

- Sommatieformule van Gauss:

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \qquad (c > a+b), $$

waarbij $\Gamma(c) := \int_0^\infty t^{c-1} e^{-t}\, dt \qquad (c > 0).$

- formule van Saalschütz:

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, -n \\ c, 1+a+b-c-n \end{matrix}; 1\right) = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n (c-a-b)_n} \quad (n = 0, 1, \ldots). $$

Onbepaalde sommatie

Gegeven zijn de termen t_k met $t_0 = 1$. Schrijf:

$$\sum_{k=0}^{n} t_k = s_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Dit is equivalent met:

$$s_n - s_{n-1} = t_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad \text{en} \quad s_0 = 1.$$

Voorbeeld:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(b)_k}{k!} = \frac{(b+1)_n}{n!} \iff \frac{(b+1)_n}{n!} - \frac{(b+1)_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(b)_n}{n!}\,.$$

Gosper's algoritme

Bill Gosper

Als t_k een hypergeometrische term is dan is er een algoritme dat beslist of $s_n := \sum_{k=0}^{n} t_k$ een hypergeometrische term is. Zo ja, dan geeft het algoritme s_n expliciet, en dan is s_n/t_n een rationale functie van n.

Zeilberger's algoritme

Doron Zeilberger

Zij $s_n := \sum_{k=0}^{n} t_{n,k}$ met $t_{n,k}$ een propere hypergeometrische term. Dan is er een getal $N = 1, 2, \dots$, polynomen $a_j(n)$ in n en een $u_{n,k} = r_{n,k} t_{n,k}$ met $r_{n,k}$ rationaal in n en k zo dat

$$\sum_{j=0}^{N} a_j(n) t_{n+j,k} = u_{n,k+1} - u_{n,k}.$$

Dan

$$\sum_{j=0}^{N} a_j(n) s_{n+j} = 0.$$

Zeilberger's algoritme (vervolg)

- Voor elke achtereenvolgende N algoritmisch te bepalen of de som aan zo'n differentievergelijking van orde N voldoet.
- Als $N = 1$ dan $a_0(n)s_n + a_1(n)s_{n+1} = 0$ direct op te lossen en de som s_n wordt expliciet verkregen.
- De WZ-methode haakt in op dit geval $N = 1$ en geeft voor veel bekende expliciete hypergeometrische sommaties een bewijscertificaat in de vorm van een rationale functie $r_{n,k}$, waardoor de identiteit direct en automatisch bewezen kan worden.
- Zie het boek *A=B* door M. Petkovšek, H. S. Wilf en D. Zeilberger voor verdere details.
- Zeilberger publiceert geregeld samen met zijn computer Ekhad als het om automatisch geleverde bewijzen gaat.

A WZ PROOF OF RAMANUJAN'S FORMULA FOR π

Shalosh B. EKHAD[1] *and Doron ZEILBERGER*[1]

Dedicated to Archimedes on his 2300^{th} *birthday*

Archimedes computed π very accurately. Much later, Ramanujan discovered several infinite series for $1/\pi$ that enables one to compute π even more accurately. The most impressive one is([Ra]): ($(a)_k$ denotes, as usual, $a(a+1)...(a+k-1)$.)

$$\frac{1}{\pi} = 2\sqrt{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/4)_k(1/2)_k(3/4)_k}{k!^3}(1103+26390k)(1/99)^{4k+2}. \tag{1}$$

This formula is an example of a *non-terminating* hypergeometric series identity. Many times, non-terminating series are either limiting cases or "analytic continuations" of *terminating identities*, which are now known to be routinely provable by computer. [WZ].

Een oproep tot slot

De Engelstalige Wikipedia levert langzamerhand een fantastische encyclopedie van de wiskunde.

De Nederlandstalige Wikipedia blijft hierin ver achter.

Studenten wis- en natuurkunde, help mee om dit beter te maken!

Literatuur

G. Gasper & M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Cambridge University Press, second ed., 2004.

S. Bais, *De natuurwetten*, Amsterdam University Press, 2005.

T. H. Koornwinder, *Special functions and q-commuting variables*, `http://arxiv.org/abs/q-alg/9608008`.

M. Petkovšek, H. S. Wilf & D. Zeilberger, *A=B*, `http://www.math.upenn.edu/~wilf/AeqB.html`.